

# 微分形式と物理

～電磁気学、解析力学、熱力学、相対論を form で語り直す～

前野昌弘

2025年2月24日

# 目次

はじめに	8	
第 1 章	2 次元平面ベクトルを使ってウォーミングアップ	10
1.1	ベクトルと基底	10
1.1.1	基底	10
1.1.2	2 次元平面内のベクトルの「基底の取り直し」	12
1.2	2 次元の直交座標と極座標の例	14
1.3	斜交座標系の例としての Galilei 変換	18
1.4	ウォーミングアップのまとめ	24
第 2 章	共変成分・反変成分と 1-form	26
2.1	微小変位と微分演算子	26
2.2	共変成分と反変成分	32
2.2.1	変換則	32
2.2.2	1-form	37
2.3	1-form の例：力と仕事	40
2.4	外微分（予告編）と全微分	42
2.4.1	外微分（予告編）	42
2.4.2	全微分	45
2.5	0-form とその微分の結果の 1-form	46
2.5.1	ベクトルと 1-form の基底：2 次元極座標の例	49
2.6	1-form の積分	50
第 3 章	ベクトル場	53
3.1	微分演算子としてのベクトル場	53
3.2	1-form とベクトル場の比較	55
3.3	積分曲線	58
3.3.1	積分曲線とは	58

3.3.2	積分曲線の 2 次元の例	60
3.3.3	座標系の変換	63
3.4	積分曲線のパラメータと座標	64
3.5	内積の定義と意味	65
3.6	ベクトル場と積分パラメータ	68
3.6.1	二つのベクトル場	68
3.6.2	ベクトル場の交換関係	69
3.6.3	ベクトル場を使って行ける場所の例	72
3.6.4	ベクトル場の交換	74
3.7	完全積分可能性と Frobenius の定理	76
3.8	数学的表現としてのベクトル場	80
第 4 章	$n$ -form	84
4.1	2-form	84
4.1.1	二つのスロットを持つ量	84
4.1.2	平面の面積を表現する量	85
4.1.3	2-form の積分	87
4.1.4	2-form と、その 3 次元空間内での意味	90
4.1.5	一般の 2-form	92
4.2	3-form、そして $n$ -form	93
4.3	内部積	100
4.4	外微分	103
4.4.1	2-form の例：磁束密度	105
4.4.2	2-form の外微分	108
4.5	1-form の積分と Stokes の定理	112
4.5.1	Stokes の定理 (1-form 版)	112
4.5.2	$N$ 次元多様体内での Stokes の定理	114
4.5.3	closed な 1-form の積分は経路に依らない	115
4.6	複素積分と微分形式	117
4.7	2-form の積分 (面積分) と 1-form の外微分	121
4.7.1	$n$ -form に対する Stokes の定理	122

4.8	体積要素と Hodge dual	123
4.8.1	$N$ 次元体積要素	123
4.8.2	Hodge dual の心—3 次元の例	125
4.8.3	★ 演算	126
4.9	余微分	132
4.10	Lie 微分	134
4.10.1	スカラーに対して	134
4.10.2	ベクトル場に対する Lie 微分	136
4.10.3	1-form に対する Lie 微分	138
4.10.4	$n$ -form に対する Lie 微分	139
4.10.5	Lie 微分と外微分の関係	140
4.11	form で表現する Frobenius の定理	142
4.12	共変微分	146
4.12.1	一般座標変換に対する共変微分	146
4.12.2	電磁気学および Yang-Mills 場における共変微分	151
第 5 章	微分形式で語る電磁気学	154
5.1	3 次元空間の静電場	154
5.2	3 次元空間の静磁場	157
5.2.1	$H$ は 1-form だが、 $B$ は 2-form	157
5.2.2	電流密度は 2-form	158
5.2.3	$d.H. = j.$ とグリーン関数	159
5.2.4	ベクトルポテンシャルの導入	164
5.3	4 次元への移行	166
5.4	電磁場の Lorentz 変換	172
5.4.1	ベクトル、テンソル、form の Lorentz 変換	172
5.4.2	「運動する磁場」は電場を伴う	176
5.4.3	電流の作る磁場の式を Lorentz 変換で出す	178
5.5	$F.$ から作られるスカラー	178
第 6 章	解析力学と熱力学	180
6.1	正準形式の力学	180

