

# よくわかる特殊相対論

前野昌弘

令和5年12月18日

東京図書株式会社

# 目次

第1章 はじめに	1
1.1 「相対論的」考え方	1
1.2 電磁気学での「絶対空間」	6
1.3 特殊相対論の必要性	9
第2章 座標変換と運動方程式	11
2.1 座標系	11
2.1.1 基準系と座標系	
2.1.2 座標	
2.1.3 次元	
2.1.4 1次元空間の座標変換	
2.2 Galilei 変換と力学の法則	15
2.2.1 Galilei 変換	
2.2.2 速度、加速度の Galilei 変換と運動方程式の不変性	
2.2.3 「慣性系」の定義	
2.2.4 絶対空間に対する Mach の批判	
2.3 光の伝搬と Galilei 変換	23
2.4 2次元のデカルト座標の間の変換	24
2.5 テンソルを使った表現	29
2.6 運動方程式を不変にする3次元の座標変換	34
2.7 章末演習問題	36

<b>第3章 電磁気学の相対性</b>	<b>38</b>
3.1 電磁波は静止できるのか？	38
3.2 電磁誘導の疑問	41
3.3 Maxwell 方程式を Galilei 変換すると？	45
3.4 エーテル—絶対静止系の存在	50
3.5 Hertz の方程式の実験との比較	52
3.5.1 Röntgen-Eichenward の実験	
3.5.2 ウィルソンとウィルソンの実験	
3.5.3 フィゾーの実験	
3.6 Trouton-Noble の実験	54
3.7 Lorentz の考えから Einstein の相対性理論へ	56
3.8 電磁気学のパラドックス：電流に追いつく	59
3.9 章末演習問題	61
<b>第4章 光速度不変から導かれること</b>	<b>64</b>
4.1 光速度不変性を満たす座標変換	64
4.1.1 特殊相対性原理	
4.1.2 基準系の満たすべき条件	
4.1.3 Lorentz 変換が線形変換であること	
4.1.4 Lorentz 変換の導出	
4.1.5 係数の決定	
4.2 Lorentz 変換の式	72
4.2.1 ここまでの結果のまとめ	
4.2.2 任意方向に進む光の速さが不変であること	
4.3 図解から Lorentz 変換を求める	74
4.3.1 同時の相対性の図解	
4.3.2 時空図グラフで考える Lorentz 変換	
4.3.3 係数の決定	
4.4 光速度不変から導かれること—Lorentz 短縮	83
4.5 光速度不変から導かれること—ウラシマ効果	86
4.6 一般の方向の Lorentz 変換	91

4.6.1 Lorentz 変換の別の導き方	
4.7 章末演習問題	99
<b>第5章 Lorentz 変換と物理現象</b>	<b>100</b>
5.1 速度の合成則	100
5.1.1 一直線上の速度の合成	
5.1.2 速度が一直線上でない場合	
5.2 フィゾーの実験の解釈	104
5.3 相対論的因果律	105
5.4 光行差	107
5.5 ドップラー効果	110
5.6 章末演習問題	114
<b>第6章 Minkowski 空間</b>	<b>117</b>
6.1 4次元の内積と距離	117
6.1.1 4次元距離と広い意味の Lorentz 変換	
6.1.2 4次元距離の流儀	
6.1.3 時間的／空間的	
6.1.4 Minkowski 計量	
6.1.5 4次元距離で理解する Lorentz 短縮とウラシマ効果	
6.1.6 世界線の長さとは固有時	
6.2 不変性と共変性	124
6.2.1 スカラー	
6.2.2 共変ベクトルと反変ベクトル	
6.2.3 テンソル	
6.2.4 共変な式	
6.3 Lorentz 変換のテンソルによる表現	131
6.4 4元ベクトル	134
6.5 章末演習問題	138
<b>第7章 パラドックス</b>	<b>139</b>
7.1 双子のパラドックス	139

7.2	2台のロケットのパラドックス	146
7.3	ガレージのパラドックス	150
7.4	章末演習問題	152
<b>第8章</b>	<b>相対論的力学</b>	<b>153</b>
8.1	Newton 力学を特殊相対論的に再構成する	153
8.2	4元速度	155
8.3	4元加速度、4元運動量と4元力	157
8.3.1	4元加速度	
8.3.2	4元運動量	
8.3.3	4元力	
8.3.4	力の Lorentz 変換と Trouton-Noble の実験	
8.4	質量の増大?	164
8.5	運動量・エネルギーの保存則	168
8.6	質量とエネルギーが等価なこと	171
8.6.1	非相対論的力学における「質量の保存則」	
8.6.2	相対論的力学における質量の変化と結合エネルギー	
8.7	直角テコのパラドックス	179
8.8	章末演習問題	184
<b>第9章</b>	<b>電磁気学の4次元的な記述</b>	<b>186</b>
9.1	電磁場の Lorentz 共変な表現	186
9.1.1	ポテンシャルを使って書いた Maxwell 方程式	
9.1.2	ベクトル・ポテンシャルの4元ベクトル化	
9.1.3	テンソルで書いた Maxwell 方程式	
9.1.4	双対テンソル	
9.2	$c\rho$ が4元電流の第0成分であることの確認	197
9.2.1	$c\rho$ が Lorentz 変換を受けること	
9.2.2	運動する立方体の電荷密度	
9.2.3	1個の荷電粒子と電流密度	
9.2.4	曲線運動をする電荷	
9.2.5	複数個の荷電粒子と電流密度	

