

微分形式と物理

～古典力学・電磁気学から拘束系の量子論まで version3.2

琉球大学理学部 前野昌弘

2025年2月25日

目次

第0章	序	7
0.1	ここでやりたいこと	7
0.2	Notation	7
第1章	ベクトル・テンソルから微分形式へ	9
1.1	微分形式を使う意味—座標系によらない表現はえらい	9
1.2	ベクトルとは（いろいろな定義）	10
1.2.1	基底	10
1.2.2	微小変位と微分演算子	10
1.2.3	共変ベクトルと反変ベクトルの定義	14
1.3	外微分演算子と全微分（予告編）	17
1.4	2次元の直交座標と極座標の例	18
1.4.1	初等的なベクトル	18
1.4.2	共変／反変ベクトルを使う場合	20
1.5	斜交座標系	22
1.6	座標変換と dx の変化	24
1.7	微分演算子としてのベクトル	26
1.7.1	演算子 $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ の幾何学的意味	26
1.7.1.1	流れに沿った微分としての定義	26
1.7.1.2	微小な座標変換による定義	27
1.7.2	ベクトル場と積分曲線	27
1.7.3	ベクトル場の例	28
1.7.4	数学的表現としてのベクトル	30
1.8	接ベクトル	33
1.9	n -form	36
1.9.1	0-form とその微分の結果の 1-form	36
1.9.2	ベクトルと 1-form の基底：2次元極座標の例	37
1.9.3	1-form の積分	38
1.10	2-form	39
1.10.1	平面の面積を表現する量	39
1.10.2	空間内の面積を表現する 2-form	42
1.10.3	一般の 2-form	43
1.11	3-form、そして n -form	45

1.12	外微分	46
1.13	内部積	49
1.14	1-form の積分と Stokes の定理	50
1.14.1	Stokes の定理 (1-form 版)	51
1.14.2	closed な 1-form の積分は経路によらない	53
1.15	複素積分と微分形式	54
1.16	2-form の積分 (面積分) と 1-form の外微分	57
1.16.1	n -form に対する Stokes の定理	58
1.17	Levi-Civita 記号と Hodge dual	59
1.17.1	Hodge dual の心	59
1.17.2	2 次元と 3 次元の Levi-Civita 記号	60
1.17.3	任意の時空での Levi-Civita 記号	60
1.18	Hodge dual	63
1.19	余微分	67
1.20	Lie 微分	68
1.20.1	スカラーに対して	68
1.20.2	ベクトル場に対する Lie 微分	69
1.20.3	1-form に対する Lie 微分	69
1.20.4	Lie 微分と外微分の関係	70
1.21	共変微分について	71
1.21.1	一般相対論の共変微分	71
1.21.2	電磁気学および Yang-Mills 場における共変微分	73
第 2 章	微分形式で語る電磁気学	75
2.1	3 次元空間の静電場	75
2.1.1	電場は 1-form	75
2.1.2	E は 1-form だが、 D は 2-form	76
2.2	3 次元空間の静磁場	77
2.2.1	H は 1-form だが、 B は 2-form	78
2.2.2	電流密度は 2-form	81
2.2.3	$\text{d}H = j$ とグリーン関数	82
2.2.4	ベクトルポテンシャルの導入	85
2.3	4 次元への移行	87
2.4	電磁場の Lorentz 変換	91
2.4.1	ベクトル、テンソル、form のローレンツ変換	91
2.4.2	Lorentz 変換に関するパラドックス	94
2.4.3	「運動する磁場」は電場を伴う	95
2.4.4	電流の作る磁場の式を Lorentz 変換で出す	98

2.5	<i>F</i> .. から作られるスカラー ······	98
第3章	微分形式で語る一般相対論 ······	100
3.1	共変微分と平行移動 ······	100
3.2	曲率 ······	101
3.2.1	リーマン曲率 ······	101
3.2.2	リッチ曲率とスカラー曲率 ······	104
3.3	微分形式による曲がった時空の表現 ······	107
3.3.1	多脚場 1-form ······	107
3.3.2	局所ローレンツ座標系のベクトルの共変微分 ······	108
3.3.3	局所ローレンツ座標のベクトルで計算する曲率 ······	112
3.3.4	球対称定常な 3+1 次元時空 ······	115
第4章	正準形式の力学 ······	119
4.1	正準形式は何が嬉しい? ······	119
4.1.1	よくある間違い: 独立変数に関する教訓 ······	119
4.2	シンプレクティック形式への準備 ······	121
4.3	シンプレクティック形式と Poisson 括弧 ······	122
4.3.1	ヤコビ恒等式 ······	126
4.4	正準変換 ······	129
4.5	正準変換の例 ······	130
4.5.1	点変換 ······	130
4.5.2	座標と運動量の交換 ······	131
4.5.3	調和振動子の角変数 ······	132
4.6	調和振動子のエネルギーを上げる演算子 ······	133
4.7	正準変換の母関数 ······	134
4.7.1	q, Q を独立変数とする ······	134
4.7.2	p, Q を独立変数とする ······	134
4.7.3	q, P を独立変数とする ······	135
4.7.4	p, P を独立変数とする ······	136
4.8	熱力学 ······	137
4.8.1	完全な熱力学関数の全微分 ······	137
4.8.2	熱力学的状態空間における 2-form ······	137
4.8.3	熱力学第 2 法則は何をする? ······	139
第5章	拘束系の古典力学 ······	140
5.1	古典力学の拘束系の単純な例—定滑車 ······	140
5.1.1	初等力学で ······	140
5.1.2	初等力学で少し小賢しいことを考えると ······	140
5.1.3	ラグランジュ形式で ······	141

5.1.3.1	張力が出てくるようにラグランジアンを変更する	142
5.1.3.2	拘束条件が加わるようになる	143
5.1.4	ハミルトン形式	143
5.1.5	拘束系のハミルトン形式に関する注意	145
5.1.6	位相空間を縮小する	145
5.2	Dirac 括弧	149
5.2.1	拘束された空間への射影	149
5.2.2	Dirac 括弧の定義	150
5.2.3	symplectic form	151
5.3	古典力学を Dirac 括弧を使って解く例	152
5.3.1	定滑車	152
5.3.2	円周上に拘束された質点	156
5.4	光円錐時間の場の理論と拘束系	158
第 6 章	グラスマン奇座標の正準形式	164
6.1	グラスマン偶奇性	164
6.2	左微分と右微分	165
6.3	グラスマン奇座標の調和振動子の例	167
6.4	グラスマン偶奇が混ざっているときの Poisson 括弧	169
6.5	フェルミオンの系	172
第 7 章	冗長系とゲージ理論	174
7.1	冗長系	174
7.1.1	ものすごく簡単な冗長系	174
7.1.2	少しだけややこしい冗長系	177
7.2	相対論的粒子	179
7.2.1	作用とその不变性	179
7.2.2	ハミルトン形式	181
7.2.3	電磁場中の相対論的粒子	182
7.3	球面上に拘束された質点	183
7.3.1	2nd-class を付け加える場合	183
7.3.2	動径方向の運動エネルギーが入らないようにする	185
7.3.3	もう一つ、ほぼ自明な冗長系	188
7.4	電磁場の正準形式	190
7.4.1	作用と不变性	190
7.4.2	正準形式	190
7.4.3	拘束ゲージ変換の generator	191
第 8 章	経路積分による量子化と拘束系	193
8.1	古典論と量子論の違い	193

