微分形式と物理

〜電磁気学、解析力学、熱力学、相対論を form で語り直す〜

前野昌弘

2025 年 2 月 24 日

目次

はじめに

本書の目標は**微分形式を使って物理を表現すること**である。微分形式は学部レベルの物理ではあまり使われることがないのだが、これを使うことで力学（特に解析力学）、電磁気学（これはゲージ理論の有用な例でもある）、熱力学、さらには一般相対論などが簡素な形で書けるので、非常に有用である。もっと使えばいいのに、と前々から思っていた。

微分形式を使いたい理由は「できる限り物理を＜座標系に依らない形＞で記述したい」である。物理の世界では、「座標に依存しない表現」の方がえらい。ざっくり言えば、「座標系に依存する表現」は「座標系に依存しない表現」より低級である。「低級」というのは（言葉のチョイスが悪くて申し訳ないが）「初心者向け」ということでもある。ゆえに高校物理や大学初年度の物理ではついつい「座標系依存」な表現（たとえば速度の $\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$ という表現）が使われる。しかし、いつかは「高級」な表現を使わなくてはいけないときがやってくる。特に「いろんな座標を渡り歩いて計算する」必要がある場合に高級な計算の方が絶対に有利である[†1]。

座標系に依らない量を「スカラー」と呼ぶ。極端な言い方をすれば、物理において観測できる量は常にスカラーである。と言うと「そんなことはない。運動量 $\vec{p}$ の x 成分を我々は観測できるぞ」と思う人もいるかもしれないが、実はあれは「観測機の向きを表すベクトル $\vec{P}_{\text{観}}$ と運動量 $\vec{p}$ との内積であるスカラー $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$」を観測している。座標変換すると $\vec{p}$ の成分は変わるし、

[†1] 微分形式があまり使われない理由は「習得に時間が掛かる」ためだと思うが、ここで言う「高級な計算」を行うときは、微分形式を習得することのメリットは習得コストを上回る。

$\vec{P}_{観}$ の成分は変わる。しかし $\vec{P}_{観} \cdot \vec{p}$ は変わらない[†2]。たとえばある物体の運動量 $\vec{p}$ を測るには「バネにぶつけてバネがどれだけ縮むかを見る」という測り方があるが、そのバネの向きが $\vec{P}_{観}$ であり、$\vec{P}_{観} \cdot \vec{p}$ は、「バネがどれだけ縮んだかを表すメーター」に直結している（比例とは限らない）。この「メーター」の指す数字は座標系が変わったら変わるものではない。そのような量の方が本質的なのだ。

運動量 $\vec{p}$ は「観測機を置く場所」と「観測機の向き」を指定することで観測量が得られる量だと言える。同様に「観測機を置く場所」と「観測機の面」を指定することで観測量が得られる量もある（観測機としてアンテナを、観測量として電波のエネルギーを想像するとよい）。同様に場所と体積を指定することで観測できる量も考えられるだろう。

我々が観測できる量としては「点で観測する量」「線で観測する量」「面で観測する量」「立体で観測する量」がある（3 次元ならここで打ち止めだが、N 次元（$N > 3$）ならもっと次が出てくる）。そこでこれらの量を常に「座標系に依存しない表現」で表現したい。この表現の為のツールが微分形式である。

予防線を張っておくが、本書で展開するのは「物理の話」である。よって数学的に厳密な取扱をしないことも多い。数学屋さんから見れば「こんなの証明になってないよ」と言われる部分が多々あると思う（そもそも「証明略」にする部分もある）。

---

†2　このあたりは、量子力学で観測できるのは二つの状態で演算子を挟んだ量 $\langle\psi|\,\hat{O}\,|\phi\rangle$ だけであって、$\langle\psi|$ も $|\phi\rangle$ も、演算子 $\hat{O}$ も直接観測できない、のと同じ状況である。物理にはしばしば「我々が＜なんとか方程式＞を使って計算している量」と、「我々が測れる量」との間に剥離がある状況が出現する。