9.3	テンソルで書いた Maxwell 方程式	207
9.4	Lorentz 力の導出	210
9.5	電場・磁場の Lorentz 変換	212
9.5.1	4元ポテンシャルの変換から	
9.5.2	電磁場テンソルを使う方法	
9.6	静電場を Lorentz 変換する	216
9.6.1	点電荷の電場の Lorentz 変換	
9.6.2	Trouton-Noble の実験の計算	
9.7	静磁場を Lorentz 変換する	220
9.7.1	直線電流の Lorentz 変換	
9.7.2	導線のパラドックスを解く	
9.8	$F_{\mu\nu}$ の幾何学的意味	224
9.9	ゲージ変換	228
9.10	章末演習問題	230
<b>第 10 章</b>	<b>電磁場のエネルギー運動量テンソル</b>	<b>232</b>
10.1	真空中の電磁気学におけるエネルギーと運動量	232
10.1.1	テンソルを使わずに	
10.1.2	4次元テンソルの表現に直す	
10.2	粒子のエネルギー・運動量テンソル	240
10.3	応力テンソル	243
10.3.1	$T_{ij}$ の意味	
10.3.2	力による運動量の流れ	
10.3.3	物体の移動による運動量の流れ	
10.3.4	応力テンソルで考える直角テコのパラドックス	
10.4	応力テンソルと電磁力の関係	249
10.4.1	点電荷の受ける静電気力	
10.4.2	動く点電荷に電場から働く力	
10.4.3	電流と外部磁場	
10.4.4	動く点電荷に磁場から働く力	
10.5	荷電粒子のまわりの電磁場のエネルギー・運動量	255

10.5.1	点電荷の作る電磁場のエネルギー・運動量	
10.5.2	エネルギーの積分	
10.5.3	運動量 $\times c$ の密度の積分	
10.5.4	$\frac{4}{3}$ 問題の解決	
<b>第 11 章</b>	<b>相対論的電磁気学に関するトピック</b>	<b>262</b>
11.1	媒質中の相対論的電磁気学	262
11.1.1	3次元記法での媒質中の電磁気学	
11.1.2	4次元記法で考える	
11.1.3	運動する分極は磁化を持つ	
11.1.4	運動する磁化は分極を持つ	
11.2	Green 関数	266
11.2.1	3次元空間のラプラシアン of Green 関数	
11.2.2	3 + 1次元時空のダランベルシアン of Green 関数	
11.2.3	運動する荷電粒子による電磁場	
11.3	等加速度運動?	276
11.4	章末演習問題	277
<b>付録 A</b>	<b>Michelson-Morley の実験</b>	<b>279</b>
A.1	実験の概要	279
A.2	実験の目論見としての計算	280
A.3	古い意味の Lorentz 短縮	283
A.4	章末演習問題	284
<b>付録 B</b>	<b>数学的補足</b>	<b>286</b>
B.1	ベクトルと行列	286
B.1.1	基底	
B.1.2	デカルト座標と極座標の関係	
B.1.3	一般座標における運動方程式	
B.1.4	行列の積	
B.2	デルタ関数	292

B.2.1	定義	
B.2.2	性質と公式	
B.2.3	3次元のデルタ関数	
B.3	Levi-Civita の記号	297
B.3.1	定義	
B.3.2	公式	
B.3.3	Levi-Civita 記号の用途	
B.3.4	変換性	
B.3.5	4次元の Levi-Civita 記号	
付録 C	練習問題のヒントと解答	302
C.1	ヒント	302
C.2	解答	305
索引		323



# 第 1 章

## はじめに

なぜ特殊相対論が必要なのか？ —について述べておこう。

### 1.1 「相対論的」考え方

相対論には特殊相対論と一般相対論があり、本書で扱うのは特殊相対論の方であるが、「特殊」とつくから難しいと思っはいけない。物理ではしばしば、「一般」の方が「特殊」より難しい。相対論の場合も同様に、特殊相対論の方が圧倒的に簡単である。

「相対論」とは、どのような学問なのか。「相対」の反対は「絶対」である。相対論は「絶対論」の否定として生まれた。この場合の絶対とは、Newton<sup>†1</sup>の言う「絶対空間」の「絶対」である。NewtonはNewton力学を作るとき、宇宙には基準となる座標系<sup>†2</sup>が存在していると考えた。その特別な座標系が張られた空間を絶対空間と呼ぶ。

Newtonより少し前に、地球を中心とし、太陽がその回りを回っている「天動説」から、太陽を中心とし、地球がその回りを回っている「地動説」への変換（コペルニクスの転換と呼ばれる）があった。これは、当時の人が考えていた「絶対静止」の原点が地球から太陽へと移動したことに対応する。この「地球が静止している」という考えは間違いではあるが、当時の感覚では至極当たり前であった。今では太陽は銀河系に属し、銀河系は回転している（銀河中止から見れ

<sup>†1</sup> Newton（日本語表記は「ニュートン」）は力学の祖である、イギリスの物理学者。

<sup>†2</sup> 後で違いを説明するが、ここの「座標系」は、正確には「基準系」。

ば太陽は移動している)し、さらに銀河系全体もグレート・アトラクターと呼ばれる大質量天体<sup>†3</sup>に向かって落下しているという話もある。もはや絶対静止の原点は太陽ではなく、銀河系ですらない。だからと言って、グレートアトラクターが静止していると考えればよいわけでもない。