8.2	量子力学的状態を表すための基底	195
8.3	演算子形式から経路積分の導出	197
8.4	拘束系の経路積分	200
第 9 章	微分形式としてのゴースト場と BV 形式	202
9.1	ゴースト場の導入	202
9.2	物理的状態への条件	204
9.3	ゲージ条件の導入：失敗例	206
9.4	BFV 形式	207
9.4.1	BFV によるゲージ固定	207
9.4.2	中西・Lautrup 場と反ゴーストの導入	208
9.5	例	209
9.5.1	ものすごく簡単な冗長系	209
9.5.2	電磁場	211
第 10 章	終わりに	214
10.1	最初に公開したときの「終わりに」	214
10.2	ヴァージョン 2 の「終わりに」	214
10.3	ヴァージョン 3 の「終わりに」	214

第0章 序

0.1 ここでやりたいこと

本講義で目標としたことは二つある。



- 微分形式を使って物理を表現すること
- 拘束がある系の物理を考えること

実は最初の目標は拘束系の方だったのだが、準備しているうちに「せっかくだから微分形式の話をしっかりやっとう」と思った結果、目標が二つあることになった。目標を一個にしぶらなかつたのは、戦略的にはよくないかもしれないが、結果としては微分形式の部分が随分分厚くなつた。

微分形式は学部レベルの物理ではあまり使われることがないのだが、これを使うことで力学（特に解析力学）、電磁気学（これはゲージ理論の有用な例でもある）、熱力学などが簡素な形で書けるので、非常に有用である。もっと使えばいいのに、と前々から思っていた。

拘束のある系の物理は、素粒子理論や重力理論をやると「ゲージ理論」がまさにそれなので大変重要である。別に素粒子をやらなかつたとしても、いろんな状況で「拘束のある系」の話は出てくる。ところがだいたいの大学の学部レベルの解析力学ではそこまでやっている余裕がない。それどころか、ハミルトン形式のつっこんだ部分（正準変換とかハミルトン・ヤコビ方程式とか）のあたりもかなりすっ飛ばしていることが多いだろう（正準変換のあたりは、微分形式が活躍できる場所でもある）。しかし量子論とのつながりを考えると正準変換の話は結構重要なのだ。

というわけで、微分形式と拘束系を二つの話題として物理一般の話をして、最終目標としては「ゲージ場の量子論」を語るのが本講義の目標である。

予防線を張っておくが、ここで展開するのは「物理の話」である。よって数学的に厳密な取扱をしないことも多い。数学屋さんから見れば「こんなの証明になってないよ」と言われる部分が多々あると思う。

0.2 Notation

まず、3次元空間の話から3+1次元時空の話へとつなげるときにギャップが少ないように、計量は $(-, +, +, +)$ (spacelikeな方向の符号が正) を採用する（素粒子物理では $(+, -, -, -)$ であること

が多い)。

本講義では、関数の引数などに $x^1, x^2, x^3, \dots, x^N$ と書きたいときに $\{x^i\}$ と書くことにする。つまり、 x^i の全ての成分の列挙が $\{x^i\}$ である。3次元空間では、 \vec{x} で x^1, x^2, x^3 をまとめて表現する便利な記法があるので、それを使うこともある。

「Einstein の規約」として知られるルール「同じ添字が繰り返されたときはその添字に関して和が取られている（「足し上げる」と表現する）ものとする」を本講義でも使う。さらに本講義のみの約束として、足し上げられる添字は文字の色を変え、さらに線でつなぐ。 $\textcolor{blue}{i}$ と i (あるいは $\textcolor{blue}{i}$ と i) のようなつながれた添字 i のペアを見たら、「足し上げられるのだな」と理解してくれるとよい。

具体的には

$$\overbrace{\sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3}^{\substack{\text{省略なしの表現} \\ \text{よく使われる表現} \\ \text{本講義での表現}}}$$
$$A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$
$$A_{\textcolor{blue}{\mu}} B^{\textcolor{blue}{\mu}} = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

である。なお足し上げる添字の範囲（上の例では 0 から 3）は文脈で判断する。多くの本がそうやっているように、英字 i, j, \dots の添字は 1 から 3、ギリシャ文字 $\mu, \nu, \rho, \lambda, \dots$ の添字は 0 から 3 であることが多い（例外あり）。

こういう「色を使った表現」も本とかでどんどんやればいいのにな、と思っていることの一つ（うざい、という声もあるが）。

第1章 ベクトル・テンソルから微分形式へ

1.1 微分形式を使う意味—座標系によらない表現はえらい

この章では微分形式の表現方法を使って（初等的な物理ではベクトル解析を使って表現される）物理量を表現する手法について述べる。微分形式を使いたい理由は「できる限り物理を<座標系によらない形>で記述したい」である。物理の世界では、「座標に依存しない表現」の方がえらい。ざっくり言えば、「座標系に依存する表現」は「座標系に依存しない表現」より低級である。特に「いろんな座標を渡り歩いて計算する」必要がある場合に高級か低級かの差は効いてくる。

物理では座標系によらない量を「スカラー」と呼ぶ。極端な言い方をすれば、物理において観測できる量は常にスカラーである。と言うと「そんなことはない。運動量 \vec{p} の x 成分を我々は観測できるぞ」と思う人もいるかもしれないが、実はあれは「観測機の向きを表すベクトル $\vec{P}_{\text{観}}$ と運動量 \vec{p} との内積であるスカラー $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$ 」を観測しているのである。座標変換すると \vec{p} の成分は変わるし、 $\vec{P}_{\text{観}}$ の成分は変わる。しかし $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$ は変わらない^{†1}。 $\vec{P}_{\text{観}} \cdot \vec{p}$ は、「観測器のメーターの指す数字」に直結しているので、座標系が変わったら変わるものではない^{†2}。

運動量 \vec{p} は「観測機の向き」を一つ指定することで観測量が得られる量だと言える。同様に「観測機の面」を一つ指定することで観測量が得られる量もある（観測機としてアンテナを、観測量として電波のエネルギーを想像するとよい）。同様に体積を指定することで観測できる量も考えられるだろう。

我々が観測できる量としては「点で観測する量」「線で観測する量」「面で観測する量」「立体で観測する量」がある（3次元ならここで打ち止めだが、 N 次元ならもっと次が出てくる）。そこでこれらの量を常に「座標系に依存しない表現」で表現するのが<微分形式の心>である。