6.1.1	正準形式は何が嬉しい？	180
6.1.2	シンプレクティック形式への準備	181
6.1.3	最小作用の原理を外微分で表現する	189
6.1.4	ヤコビ恒等式	191
6.2	正準変換	194
6.3	正準変換の例	196
6.3.1	点変換	196
6.3.2	座標と運動量の交換	198
6.3.3	調和振動子の角変数	198
6.4	調和振動子のエネルギーを上げる演算子	200
6.5	正準変換の母関数	201
6.5.1	$q, Q$ を独立変数とする	201
6.5.2	$p, Q$ を独立変数とする	202
6.5.3	$q, P$ を独立変数とする	203
6.5.4	$p, P$ を独立変数とする	204
6.6	熱力学	205
6.6.1	完全な熱力学関数の全微分	205
6.6.2	熱力学的状態空間における 2-form	206
6.6.3	熱力学第 2 法則は何をする？	208
第 7 章	拘束系の古典力学	210
7.1	古典力学の拘束系の単純な例—定滑車	210
7.1.1	初等力学で	210
7.1.2	初等力学で少し小賢いことを考えると	211
7.1.3	ラグランジュ形式で	212
7.1.3.1	張力が出てくるようにラグランジアンを変更する	212
7.1.3.2	拘束条件が加わるようにする	213
7.2	ホロノーム系と非ホロノーム系	214
7.3	正準形式での拘束	216
7.3.1	拘束系の正準形式に関する注意	217
7.3.2	位相空間を縮小する	218

7.4	Dirac 括弧	222
7.4.1	拘束された空間への射影	223
7.4.2	Dirac 括弧の定義	225
7.4.3	symplectic form	226
7.5	古典力学を Dirac 括弧を使って解く例	227
7.5.1	定滑車	227
7.5.2	円周上に拘束された質点	232
7.6	冗長系	235
7.6.1	ものすごく簡単な冗長系	235
7.6.2	少しだけややこしい冗長系	239
7.7	電磁場の正準形式	242
7.7.1	作用と不変性	242
7.7.2	正準形式	243
7.7.3	拘束ゲージ変換の generator	244
第 8 章	微分形式で語る一般相対論	246
8.1	共変微分と平行移動	246
8.2	曲率 (form を使わずに)	250
8.2.1	リーマン曲率	250
8.2.2	リーマン曲率に関する恒等式	252
8.2.3	リーマンテンソルの物理的意味	253
8.2.4	リッチ曲率とスカラー曲率	255
8.3	微分形式による曲がった時空の表現	256
8.3.1	多脚場 1-form	256
8.3.2	局所 Lorentz 座標系のベクトルの共変微分	260
8.3.3	多脚場 1-form とスピン接続 1-form の関係	262
8.3.4	局所 Lorentz 座標のベクトルで計算する曲率	263
8.3.5	Einstein 方程式	268
8.4	具体的な曲率の計算	273
8.4.1	練習: 2次元球	273
8.4.2	練習: 3次元極座標	274

8.4.3	球対称定常な 3+1 次元時空	275
終わりに		282
	参考文献	282
付録 A	数学に関する補足	283
A.1	atan2	283
A.2	置換符号と Levi-Civita 記号	284
A.2.1	置換符号の記号 $\text{sgn}[\ ]$	284
A.2.2	2次元と3次元の Levi-Civita 記号	284
A.2.3	任意の時空での Levi-Civita 記号	285
A.3	多様体	288
A.4	行列式と逆行列	290
付録 B	練習問題のヒントと解答	292
B.1	練習問題のヒント	292
B.2	練習問題の解答	292