このように「静止している中心」が時代とともに更新されていった結果わかったのは、「絶対静止」を考えることには意味がなかった、ということだ。つまり、

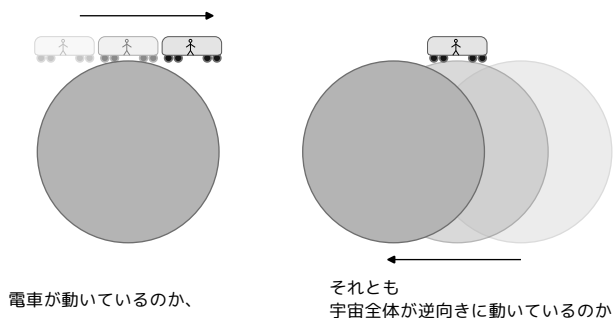
### 絶対静止の否定

「自分は絶対静止している」と主張できるものなどない

が相対論の主張するところである。

ここで、「宇宙で静止しているものは何かが判定できるか」という問題を考えてみよう。

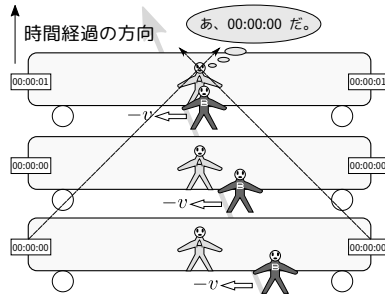
話を簡単にするため、宇宙には地球とその表面の物体しかなく、地球は自転も公転もしていないとしよう。この孤独な地球の上にあなたが住んでいて、今電車に乗っているとす。電車が加速も減速もせず曲がりもせずスムーズに走っている時、電車の中であなたがする行動(本を読んだりあくびしたり、あるいは電車がすいていればキャッチボールだってできる)は、家の中での行動と同じように、何の支障もなくできるはずだ<sup>†4</sup>。



この現象を { 宇宙が止まっていて、電車が等速運動している  
電車も止まっていて、宇宙全体が逆向きに等速運動している } の

<sup>†3</sup> グレートアトラクターは、約2億光年向こうにある正体不明の天体で、我々の銀河系を含め、近くの天体はこの天体に向かう移動速度成分を持つ。

<sup>†4</sup> 電車が揺れている、などと言うなかれ。それは加速減速のうちだから、今はないとしている。



光はこの図で見て 45 度の方向に移動するとして書いた（距離 1 光秒と時間 1 秒が同じスケールになるように描いている）。A さんが「あ、00:00:00 だ」と思った瞬間は、（光が到着するのに 1 秒かかるので）実際には 0 時 0 分 1 秒である。このとき A さんはどちらの時計を見ても 0 時 0 分 0 秒という目盛を読む。A さんが目盛を読む時刻と時計の指している時刻とはずれていることに注意しよう<sup>†19</sup>。

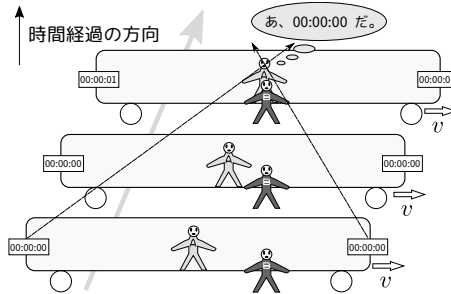
我々は相対性に興味があるので、「この現象を別の立場で見たら何が起こるのか？」を考えていこう。B さんがこの現象を観測したとすると、電車は前方に向けて運動しているように見える。ここで、

#### Galilei 変換的な考え方

走りながら観測すると、前方から出た光は、観測者の速度の分遅く感じられる。同様に後方から出た光は観測者の速度の分速く感じられる。

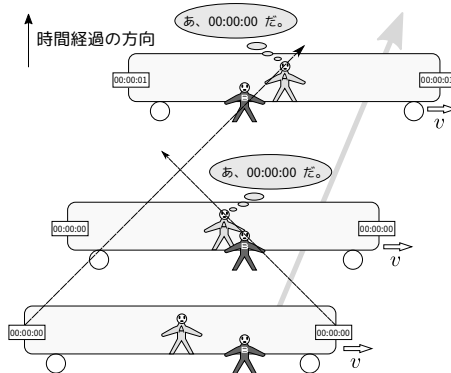
をしてみよう（後で間違っているとわかる考え方を、あえてする）。

<sup>†19</sup> 我々の生活空間は 1 光秒の広さがないので、これを実感することはないが、実は我々が時計をみて確認している時間は、（ナノ秒で測る程度に）実際の時間より遅いのだ。ちなみに、1 ナノ光秒は、29.9792458 センチメートル。つまり、30 センチほど向こうにある時計の指す時間は、1 ナノ秒ぐらい遅れている。



すると、上のような図が描ける。Bさんの見る現象を時間を縦軸にして描いたものだからBさんは静止している。Galilei変換的に考えたので光の移動は45度の線にならない。光は前からと後ろから、違う速さでやってきて、同時刻にAさんに到達する。このことは(現象としては)矛盾は何もない。しかし、実験事実はこの(直観的に正しく思える)考え方を支持しない。

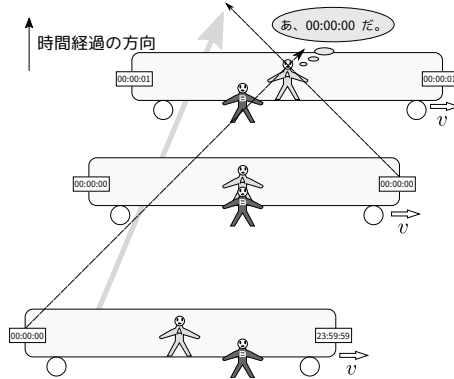
なぜなら、実験によれば(実験的に成功しているMaxwellの電磁気学理論をどの立場でも成立するものとするならば)光速度は一定であり、  
 { Bさんから見た前方からの光がBさんの速度の分遅くなる  
 Bさんから見た後方からの光がBさんの速度の分速くなる } などという現象は起きない。では、下の図のようになるのだろうか。



だが、これもおかしい。なぜなら、この図では光が中央のAさんに到着するのは同時ではない。同じ現象を見方(観測者の立場)を変えて見ているだけであるということに注意して欲しい。この図では、Aさんが2回「0時0分0秒を指す時計」を観測するが、それはおかしい。Aさんは「自分には同時に光が到着し

た」と思うはずだ。そして、その現象は電車の中の人が見ようが外の人が見ようが変り得ない。

こうして、満足のいく解釈は、下の図のように、前方と後方で光の発車時刻がずれていると考える他はないとわかる。



すなわち、「同時刻」という概念は観測者に依存する。したがって、動いている人にとっての時刻 $\tilde{t}$ が一定になる線（ $1+1$ 次元で考えているので線だが、 $3+1$ で考えていれば3次元超平面）は、時刻 $t$ が一定の線に対して「傾く」ということになる。

**【FAQ】** 同時が相対的だというなら、Aさんに光が届く時間も相対的に変化していいのでは？

.....