まずは比較的知られているものと関係から言うと、微分形式のうち、0-form と呼ばれる量がスカラー（点で観測する量）の一般化、1-form と呼ばれる量がベクトル（線で観測する量）の一般化だと思っておけばよい。スカラーやベクトルよりもっと複雑なものとして、2-form や 3-form が出てくる（すでにわかっていると思うが、2-form が「面で観測する量」、3-form が「立体で観測する量」である）。そこで、まずよく知っている（と思う）「ベクトル」について考えることから始めよう。

^{†1} このあたりは、量子力学で観測できるのは二つの状態で演算子を挟んだ量 $\langle \psi | \hat{O} | \phi \rangle$ だけであって、 $\langle \psi |$ も $|\phi \rangle$ も、演算子 \hat{O} も直接観測できない、のと同じ状況である。物理にはしばしば「我々が<なんとか方程式>を使って計算している量」と、「我々が測れる量」との間に剥離がある状況が出現する。

^{†2} 相対論での「時間の相対性」の話で、「固有時は座標系によらない」のも同じ話で、「固有時」を「観測者がついている腕時計の指している数字」と考えれば、そんなものが座標系によって変わるはずがない。

1.2 ベクトルとは（いろいろな定義）

大学以上の物理と数学では、「ベクトル」の定義が流儀と分野に応じてたくさん現れて困ってしまう。

高校数学的^{†3}な意味での「ベクトル」の定義は「向き^{†4}と大きさのある量」となる。図形的表現としては「矢印」である。これはある意味「もっとも範囲をせまく定義した『ベクトル』の定義」と言えるだろう。

おそらくはもっとも意味が広い「ベクトル」という言葉の定義は「足し算と定数倍が定義されている量はなんでもベクトル」というものだ。線形代数での「ベクトル」はこれで、定義が広いものだから単なる実数もベクトルであるし、行列もベクトルであるし、関数もベクトルである。

1.2.1 基底

足し算と定数倍（この二つをあわせたものを「線形結合」と呼ぶ）ができるものがベクトルだとすると、逆に任意のベクトルは「基底」と呼ばれる基本的なベクトルの線形結合で書ける。たとえば我々がベクトルと言われて最初に思い浮かべる3次元のベクトルは $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ のように「基底 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ に係数 A_x, A_y, A_z を掛けて足したもの（線形結合）」で表現できる^{†5}。もっと複雑な例だと、波動関数^{†6}がそれぞれのエネルギー固有状態の線形結合で書ける（ $\psi(x, t) = \sum_E \phi_E(x) e^{-iEt}$ のように^{†7}）ので、これもベクトルである。

同じベクトルであっても、どのような基底のセットを持ってきて表現するかにより見かけは違う。しかし物理的内容はそのような表現に関係ないものとして存在しているはずである。

1.2.2 微小変位と微分演算子

物理屋でも相対論屋（およびこれに近い人）の使う「ベクトル」は、「座標変換に伴って<ある種>の変換を受ける量」である。具体的には

$\left\{ \begin{array}{l} \text{「微分演算子 } \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ と同じ変換を受ける量」が共変ベクトル} \\ \text{「座標の微小変位 } dx^\mu \text{ と同じ変換を受ける量」が反変ベクトル} \end{array} \right.$

である^{†8}。この「共変ベクトル・反変ベクトル」は、この章で説明したい「微分演算子としてのベ

^{†3} 今はベクトルは数学Cに入っているそうである。かなり基本的な概念のはずなんだが。

^{†4} 高校物理のベクトルの向きは、暗黙のうちに3次元空間内の「向き」である（一般的にはそうとは限らない）。

^{†5} この $= A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ は「座標系に依らない表現」になっている。座標変換したときに $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ の方がうまい感じで変換されなければ、 \vec{A} 全体は不变だからである。ベクトルを (A_x, A_y, A_z) のように書いてしまうと座標系依存する量になってしまふ。だから「座標系に依存しない」ことだけが目標なら、「さぼらずに基底をちゃんと書く（そして基底も座標変換されることを忘れない）」だけでもある程度目標を達成する。さらに、基底の選び方を座標変換に有利なようにしておくともっとよい（この後でやる）。

^{†6} 波動関数は足し算と定数倍ができるから、立派な「ベクトル」である。

^{†7} 本講義では、関数の引数を示す括弧は $f(x)$ のように薄く書いて、四則の順番を表すための括弧とは区別する。

^{†8} なんとなく dx^μ の方が基本的な量のような気がするので dx^μ と同じ方が「反変」であることに戸惑うかもしれないが、微分演算子の方が本質的とする考え方をするようである。

クトル」と「1-form」の「成分」になる。これらの変換則の中には局所的に定義される量しか出てこない点に注意^{†9}。

座標変換 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})$ —新しい座標 \tilde{x} が古い座標 x の関数として与えられている座標変換—を考えよう (馴染みのある例は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換である)。この逆変換は $\tilde{x}^\mu \rightarrow x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})$ と書くこととする^{†10}。

座標変換による変換を考えると、微分の連鎖律 (chain rule) からくる関係

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu(\{x^\cdot\})}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad \text{およびこの逆} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.2-1)$$

と、および

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\nu \quad \text{およびこの逆} \quad d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.2-2)$$

がわかる。



お馴染みの例であるところの「直交座標→極座標」(x^μ が (x, y) で \tilde{x}^μ が (r, θ)) で書いておくと、(1.2-1) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} & \text{およびこの逆} & \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} & & \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2-3)$$

であり、(1.2-2) は、

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta & \text{およびこの逆} & dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta & & d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (1.2-4)$$

となる。

これを計算するには偏微分係数を合計 8 個計算しないといけない。よくある間違いで $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}$ とやっちゃうことがある (これが成り立つならば計算するものが 4 個で済む) が、偏微分でこれはない。

$x = r \cos \theta$ の全微分を作ると

$$dx = \underbrace{dr \cos \theta}_{\frac{\partial x}{\partial r}} - \underbrace{r \sin \theta d\theta}_{\frac{\partial x}{\partial \theta}} \quad (1.2-5)$$

†9 「矢印」としてのベクトルの代表例である「位置ベクトル」はその「位置」と「原点」という二つの点が定義に必要になるので、ここで考えている「ベクトル」ではない。

†10 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})$ の中の $\tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})$ の \tilde{x}^μ は「 $\{x^\cdot\}$ の関数」であり、 $\tilde{x}^\mu \rightarrow x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})$ の方の \tilde{x}^μ は一つの変数である (示している内容は同じ)。物理では同じ内容の量には同じ文字を使うのが普通だが、本来は独立な変数と他の独立な変数の関数は別物であり、「どれが変数か」は認識しておいた方がよい。本講義では関数を表す括弧 () の有無で区別することにする (混乱の恐れがないときには括弧を省略することもあるが、そのときは文脈を読んでほしい)。

が出てくるので $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}$ が読み取れる。同様に $y = r \sin \theta$ の全微分

$$dy = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\frac{\partial y}{\partial r}} dr + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{\frac{\partial y}{\partial \theta}} d\theta \quad (1.2-6)$$