# はじめに

本書の目標は(微分形式を使って物理を表現すること)である。微分形式は学部レベルの物理ではあまり使われることがないのだが、これを使うことで力学(特に解析力学)、電磁気学(これはゲージ理論の有用な例でもある)、熱力学、さらには一般相対論などが簡素な形で書けるので、非常に有用である。もっと使えばいいのに、と前々から思っていた。

微分形式を使いたい理由は「できる限り物理を<座標系に依らない形>で記述したい」である。物理の世界では、「座標に依存しない表現」の方がえらい。ざっくり言えば、「座標系に依存する表現」は「座標系に依存しない表現」より低級である。「低級」というのは(言葉のチョイスが悪くて申し訳ないが)「初心者向け」ということでもある。ゆえに高校物理や大学初年度の物理ではついつい「座標系依存」な表現(たとえば速度の  $[v_x \ v_y \ v_z]$  という表現)が使われる。しかし、いつかは「高級」な表現を使わなくてはいけないときがやってくる。特に「いろんな座標を渡り歩いて計算する」必要がある場合に高級な計算の方が絶対に有利である<sup>†1</sup>。

座標系に依らない量を「スカラー」と呼ぶ。極端な言い方をすれば、物理において観測できる量は常にスカラーである。と言うと「そんなことはない。運動量  $\vec{p}$  の  $x$  成分を我々は観測できるぞ」と思う人もいるかもしれないが、実はあれは「観測機の向きを表すベクトル  $\vec{P}_{\text{観}}$  と運動量  $\vec{p}$  との内積であるスカラー  $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$ 」を観測している。座標変換すると  $\vec{p}$  の成分は変わるし、

---

†1 微分形式があまり使われない理由は「習得に時間が掛かる」ためだと思うが、ここで言う「高級な計算」を行うときは、微分形式を習得することのメリットは習得コストを上回る。

$\vec{P}_{\text{観}}$  の成分は変わる。しかし  $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$  は変わらない<sup>†2</sup>。たとえばある物体の運動量  $\vec{p}$  を測るには「バネにぶつけてバネがどれだけ縮むかを見る」という測り方があるが、そのバネの向きが  $\vec{P}_{\text{観}}$  であり、 $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$  は、「バネがどれだけ縮んだかを表すメーター」に直結している（比例とは限らない）。この「メーター」の指す数字は座標系が変わったら変わるものではない。そのような量の方が本質的なのだ。

運動量  $\vec{p}$  は「観測機を置く場所」と「観測機の向き」を指定することで観測量が得られる量だと言える。同様に「観測機を置く場所」と「観測機の面」を指定することで観測量が得られる量もある（観測機としてアンテナを、観測量として電波のエネルギーを想像するとよい）。同様に場所と体積を指定することで観測できる量も考えられるだろう。

我々が観測できる量としては「点で観測する量」「線で観測する量」「面で観測する量」「立体で観測する量」がある（3次元ならここで打ち止めだが、 $N$ 次元（ $N > 3$ ）ならもっと次が出てくる）。そこでこれらの量を常に「座標系に依存しない表現」で表現したい。この表現の為のツールが微分形式である。

予防線を張っておくが、本書で展開するのは「物理の話」である。よって数学的に厳密な取扱をしないことも多い。数学屋さんから見れば「こんなの証明になってないよ」と言われる部分が多々あると思う（そもそも「証明略」にする部分もある）。

---

†2 このあたりは、量子力学で観測できるのは二つの状態で演算子を挟んだ量  $\langle \psi | \hat{O} | \phi \rangle$  だけであって、 $\langle \psi |$  も  $|\phi \rangle$  も、演算子  $\hat{O}$  も直接観測できない、のと同じ状況である。物理にはしばしば「我々が<なんとか方程式>を使って計算している量」と、「我々が測れる量」との間に剥離がある状況が出現する。