ここで「同時が相対的」と言っているのは「離れた場所における同時」であり、「二つの違う時空点の関係」である。ある一つの場所（今の場合、Aさんの目）における同時（一つの同じ時空点の関係）ではない。後者を「局所的な同時」と呼ぶ。

局所的な同時が相対的だというのはさすがに許しがたい。このAさんに「光が同時に来たら『よっしゃ！』と叫んでね」と頼んでいたとしよう。電車内の人から見たらAさんは「よっしゃ！」と叫び、電車外の人から見たら叫ばないということは有り得るだろうか？ —と考えてみれば、局所的な同時が相対的であることはとても考えられないとわかるだろう。

同時の相対性にずいぶんこだわっていろいろ図を書いて説明しているが、それはこの同時の相対性こそが特殊相対論を理解するのにもっとも重要な（そし

て、それゆえにとっつきにくい) 概念だからである。この説明で「わかった」と思えた人は、特殊相対論理解という山登りの最大の難所はクリアしている。

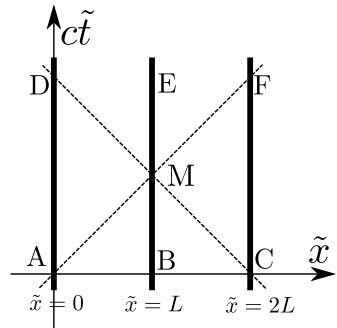
### 4.3.2 時空図グラフで考える Lorentz 変換

Galilei 変換で  $\begin{cases} t \text{ 軸} & (x = \text{一定} \text{ の線}) \\ \tilde{t} \text{ 軸} & (\tilde{x} = \text{一定} \text{ の線}) \end{cases}$  は傾くが  $\begin{cases} x \text{ 軸} & (t = \text{一定} \text{ の線}) \\ \tilde{x} \text{ 軸} & (\tilde{t} = \text{一定} \text{ の線}) \end{cases}$

は同じ方向を向く。しかし Lorentz 変換においては  $t$  軸も  $x$  軸の両方が傾かなくては行けない。そうでないと、光速一定を満たすことができない。式で考えると、これは  $\tilde{t}$  の式の中に  $x, t$  の両方が入ってくることを意味する。

ここで時空図で  $t$  軸と  $x$  軸の傾きを確認しよう。縦軸は時間座標  $t, \tilde{t}$  ではなく、これに光速  $c$  をかけた  $ct, c\tilde{t}$  とするので、光の軌跡は時空図上では傾きがぴたり 45 度の線になる (光は単位時間に  $c$  進むから)。

電車外の観測者の座標系を  $(ct, x)$  にしたいので、電車内にある観測者の座標系を  $\tilde{x}$  と  $c\tilde{t}$  としよう。この観測者の基準系での電車の先端・中間にいる人間・後端のそれぞれの世界線を図に書くと、右図のようになる。縦の 3 本の線は左から、AD が電車の後端の世界線、BE が人間の世界線、CF が電車の先端の世界線であり、斜めに走る破線は光の軌跡である。



$\begin{cases} \text{A 点で電車の後端から出た} & \text{光が、M 点で人間の目の前ですれ違い、} \\ \text{C 点で電車の先端から出た} & \end{cases}$   
 $\begin{cases} \text{電車の先端の F 点に至る} & \text{様子を表している。} \\ \text{電車の後端の D 点に至る} & \end{cases}$


たとえば点 M は  $\tilde{x} = L, \tilde{t} = \frac{L}{c}$  であるから  $(c\tilde{t}, \tilde{x}) = (L, L)$  となることから、それぞれの場所の座標  $(c\tilde{t}, \tilde{x})$  を並べると、

$$\begin{array}{lll} D(2L, 0) & E(2L, L) & F(2L, 2L) \\ & M(L, L) & \\ A(0, 0) & B(0, L) & C(0, 2L) \end{array} \quad (4.17)$$

## 第 7 章

# パラドックス

この章は特殊相対論に関するいくつかのパラドックス（逆説）を紹介する。

 ここで紹介するパラドックスは、特殊相対論をよく理解していれば実は不思議なものでもなんでもない。本質的理解ができているかどうかを確認するためには重要だが、「大丈夫」と思う人はとりあえず飛ばして先へ行っても構わない。

### 7.1 双子のパラドックス

いわゆる「双子のパラドックス」は、特殊相対論で一番有名なパラドックスであろう。ただ、このパラドックスにはいくつかのレベルがあり、深いレベルまで考えると一般相対論を使って解くことが必要になる。ここではそこまで立ち入らずに、浅いレベル（でも充分難しいし面白い）だけを考えよう。

まず素朴にパラドックスの概要を述べよう。双子の兄と弟がいるとする。兄が亜光速で飛ぶことができるロケットに乗って宇宙の彼方まで旅をして、地球に帰ってきたとしよう。弟はずっと地球で待っている。運動していると固有時間が短くなる（ウラシマ効果）ことから、帰ってきた兄は弟より若い。