から $\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}$ が読み取れる。

次に $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ から

$$dr = d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x dx + 2y dy}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx}_{\cos \theta} + \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy}_{\sin \theta} \quad (1.2-7)$$

から $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ が読み取れる。

残った $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ の計算だけがちょっと面倒に思えるかもしれないが、これは $y = x \tan \theta$ の両辺の微分を行って、式

$$dy = dx \tan \theta + x \underbrace{\frac{1}{\cos^2 \theta}}_{\frac{r}{\cos \theta}} d\theta \quad (1.2-8)$$

を作ってから両辺に $\cos \theta$ を掛けて、

$$\cos \theta dy = dx \sin \theta + r d\theta \quad (1.2-9)$$

と考えると割と早く

$$d\theta = -\underbrace{\frac{\sin \theta}{r} dx}_{\frac{\partial \theta}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\cos \theta}{r} dy}_{\frac{\partial \theta}{\partial y}} \quad (1.2-10)$$

が出てくる。

ここで現れた変換を表現する $\frac{\partial *^\mu}{\partial *^\nu}$ の間には関係

$$\underbrace{\frac{\partial x^\nu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^\mu}}_{\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})} \frac{\partial \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})}{\partial x^\rho} = \delta^\nu_\rho \quad \text{または} \quad \underbrace{\frac{\partial x^\nu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^\mu}}_{x^\mu = x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})} \frac{\partial \tilde{x}^\mu(\{x^\cdot\})}{\partial x^\rho} = \delta^\nu_\rho \quad (1.2-11)$$

がある（左はすべて $\{x^\cdot\}$ で表した式、右はすべて $\{\tilde{x}^\cdot\}$ で表した式になっている）。

$\frac{\partial *^\mu}{\partial *^\nu}$ を $*^\mu_\nu$ のように行列 $\begin{cases} \text{上付きの足が行} \\ \text{下付きの足が列} \end{cases}$ と考えたとき、 $\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}$ と $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ の二つの行列は互いに逆行列である。

†11 $\theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$ を微分するところから真面目にやる人が多いんだけど、それはしんどい。



「直交座標→極座標」(x^μ が (x, y) で \tilde{x}^μ が (r, θ)) の例では、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (1.2-12)$$

とまとまるので、 $\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}$ にあたる行列が $\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ で、 $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho}$ にあたる行列の転置が $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}$ となる。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-13)$$

となって、確かに互いに逆行列である。



【問い合わせ 1-1】 3 次元極座標の変換式

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2-14)$$

および

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = z \tan \theta, \quad y = x \tan \phi \quad (1.2-15)$$

を微分することによって、 $\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ の関係を表す行列を求め、逆変換が互いに逆行列で表せることを確認せよ。

$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$ を M^μ_{ν} と書くことにしよう。 $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ は $(M^{-1})^\mu_{\nu}$ である。

こうすると $\begin{cases} \stackrel{\rightarrow p11}{(1.2-1) \text{の微分の変換の式}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu(\{x\})}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \\ \stackrel{\rightarrow p11}{(1.2-2) \text{の微小変位の変換の式}} dx^\mu = \frac{\partial x^\mu(\{\tilde{x}\})}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\nu \end{cases}$ は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu(\{x\})}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} = ((M^{-1})^\top)_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (1.2-16)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu(\{\tilde{x}\})}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\nu \rightarrow dx^\mu = M^\mu_{\nu} d\tilde{x}^\nu \quad (1.2-17)$$

と表現される。



微分の変換の式と微小変位の変換の式で現れる行列は「転置すると互いに逆行列」である^{†12}。

転置が必要なのは二つの式で足し上げられている添字 ν の位置が違うためである。



「直交座標→極座標」(x^μ が (x, y) で \tilde{x}^μ が (r, θ)) の例では、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (1.2-18)$$

であり、たしかに二つの行列は「転置すると逆行列」になっている。

1.2.3 共変ベクトルと反変ベクトルの定義

微分演算子と微小変位の座標変換がわかったので、この変換を使って「共変ベクトル」「反変ベクトル」を定義する。

「共変ベクトル」と呼ばれるベクトルは、この微分演算子と同じ変換をする。定義は以下の通り。

定義 1: 共変ベクトルの定義

座標変換 $\{x^\cdot\} \rightarrow \{\tilde{x}^\cdot\}$ において

$$\tilde{A}_{\tilde{\mu}}(\{\tilde{x}^\cdot\}) = \frac{\partial x^\nu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \underbrace{A_\nu(\{x^\cdot\})}_{x^\mu = x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})} \quad (1.2-19)$$

のように変換する量を「共変ベクトル」と呼ぶ^{†13}。

共変ベクトルのある意味自明な例は $A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi$ (ϕ はスカラー量) である。以下がまさに微分の chain rule により導かれる。

$$\partial_{\tilde{\mu}} \phi(\{\tilde{x}^\cdot\}) = \frac{\partial x^\nu(\{\tilde{x}^\cdot\})}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \underbrace{\partial_\nu \phi(\{x^\cdot\})}_{x^\mu = x^\mu(\{\tilde{x}^\cdot\})} \quad (1.2-20)$$

順番が逆になったが、スカラーの定義は以下の通り。

^{†12} よって、変換行列が直交行列 ($\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^\top$) である行列の場合、二つの変換は等しくなる。よって、直交座標から直交座標への変換で共変ベクトルと反変ベクトルには区別がない。

^{†13} x^μ 座標系での A_μ と \tilde{x}^μ 座標系での $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}$ を変数と添字に \sim をつけることで区別している。物理屋はだいたい記号をいちいち変える手間を惜しむので、座標系が変わって式の表現する内容が変わっても、文字を変えたりしないことが多い(ここではおせっかいをすることにした)。

定義 2: スカラーの定義

座標変換 $\{x^i\} \rightarrow \{\tilde{x}^i\}$ において

$$\tilde{\phi}(\{\tilde{x}^i\}) = \underbrace{\phi(\{x^i\})}_{x^\mu = x^\mu(\{\tilde{x}^i\})} \quad (1.2-21)$$

のように変換する量（変換しない量？）を「スカラー」と呼ぶ。

$\tilde{\phi}(\{\tilde{x}^i\})$ と $\phi(\{x^i\})$ は関数としては違う関数だが、代入操作によって同一となるので、同じ物理的内容を表現しているものである。

逆に「反変ベクトル」は以下のように定義される。

定義 3: 反変ベクトルの定義

座標変換 $\{x^i\} \rightarrow \{\tilde{x}^i\}$ において

$$\tilde{A}^{\tilde{\mu}}(\{\tilde{x}^i\}) = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}(\{x^i\})}{\partial x^{\nu}}}_{x^\mu = x^\mu(\{\tilde{x}^i\})} A^{\nu}(\{x^i\}) \quad (1.2-22)$$