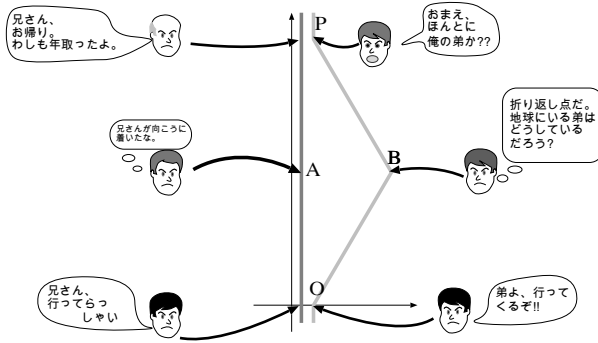
そこで以下の主張を誰かがしたとしてみよう。

## 矛盾があるとする主張

弟および地球から見れば確かに兄は運動して帰ってきた。しかし相対的に考えて兄が静止する立場で見たならば弟と地球の方こそ運動して、兄の元に帰ってきたと考えられるのではないのか。その場合弟の方が若くあるべきだ。これは矛盾である。

これは浅く考えれば矛盾しているように思えるかもしれない。しかし具体的に図を書いて考えてみると、そうではないことがわかる。

まず、兄と弟の移動を時空図で表してみよう。下は、地球にいる弟の立場で描いた<sup>11</sup>時空図である。

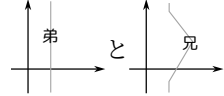


このパラドックスに関して、上にも書いたように、「相対的に考えて兄が静止する立場で見たならば弟と地球の方こそ運動して、兄の元に帰ってきたと考えられる」という主張がよく見られる。

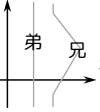
もしも我々が時空図 の運動と時空図 の運動を比較しているのであれば、この主張は正しい。その場合に兄が静止する立場を取れば、時空図 と時空図 を比較することになる、この二つの見方では、確かに { 兄から見た弟の運動 / 弟から見た兄の運動 } は同等であると考えていい。

<sup>11</sup> 弟の世界線が時空図上で「真上に向かう直線」になるように描いた、ということ。



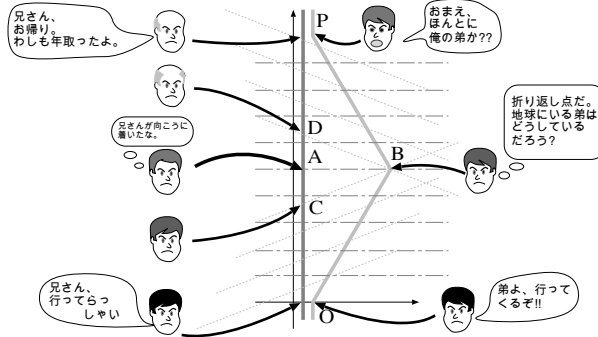
しかし、ここで我々が比較しているのは、 という二つの時空図なのである。この図から「兄が静止する立場」は単純に考えることができないことがわかるだろう。

【補足】 ++++++

なお、時空図  を見れば「兄の方が世界線の長さが短くなる」ことはある意味自明である。「兄から見るとどのように弟の時間が経過しているのかという点をはっきりさせたい」という点にこだわりがなければ、以下の話は不要かもしれない。

+++++ 【補足終わり】

さて、ここで「兄の同時刻」と「弟の同時刻」は別であることを思い出そう。それぞれの「同時刻線」を書き込んだものが次の時空図である。



兄が弟（地球）から一番遠くまで行って、今まさにUターンしている時の時空点は図のBである。弟にしてみれば、この時間、自分は図の時空点Aにいる。弟の同時刻線は図の水平線（一点鎖線）であることに注意しよう。

兄がUターンを行うまで、それぞれの主観でどのような現象が起こったかは、以下のように違う。まず弟の主観は以下の通りである。

## 第 9 章

# 電磁気学の 4 次元的な記述

いよいよ電磁場を相対論的に記述しよう。

### 9.1 電磁場の Lorentz 共変な表現

⇒ せっかく、電磁気学の基本方程式が不変になるように Lorentz 変換を定義したのに、電磁場そのものがどのように Lorentz 変換されるのか、まだ計算していなかった。そこを今から実行する。

#### 9.1.1 ポテンシャルを使って書いた Maxwell 方程式

相対論的記述のためには、電場  $\vec{E}$  と磁束密度<sup>†1</sup>  $\vec{B}$  を使うのは得策ではない。電場  $\vec{E}$  や磁束密度  $\vec{B}$  は 3 次元のベクトルではあるが、4 元ベクトルではないからである。そこでまず、真空中の Maxwell 方程式 (9.1) に源<sup>ソース</sup>の項を加えた

源のある真空中の Maxwell 方程式

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \quad (9.1)$$

を 4 元ベクトルポテンシャルを使った形に書き直していこう。これらの方程式を見ると、「場」である電場  $\vec{E}$  と磁束密度  $\vec{B}$  が、電流密度  $\vec{j}$  と電荷密度  $\rho$  を源

<sup>†1</sup> 「磁場」は  $\vec{H}$  であるが、本書では E-B 対応の立場を取って、磁束密度  $\vec{B}$  を磁場の代表としておく。真空中であれば  $\vec{B}$  と  $\vec{H}$  には本質的な違いはない。

$$\tilde{F}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \xrightarrow[\text{行列表示}]{+} \frac{Q}{-t\tilde{r}^{4\nu}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c (\tilde{r})^3} \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x} & -\tilde{y} & -\tilde{z} \\ \tilde{x} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.101)$$

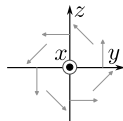
である。Lorentz 変換しよう。下付きで  $\tilde{x} \rightarrow x$  の変換をするので

$$\begin{aligned} & \frac{+Q}{-t\tilde{r}^{4\nu}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c (\tilde{r})^3} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x} & -\tilde{y} & -\tilde{z} \\ \tilde{x} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{+Q}{-t\tilde{r}^{4\nu}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c (\tilde{r})^3} \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2(\beta^2 - 1)\tilde{x} & -\gamma\tilde{y} & -\gamma\tilde{z} \\ \gamma^2(1 - \beta^2)\tilde{x} & 0 & \beta\gamma\tilde{y} & \beta\gamma\tilde{z} \\ \gamma\tilde{y} & -\beta\gamma\tilde{y} & 0 & 0 \\ \gamma\tilde{z} & -\beta\gamma\tilde{z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.102) \end{aligned}$$