のように（つまり、 dx^μ のように）変換するベクトルを「反変ベクトル」と呼ぶ。

反変ベクトルの自明な例は dx^μ そのものだが、たとえば速度 $\frac{dx^\mu}{dt}$ も同様に反変ベクトルである。

ここで「ベクトルには共変ベクトルと反変ベクトルがある」話をしてきたが、これはこの世界にあるベクトルが 2 種類に分類されるということではない。ベクトルである物理量を表現するときに 2 種類の方法がある（これ以外にもある）だけのことである（共変ベクトルを反変ベクトルに、あるいはこの逆を行う操作が存在する）。物理的実体^{†14}は一つだが、それをどう表現するかが違うだけである。



矢印としてのベクトルの代表例である位置ベクトルは、共変ベクトルでも反変ベクトルでもない。どちらの変換にも属さないので。直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への座標変換

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

は、上の変換則のどちらにも従わない^{†15}。

一例としては、運動量は $m \frac{dx^i}{dt}$ と書いたときは反変ベクトルであるが^{†16}、量子力学で $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$ と

†14 「実体」の意味は何？—と突っ込まれると困ってしまう。正直に言えば、ここで使っている「実体」という言葉の意味は「表現の仕方に依存しない量」である。

†15 難しい例を出さずとも、1 次元の座標変換 $\tilde{x} = x^2$ ですら（この場合 $\frac{\partial \tilde{x}(x)}{\partial x} = 2x$ ）、座標そのものの変換 $x \rightarrow \tilde{x}$ は共変ベクトルの変換でも反変ベクトルの変換でもない。共変ベクトルなら $\frac{1}{2x}$ が、反変ベクトルなら $2x$ が掛けられる変換則を満たすはずなのだから。

†16 解析力学での運動量の定義 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ は共変ベクトルになる。

書いたときは^{†17}共変ベクトルである。しかしこの二つは計量テンソルを使って変換可能である。

〔〕 「計量テンソル」について補足。我々が考えている時空においては、座標が $\{x^i\}$ である点と座標が $\{x^i + dx^i\}$ である点の間の距離を ds と書くことにしたとき、その自乗が

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2-23)$$

のように 2 次形式で計算できる。たとえば通常の 3 次元ユークリッド空間なら、

$$ds^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{直交座標}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{\text{極座標}} \quad (1.2-24)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.2-25)$$

である。 ds^2 は「距離の自乗」という座標によらない量なので、(1.2-23)の右辺が不变量となるためには、
→ p16

$$\tilde{g}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (1.2-26)$$

が $g_{\mu\nu}$ の変換則になる(2 階の共変テンソルである)。この $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列である $g^{\mu\nu}$ を使って、「共変ベクトルを反変ベクトルに翻訳 $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ 」したり、「反変ベクトルを共変ベクトルに翻訳 $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ 」したりできる。

この「翻訳ルール」からわかるように、 $g_{\mu\nu}$ が単位行列の場合、共変ベクトルと反変ベクトルには何の差もない(だから直交座標を使っているときには反変/共変を気にしない)。

共変ベクトルと反変ベクトルの縮約を取った量 $A_\mu B^\mu$ は(それぞれの変換の行列が「転置する」と逆行列」になっているおかげで)不变量になる。

同様にして、反変ベクトルと微分演算子の内積 $A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 、および、共変ベクトルと微小変位の内積 $A_\mu dx^\mu$ は「座標変換の不变量」となることはすぐにわかる。

†17 量子力学の話をすると演算子の順序の問題が結構ややこしいのだが、ここはその心配をするところではない。

1.3 外微分演算子と全微分（予告編）

dx^μ の変換行列と $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の変換行列に関係「一方を転置すると互いに逆行列」があるがゆえに、組合せ $dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は

$$dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = d\tilde{x}^\nu \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}}_{\delta^\mu_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = d\tilde{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (1.3-1)$$

となって、「座標変換しても変わらない演算」になる。そこでこれを以下の記号で定義しておくことにする。後で出てくる「外微分」という微分で使う演算子である（外微分という概念の詳しい定義は後で）。

定義 4: 外微分演算子（定義の一部）

$$\text{d.} = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.3-2)$$

後でこの記号は少しだけ修正して、外微分演算子と呼ぶことになる^{†18}。 d. は座標系によらない定義になっている。「関数 x^μ 」に d. を掛けた結果であるところの $\text{d.}x^\mu$ の計算結果は dx^μ になる（上の式に代入してみよ）^{†19}。

関数にこの記号で表される微分演算子を掛けたもの

$$\text{d.}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (1.3-3)$$

は「 f の全微分」である（全微分は座標系によらない操作である）。全微分はむしろ、

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \text{d.}f(x, y) + \dots \quad (1.3-4)$$

のように「多変数関数をテイラー展開したときの 1 次の項」（ $+\dots$ の部分には dx, dy の 2 次以上が入る）と表現した方が見慣れた形に近いだろう。

「2 次以上を捨てる」操作は 2 変数関数を曲面として表現したときの「曲がりを捨てる」操作なので、曲面を平面と近似する操作に等しい。この「曲がり（2 次以上）を無視した平面」を「接平面」と呼ぶ（3 次元以上だと「接空間」となる）。

念の為に注意しておく。ここでは、この関数 f は全微分可能なものとしているが、いつでも可能ではない。

†18 本講義の書き方では、 d. に添字の \cdot を付ける。この意味は後で明らかになる。

†19 細かいことを気にせず、 d も d. も全部 d で書いちゃう人が多いが、そういうのは文脈でなんとか判断できるでしょう、というのが通常の立場である。

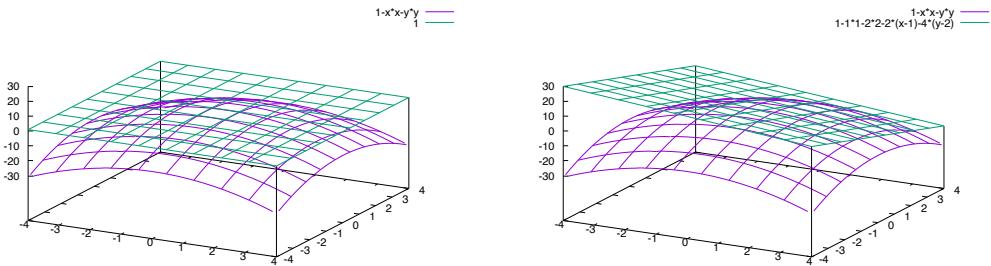


図 1-1 関数 $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ の、原点と $(1, 2)$ での接平面

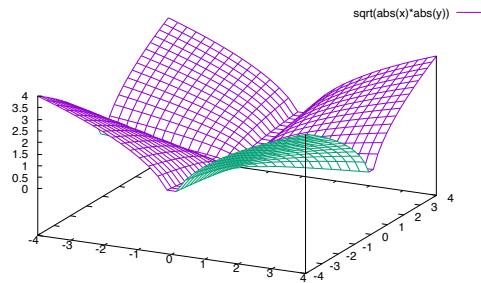


図 1-2 全微分不可能な例

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

上の式 (1.3-3) はある点 (a, b) の近傍において $f(x, y)$ が

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x, y=a, b} (x - a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x, y=a, b} (y - b) + \dots \quad (1.3-5)$$