となる。 $x, y, z$  を使って表すと

$$\frac{+Q}{-t\tilde{r}^{4\nu}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & -\gamma(x - \beta ct) & -\gamma y & -\gamma z \\ \gamma(x - \beta ct) & 0 & \beta\gamma y & \beta\gamma z \\ \gamma y & -\beta\gamma y & 0 & 0 \\ \gamma z & -\beta\gamma z & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.103)$$

であり、 $[\vec{B}]^y = +F_{31} = -\frac{Q\beta\gamma z}{4\pi\epsilon_0 c (\tilde{r})^3}$ ,  $[\vec{B}]^z = +F_{12} = \frac{Q\beta\gamma y}{4\pi\epsilon_0 c (\tilde{r})^3}$  がわか

る。これらを  $y-z$  平面上の図示すると  のようになる（紙面裏から表

へ向かう向きが  $x$  軸）。(9.103) は、「 $x$  軸方向に流れる電流（今の場合は正電荷の移動）に対して右ねじの方向に磁場が生じる」現象をちゃんと再現している。

**【FAQ】 無限に遠い遠方に磁場が生じているのはおかしくありませんか？**  
 .....  
 この電荷が「最初止まっていて、ある時刻に動き出した」のであれば、無限に遠い遠方までその情報が伝わっているのはもちろんおかしい。実は今計算したの

は「 $t = -\infty$  から  $t = \infty$  まで、等速直線運動を続けている電荷」の作る電場と磁場なのだ。だからすでに無限の遠方まで磁場が届いていても不思議はない。では電荷が加速しているとうなるのか？ —については??節で考えよう。  
→ p??

同じことを、4元ポテンシャルで考えると、

$$\tilde{A}_0 = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}}, \quad \tilde{A}_i = 0 \tag{9.104}$$

を Lorentz 変換して、

$$A_0 = \gamma \tilde{A}_0 = \frac{+Q\gamma}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}} = \frac{+Q\gamma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2}}, \tag{9.105}$$

$$A_1 = -\beta\gamma \tilde{A}_0 = \frac{-Q\beta\gamma}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{-Q\beta\gamma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2}}, \tag{9.106}$$

$$A_2 = A_3 = 0 \tag{9.107}$$

となる。これから電場と磁場を求めると、上と同じ結果が出る。

----- 練習問題 -----

【問い9-5】 上の4元ベクトルポテンシャルから電場と磁場を求める計算を具体的に実行せよ。解答 → p315へ

### 9.6.2 Trouton-Nobleの実験の計算 ++++++ 【補足】

前項の結果を使って Trouton-Noble の実験で電荷に働く力を計算してみよう。正電荷は  $\vec{x}$  が  $(L \cos \theta, L \sin \theta, 0)$  にいるので、これの作る電磁場は(9.102)を平行移動することで、  
→ p217

$$4\pi\epsilon_0 c \frac{+Q}{((\tilde{x} - L \cos \theta)^2 + (\tilde{y} - L \sin \theta)^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \times \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x} + L \cos \theta & -\gamma(\tilde{y} - L \sin \theta) & -\gamma\tilde{z} \\ \tilde{x} - L \cos \theta & 0 & \beta\gamma(\tilde{y} - L \sin \theta) & \beta\gamma\tilde{z} \\ \gamma(\tilde{y} - L \sin \theta) & -\beta\gamma(-L \sin \theta) & 0 & 0 \\ \gamma\tilde{z} & -\beta\gamma\tilde{z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.108}$$

と求められる（負電荷の方も電磁場を作るが、それは「負電荷に働く力」に関係ない<sup>†35</sup>ので無視する）。負電荷のいる場所  $(-L \cos \theta, -L \sin \theta, 0)$  での電磁場は

<sup>†35</sup> 電荷は自分で自分を引っ張る（または押す）ことはできない。なお、真面目に計算すると分母が0になって困るが、それは点電荷を考えたときの宿命である。

## 第 10 章

# 電磁場のエネルギー運動量テンソル

電磁場の力学について理解するために、電磁場のエネルギーや運動量について計算していこう。

### 10.1 真空中の電磁気学におけるエネルギーと運動量

#### 10.1.1 テンソルを使わずに

電磁気学では、以下の式が知られている。

真空中の電磁場のエネルギー密度

$$\frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (10.1)$$

これが確かにエネルギー密度であることを確認するために上の式を時間微分する。真空中の Maxwell 方程式を使うと、

→ p186 の (9.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) &= \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \vec{E} \cdot \left( \underbrace{-\vec{j} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}}_{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left( \underbrace{-\text{rot } \vec{E}}_{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \right) \end{aligned} \quad (10.2)$$

となるが、ここで

$$\vec{E} \cdot (\text{rot } \vec{B}) - (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{B} = -\text{div} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (10.3)$$

を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (10.4)$$

という式ができる。

右辺第1項の  $-\vec{E} \cdot \vec{j}$  は「電場が単位時間にする仕事  $\times (-1)$ 」である。そのことを確認するため、この  $\vec{j}$  に(9.52)の電流密度を代入し

$$\int_{\text{領域}} d^3\vec{x} \left( -\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \left( \sum_{i=1}^N Q_{(i)} \vec{v}_{(i)}(t) \delta^3(\vec{x}_{(i)} - \vec{X}_{(i)}(t)) \right) \right) \quad (10.5)$$