のように近似できる（接平面が描ける）場合の式である（接点からのずれ $x - a, y - b$ の替りに使われるのが dx, dy になる）。そういう「線形近似」を許さないような「尖った関数」は「尖った点」（つまり偏微分係数が連続でなくなっている点で図 1-2 の場合、 x 軸上と y 軸上）において全微分可能にならない。

1.4 2 次元の直交座標と極座標の例

➡ 共変ベクトル・反変ベクトルと（大学初年度程度で使う）普通のベクトルとの違いを、直交座標と極座標の例で確認しよう。

1.4.1 初等的なベクトル

まず、初等的なベクトルの書き方について復習しよう。もっと初等的な書き方としては、どのような基底を使っているかを明示せずに $[A_x \ A_y]$ とか $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$ などと書く方法であろう。これは「 x 成

分が A_x 、 y 成分が A_y 」を省略形で表記したものである。

基底を明示するならば、に $[A_x \ A_y]$ は $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$ のように、 x 軸正の向き単位ベクトル \vec{e}_x と y 軸正の向き単位ベクトル \vec{e}_y を使って書く。

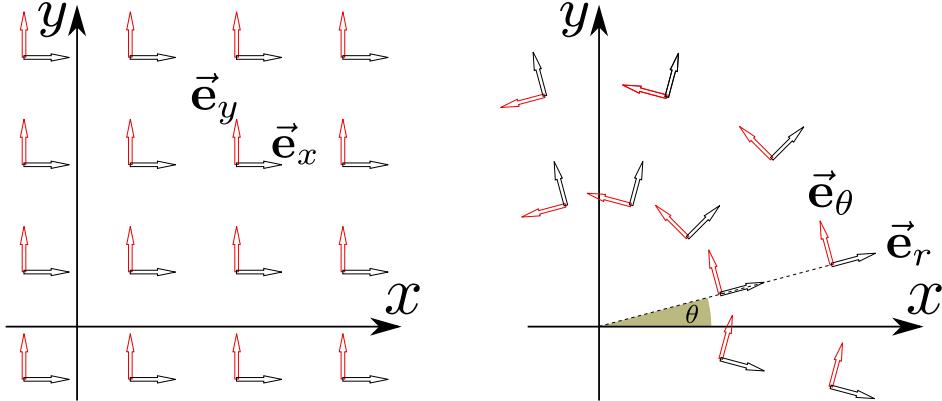


図 1-3 \vec{e}_x, \vec{e}_y と $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$

これは（暗黙のうちに）直交座標を使ったからであるが、2次元平面を表現する座標は他にもある。よく使われるのは極座標だが、極座標でベクトルを表現するときには、2次元ベクトルを図

1-3 に示した $\begin{cases} x \text{ 方向, } y \text{ 方向を向いた単位ベクトル } \vec{e}_x, \vec{e}_y \\ r \text{ 方向, } \theta \text{ 方向を向いた単位ベクトル } \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \end{cases}$ を基底として

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta \quad (1.4-1)$$

のように表現する^{†20}ことができる。初等的な物理の本ではこれを使っている。

基底ベクトルを $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ にしてベクトルを展開したときの係数にあたる 2 成分を A_r, A_θ とした。ここで A_r, A_θ と書かないので、後で出てくる、ちゃんと共変ベクトルの成分になっている量を A_r, A_θ と呼びたいからである^{†21}。 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ を使った表現は、基底ベクトルの長さを 1 にする慣習^{†22}に従っているのだが、座標変換を繰り返す場合は、この慣習「基底ベクトルの長さは 1」にこだわらない方がいい。

この成分 (A_r, A_θ) は、共変ベクトルでも反変ベクトルでもない。変換則が合わないのである。

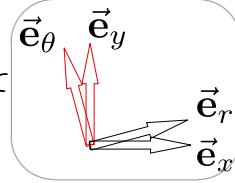
変換則が合わないことを確認するために、 $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$ の変換が $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ の変換とも違うことを確認しよう。

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (1.4-2)$$

^{†20} 基底ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ は場所によって違う方向を向いているので、厳密には $\vec{e}_r(\theta), \vec{e}_\theta(\theta)$ と書くべきである。

^{†21} 実は A_r の方は A_r と等しいので変える必要はない。

^{†22} この慣習は、ベクトルの「長さ」の情報を成分の方に集めるという意味では理にかなっている。



が基底ベクトルの変換であることは、図 1-3 を見て

せる。

これを代入することで、

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_{(r)}\vec{e}_r + A_{(\theta)}\vec{e}_\theta = A_{(r)}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) + A_{(\theta)}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \\ &= \underbrace{(A_{(r)}\cos\theta - A_{(\theta)}\sin\theta)}_{A_x}\vec{e}_x + \underbrace{(A_{(r)}\sin\theta + A_{(\theta)}\cos\theta)}_{A_y}\vec{e}_y\end{aligned}\quad (1.4-3)$$

または

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y = A_x(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + A_y(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta) \\ &= \underbrace{(A_x\cos\theta + A_y\sin\theta)}_{A_{(r)}}\vec{e}_r + \underbrace{(-A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)}_{A_{(\theta)}}\vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (1.4-4)$$

が導ける。行列にまとめると、

$$\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix}\quad (1.4-5)$$

であり、基底の方は

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix}\quad (1.4-6)$$

である。

$$\begin{aligned}&\text{(1.4-5) の左の式の右辺を転置したもの} \\ \begin{bmatrix} A_{(r)} & A_{(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_x & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{単位行列}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_x & A_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4-7)$$

となり、基底と成分を掛けたものは座標系のとり方によらない。

1.4.2 共変／反変ベクトルを使う場合

上で考えた $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ は共変ベクトルでも反変ベクトルでもない。共変ベクトル／反変ベクトルならどう変換するかを考えるため、微小変位 $d(\text{なんとか})$ と、微分演算子 $\frac{\partial}{\partial(\text{なんとか})}$ の変換を見てみよう。(1.2-12)で求めたように

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} \end{bmatrix}\quad (1.4-8)$$

であった。逆変換は上の逆行列を使って

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.4-9)$$

と書かれる。結果を見ると、 $\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}$ の変換則 (1.4-9) の行列は $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ の変換則 (1.4-5) の行列に一致しない。強いて言えば、 $\begin{bmatrix} dr \\ r d\theta \end{bmatrix}$ の変換則が $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ の変換則に一致する。あるいは、 $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ \frac{1}{r} A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ が

反変ベクトルとなる、と言ってもよい。

微分の方の変換を見ると、 $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ の変換が $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ の変換則に一致する。あるいは、 $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ r A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ が共変ベクトルである。