のようにある領域で積分する。領域内で0でない場所があるデルタ関数が残り、

$$= - \sum_{\substack{i= \\ \text{領域内に} \\ \text{ある電荷}}} Q_{(i)} \vec{E}(t, \vec{X}_{(i)}(t)) \cdot \vec{v}_{(i)}(t) \quad (10.6)$$

という結果が出る。

領域内の場所  $\vec{X}_{(i)}(t)$  にある電荷  $Q_{(i)}$  には、その時刻のその場所の電場  $\vec{E}(t, \vec{X}_{(i)}(t))$  を掛けた力が加わる。電荷は単位時間に  $\vec{v}_{(i)}(t)$  だけ移動するので、その間に電荷に対して  $Q_{(i)} \vec{E}(t, \vec{X}_{(i)}(t)) \cdot \vec{v}_{(i)}(t)$  の仕事がされる<sup>†1</sup>。その仕事をしたのは電磁場なので、電磁場のエネルギーが減る<sup>†2</sup>。

(10.4)の左辺は「エネルギーの単位時間あたりの変化」なので、この式はまさに「電場が仕事をすればその分電磁場のエネルギーが減る」を表現している。

右辺第2項は仕事とは別のエネルギーの増減を示している。この式と連続の

式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}$  ( $\rho$ の減少はカレント  $\vec{j}$ の流れ出し) を見比べることにより、 $\frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$  を「電磁場のエネルギーの流れ出し」と解釈することができる。

<sup>†1</sup> 電荷を持っている粒子の運動エネルギー  $\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$  を時間微分すると、 $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  となる。

今の場合  $\vec{F} = q\vec{E}$  だから  $q\vec{E} \cdot \vec{v}$  は荷電粒子の運動エネルギーの単位時間あたりの増加になっている。

<sup>†2</sup> 念の為力学の復習。エネルギーとはそもそも「仕事をしたらそれだけ減り、仕事をされたらそれだけ増える」ように定義された物理量である。別の言い方をすれば「仕事はエネルギーの流量」というのが「エネルギーの定義」である（熱力学的現象では「熱」もエネルギーの流量となる）。

## 10.1.2 4次元テンソルの表現に直す

電磁場に関する計算は、テンソルを使って Lorentz 対称性が明白な形で行ったほうが楽になることが多い。というわけで、ここから電磁場のエネルギーと運動量をテンソルの形で表現していこう。

エネルギー密度(10.1)は(電場)<sup>2</sup>+(磁場)<sup>2</sup>の形をしている。 $F_{\mu\nu}$ の形(9.20)または(9.21)を見ると、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  という計算をすると出てくるように思えるかもしれない。<sup>→ p192</sup>しかし、実際計算してみると、

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{2}{c^2}E^iE^i + 2B^iB^i \quad (10.7)$$

となって符号が合わない<sup>†3</sup> (自乗するため、符号因子 + は出ず、電場の前の係数は常にマイナス、磁場の前の係数は常にプラスである)。

そこで、(電場)<sup>2</sup>を表す式として、 $F_{0\mu}F^{0\mu} = -\frac{1}{c^2}E^iE^i$  を持ってきて、これの-4倍を足すことで

$$\begin{aligned} \frac{2}{c^2}|\vec{E}|^2 + 2|\vec{B}|^2 &= -4F_{0\mu}F^{0\mu} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad \left( \times \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} \left( = \frac{1}{4\mu_0} \right) \right) \\ \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2 &= \frac{1}{\mu_0} \left( -F_{0\mu}F^{0\mu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (10.8)$$

という量を作る。(10.4)の左辺はこれの時間微分である。右辺の第2項 $-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{B})$ を書き直すため、まずは $\vec{E} \times \vec{B}$ の $x$ 成分を考えると

$$\begin{aligned} [\vec{E} \times \vec{B}]^x &= \underbrace{(\vec{E})^y}_{+1\text{乗}} \underbrace{(\vec{B})^z}_{-1\text{乗}} - \underbrace{(\vec{E})^z}_{+1\text{乗}} \underbrace{(\vec{B})^y}_{-1\text{乗}} = -c(F_{02}F^{12} + F_{03}F^{13}) \\ &\quad \text{0になる量をあえて加える} \\ &= -c \left( \underbrace{F_{00}F^{10}}_0 + \underbrace{F_{01}F^{11}}_0 + F_{02}F^{12} + F_{03}F^{13} \right) = -cF_{0\mu}F^{1\mu} \end{aligned} \quad (10.9)$$

となる。 $y, z$ 成分も同様に考えて、さらに $\operatorname{div}$ を取って

$$-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{\mu_0} \partial_i (F_{0\mu}F^{i\mu}) \quad (10.10)$$

<sup>†3</sup> 電場の項の前にマイナス符号が出るのは、 $F_{0i}$ と $F^{0i}$ が逆符号の量だから。すべての項に因子2が出てくる理由は、たとえば $F_{12}F^{12}$ と $F_{21}F^{21}$ が両方出てくるから。

# 索引

- 4元運動量, 158  
4元加速度, 157  
4元速度, 155  
4元ベクトル (four-vector), 135
- advanced Green function(先進 Green 関数), 273
- comoving frame(共動系), 203  
contraction(縮約), 127  
contravariant vector(反変ベクトル), 126  
coordinate system(座標系), 11  
covariant(共変), 34  
covariant vector(共変ベクトル), 126
- dual(双対), 196
- $E = mc^2$ , 172
- Einstein convention(Einstein の規約), 30
- energy momentum tensor of electromagnetic field(電磁場のエネルギー運動量テンソル), 237
- Euclidean metric(ユークリッド計量), 122
- event(事象), 13
- four-vector(4元ベクトル), 135
- Galilean transformation(Galilei (ガリレイ) 変換), 16
- hyper surface(超表面), 14
- inertial frame(慣性系), 20
- kurodelta, 31
- light-cone(光円錐), 23
- line element(線素), 119
- Lorentz boost(Lorentz ブースト), 118
- Minkowski metric(Minkowski 計量), 121
- Minkowski space(Minkowski 空間), 117
- proper length(固有長さ), 86
- proper time(固有時), 123
- reference frame(基準系), 11
- rest length(静止長さ), 86
- retarded Green function(遅延 Green 関数), 273



- worldline(世界線), 18
- Einstein の規約 (Einstein convention), 30
- ウィルソンとウィルソンの実験, 53
- ウラシマ効果, 86, 88
- エーテル, 50
- Galilei (ガリレイ) 変換 (Galilean transformation), 16
- ガレージのパラドックス, 150
- 慣性系, 20
- 慣性系 (inertial frame), 20
- 基準系 (reference frame), 11
- 共動系 (comoving frame), 203
- 共変 (covariant), 34
- 共変ベクトル (covariant vector), 126
- クーロンゲージ, 229
- クロネッカー・デルタ, 31
- ゲージ変換, 228
- ケネディとソーンダイクの実験, 285
- 光円錐 (light-cone), 23
- コペルニクスの転換, 1
- 固有時 (proper time), 123
- 固有長さ (proper length), 86
- サールの思考実験, 63
- 座標系 (coordinate system), 11
- $\frac{4}{3}$  問題, 260
- 4元ベクトル, 135
- 事象 (event), 13
- 質量の増大, 164
- 縮約 (contraction), 127
- 静止長さ (rest length), 86
- 世界線 (worldline), 18
- 絶対空間, 1
- 先進 Green 関数 (advanced Green function), 273
- 線素 (line element), 119
- 双対 (dual), 196
- 速度の合成則, 100
- 縦質量, 166
- ダミーの添え字, 30
- 遅延 Green 関数 (retarded Green function), 273
- 超表面 (hyper surface), 14
- 電磁場のエネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor of electromagnetic field), 237
- 同時の相対性, 71
- 特殊相対性原理, 22
- ドップラー効果, 110
- 反変ベクトル (contravariant vector), 126
- フィゾーの実験, 53, 104
- 双子のパラドックス, 139
- フレネルの随伴係数, 54
- ベクトルポテンシャル, 187
- Hertz の方程式, 49
- Michelson-Morley の実験, 279
- Maxwell 方程式, 39
- Mach 原理, 23
- Minkowski 空間 (Minkowski space), 117
- Minkowski 計量 (Minkowski metric), 121
- ユークリッド計量 (Euclidean metric), 122
- 横質量, 166

4次元距離, 120

4元加速度, 157

4元速度, 155

4元電流密度, 197

4元ベクトル, 135

4元力, 162

Röntgen-Eichenwardの実験, 52

Lorentz ゲージ, 229

Lorentz 短縮, 283

Lorentz ブースト (Lorentz boost),  
118

Lorentz 変換, 66

Lorentz 力, 210

## 公式表

## 4元ベクトルポテンシャルの定義

convention	$A_\mu$	$A^\mu$	電場	磁場	$\pm$ <small>-10</small>	$\pm$ <small>-1010</small>	$\pm$ <small>-10101</small>
spacelike	$(-V/c, \vec{A})$	$(V/c, \vec{A})$	$\vec{E}^x/c = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1$	$[\vec{B}^z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$	+	+	+
timelike $A_\mu$ の空間成分が $\vec{A}$	$(-V/c, \vec{A})$	$(-V/c, -\vec{A})$	$\vec{E}^x/c = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1$	$[\vec{B}^z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$	-	+	-
timelike $A^\mu$ の空間成分が $\vec{A}$	$(V/c, -\vec{A})$	$(V/c, \vec{A})$	$\vec{E}^x/c = -\partial_1 A_0 + \partial_0 A_1$	$[\vec{B}^z = -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1$	-	-	+

## 電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow[\text{行列表示}]{\pm}_{-10101} \begin{bmatrix} 0 & -[\vec{E}^x/c & -[\vec{E}^y/c & -[\vec{E}^z/c \\ \vec{E}^x/c & 0 & [\vec{B}^z & -[\vec{B}^y \\ \vec{E}^y/c & -[\vec{B}^z & 0 & [\vec{B}^x \\ \vec{E}^z/c & [\vec{B}^y & -[\vec{B}^x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow[\text{行列表示}]{\pm}_{-10101} \begin{bmatrix} 0 & [\vec{E}^x/c & [\vec{E}^y/c & [\vec{E}^z/c \\ -[\vec{E}^x/c & 0 & [\vec{B}^z & -[\vec{B}^y \\ -[\vec{E}^y/c & -[\vec{B}^z & 0 & [\vec{B}^x \\ -[\vec{E}^z/c & [\vec{B}^y & -[\vec{B}^x & 0 \end{bmatrix}$$

## Maxwell 方程式

$$\partial_\mu \overbrace{F^{\mu\nu}}^{\pm}_{-10101} = \overbrace{-}_{-10101} \mu_0 j^\nu$$

## 一般の方向の Lorentz 変換

$\frac{\text{速度}}{c}$  が  $\vec{\beta}$  である方向に運動している系への Lorentz 変換の行列

$$\begin{bmatrix} \gamma & -[\vec{\beta}^x \gamma & -[\vec{\beta}^y \gamma & -[\vec{\beta}^z \gamma \\ -[\vec{\beta}^x \gamma & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^x [\vec{\beta}^x & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^x [\vec{\beta}^y & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^x [\vec{\beta}^z \\ -[\vec{\beta}^y \gamma & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^y [\vec{\beta}^x & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^y [\vec{\beta}^y & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^y [\vec{\beta}^z \\ -[\vec{\beta}^z \gamma & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^z [\vec{\beta}^x & \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^z [\vec{\beta}^y & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\vec{\beta}^z [\vec{\beta}^z \end{bmatrix}$$