つまり、 $\begin{bmatrix} A_{(r)} \\ r A_{(\theta)} \end{bmatrix}$ は ($\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ と同じ変換をするから) 「共変ベクトル」になり、

$$A_r = A_{(r)}, \quad A_\theta = r A_{(\theta)} \quad (1.4-10)$$

と書くことができる。同様に、

$$A^r = A_{(r)}, \quad A^\theta = \frac{1}{r} A_{(\theta)} \quad (1.4-11)$$

である。

別の言い方をすれば、二つの基底 $\vec{e}_r, r\vec{e}_\theta$ を使ってベクトルを

$$A^r \vec{e}_r + A^\theta (r \vec{e}_\theta) = A_{(r)} \vec{e}_r + A_{(\theta)} \vec{e}_\theta \quad (1.4-12)$$

と表しても、二つの基底 $\vec{e}_r, \frac{1}{r} \vec{e}_\theta$ を使ってベクトルを

$$A_r \vec{e}_r + A_\theta \left(\frac{1}{r} \vec{e}_\theta \right) = A_{(r)} \vec{e}_r + A_{(\theta)} \vec{e}_\theta \quad (1.4-13)$$

と表してもよいわけである。

後で、基底の組 $\vec{e}_r, r\vec{e}_\theta$ を $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ に置き換えた表現 $A^r \frac{\partial}{\partial r} + A^\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ や、基底の組 $\vec{e}_r, \frac{1}{r} \vec{e}_\theta$ を $dr, d\theta$ に置き換えたりした表現 $A_r dr + A_\theta d\theta$ を作る。「座標変換による変換性が同じものを置き換える」操作をやっているのである。



2次元のナブラ(直交座標なら $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$)は、極座標では $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ になる。ここに $\frac{1}{r}$ がつくのは、上に述べた変換性からもっともある。

1.5 斜交座標系

次に、座標変換によって軸が直交しなくなるような座標変換の場合の共変ベクトル、反変ベクトルの変換を見ておこう。

例としてガリレイ変換、すなわち (x, t) 座標系から (X, T) 座標系への座標変換

$$\begin{aligned} X &= x - vt \\ T &= t \end{aligned} \tag{1.5-1}$$

を考えよう (v は定数)。ここで「 $T = t$ ならわざわざ新しい変数 T を使わなくていいのでは?」と思う人もいるかもしれないが、そうではない。

そのことを確認するために、新しい方の座標による偏微分 $\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial T}$ を考えてみる。偏微分の chain rule をはじめに計算しよう。逆変換は

$$x = X + vT, \quad t = T \tag{1.5-2}$$

なので、偏微分の変換は

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial X} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.5-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial T} \frac{\partial}{\partial t} = v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.5-4}$$

となる。つまり、このとき変化するのは $\frac{\partial}{\partial t}$ の方なのである。「 t は変化しないから文字を変えない」ことにしたら、 $\frac{\partial}{\partial t}$ と $\frac{\partial}{\partial T}$ の違いが見えなくなってしまう^{†23}。

図で、微分が変化する様子を確認しよう。実際にはベクトルの第 1 成分であるところの x と X があたかもスカラーであるかのような顔をしてグラフに x, X の値を書き込んでみると、[図 1-4](#) のようになる。座標系 (x, t) と座標系 (X, T) の違いをこの図から読み取って欲しい。

微分（あるいは、基底ベクトル）の $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial T}$ のそれぞれの方向について、

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial X} \text{ は「} T \text{ が変化しないで } X \text{ が変化する方向} \text{」を向く。} \\ \frac{\partial}{\partial x} \text{ は「} t \text{ が変化しないで } x \text{ が変化する方向} \text{」を向く。} \end{array} \right. \quad \text{ことと、}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial T} \text{ は「} X \text{ が変化しないで } T \text{ が変化する方向} \text{」を向く。} \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{ は「} x \text{ が変化しないで } t \text{ が変化する方向} \text{」を向く。} \end{array} \right. \quad \text{こととを考えるとそれぞれのベクトルの向きの意味が理解できる。つまり、「} \frac{\partial}{\partial x} \text{ の方向} \text{」は「} x \text{ が増える方向} \text{」であると同時に「} x \text{ の}$

^{†23} これは、「省略形を使うのが悪い」とも考えられる。 $\frac{\partial}{\partial t}$ を $\left(\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\right)_x$ と、 $\frac{\partial}{\partial T}$ を $\left(\frac{\partial f(T, X)}{\partial T}\right)_X$ と、のように「どの変数を固定するか」を省略せずに書くことにすれば、同じ t を使って $\left(\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\right)_x$ と $\left(\frac{\partial f(t, X)}{\partial t}\right)_X$ と書いても違いの区別はできる。

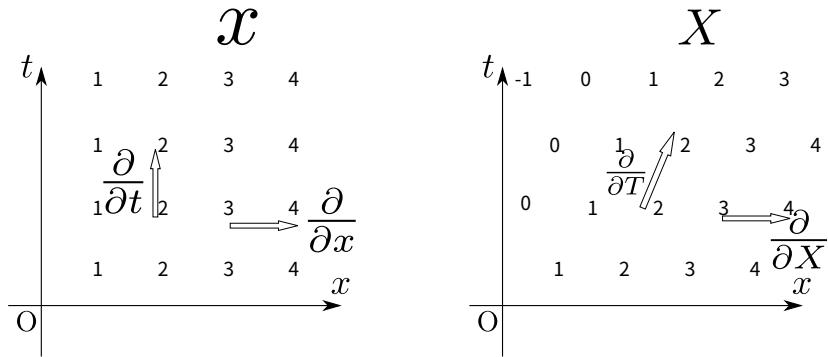


図 1-4 x と $X = x - vt$ の分布図

相棒である t が変化しない方向」なのである。図には描いてないが、 t と T を書き込んでみれば、それらが変化しない方向を向く $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial X}$ が同じ向きを向くことが理解できる。

dx と dX の向きの違いを見るために、 x と X が同じ値を持つ点を線（地図の「等高線」に対応する）で表現した図を描いてみよう。結果は図 1-5 である。

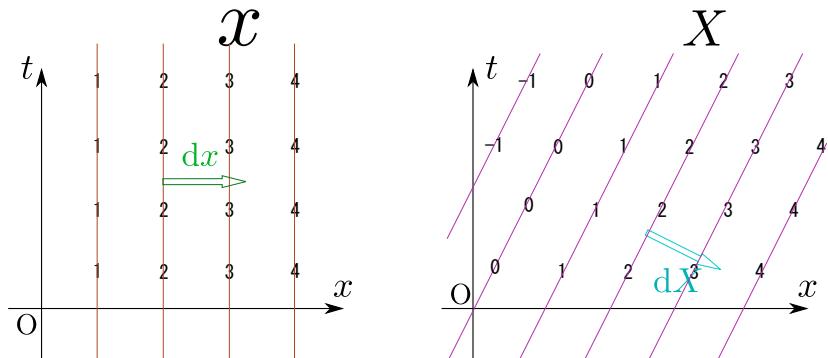


図 1-5 x と $X = x - vt$ の等高線図

これを地図だと考えたとき、まさにその場所に立ったときの「登り坂」の方向が dx, dX である。「 X 軸は図の真横を向くんだから、 dX も真横では？」と思う人がいるかもしれない。そういう人は、まさにこの等高線の地形に自分がいて「あなたのいる場所の坂道の上はどっち？」と聞かれたらいどう答えるか、想像して欲しい。

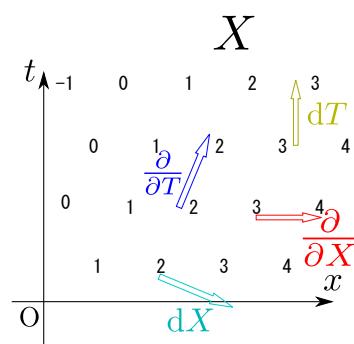


図 1-6 $\frac{\partial}{\partial X}$ と dX 、 $\frac{\partial}{\partial T}$ と dT

同様に「 t や T （実は同じ変数）の等高線」を描いてみれば、 dt と dT が同じ方向を向くことも理解できるだろう。 dx の方向と長さ（この「長さ」の意味は微妙だが、後述）は、ある数 x が地図上にどう分布しているかが分かれば決まる（もうひとつの座標である t をどう選ぶかは関係ない）。これは dX の方も同様である。

まとめると、四つの基底は図 1-6 のような向きを向く（今の場合は基底ベクトルの向きはどこでも同じ方向を向く）。直観的に思う「 X が増える方向」と「 $\frac{\partial}{\partial X}$ の方向」が一致していないことに注意しよう。 $\begin{cases} dX \text{ と } \frac{\partial}{\partial T} \text{ が直交する} \\ dT \text{ と } \frac{\partial}{\partial X} \text{ が直交する} \end{cases}$ を、図 1-6 から読みとて欲しい。
→ p23

1.6 座標変換と dx の変化

「等 X 線」が混雑しているところは「坂道が急」なので「坂道の勾配」に対応する dX は大きく（長く？）なると考えられる。図 1-7 は二次関数 $X = x^2$ の等高線を描いたものである。

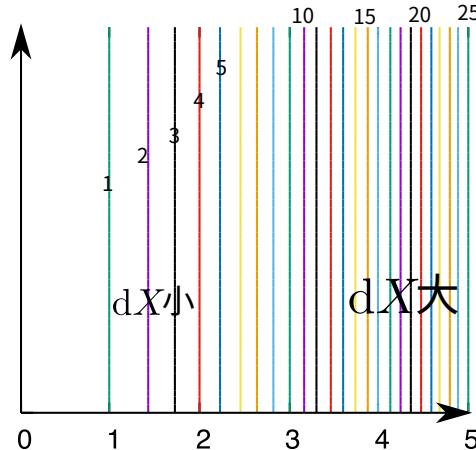


図 1-7 $X = x^2$ の等高線と dX の大小関係

少し複雑な例として、二つの物理量 $X = xy, Y = xy^2$ を考えて、 X, Y の等高線と dX, dY を描いたのが図 1-8 である。
→ p25

等高線の間が狭い場所で dX や dY が大きくなっていることに注意しよう。
 X, Y を座標と考えれば偏微分係数 $\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$ が定義できる。これらのベクトルの表現は図に描いてないが、 $\frac{\partial}{\partial X}$ は Y の等高線に沿った方向で、 X の増える向きを向く（ $\frac{\partial}{\partial Y}$ は X, Y の立場を入れ替わる）。

このとき、微分の間の関係として

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (1.6-1)$$

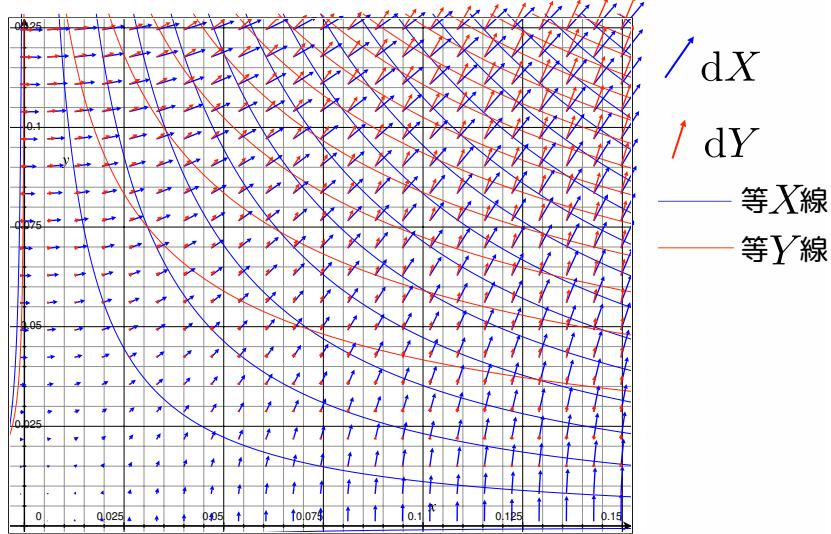


図 1-8 $X = xy, Y = xy^2$ の等高線と dX, dY

と

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{1}{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.6-2)$$

が成り立つ。下の式を転置すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6-3)$$

となり、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (1.6-4)$$

となって、座標変換 $x, y \rightarrow X, Y$ において、

$$dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} = dX \frac{\partial}{\partial X} + dY \frac{\partial}{\partial Y} \quad (1.6-5)$$

が成り立つことからが確認できる。

1.7 微分演算子としてのベクトル

➡ $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ の座標変換に対する不变性は、この演算子に（座標によらずに定義される）幾何学的な意味があることを示している^{†24}。以下でそれを考えていく。

1.7.1 演算子 $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ の幾何学的意味

1.7.1.1 流れに沿った微分としての定義

微分の定義に戻って、演算子 $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ が何をする演算子なのかを書き下して見ると、

$$A^{\mu}(\{x^{\cdot}\}) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f(\{x^{\cdot}\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\{x^{\cdot} + \epsilon A^{\cdot}(\{x^{\cdot}\})\}) - f(\{x^{\cdot}\})}{\epsilon} \quad (1.7-1)$$

となり、要は「 $\{A^{\cdot}\}$ で表現される流れに沿った変化量」を計算している。

ここで「 $\epsilon A^{\mu}(\{x^{\cdot}\})$ だけ移動している間に $A^{\mu}(\{x^{\cdot}\})$ の値は変わるから右辺の $f(\{x^{\cdot} + \epsilon A^{\cdot}(\{x^{\cdot}\})\})$ の引数の $\epsilon A^{\cdot}(\{x^{\cdot}\})$ の項は単なる積ではいけないのでは？」と不安になる人もいるかもしれないが、右辺は極限で定義されていて、分子は $\mathcal{O}(\epsilon)$ までしか計算する必要がないのでこれでいいのである。あるいは

$$f(\{x^{\cdot} + \epsilon A^{\cdot}(\{x^{\cdot}\})\}) = f(\{x^{\cdot}\}) + \epsilon A^{\mu}(\{x^{\cdot}\}) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f(\{x^{\cdot}\}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.7-2)$$

と書いて、心配する部分は $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の中にあると思えばよい。

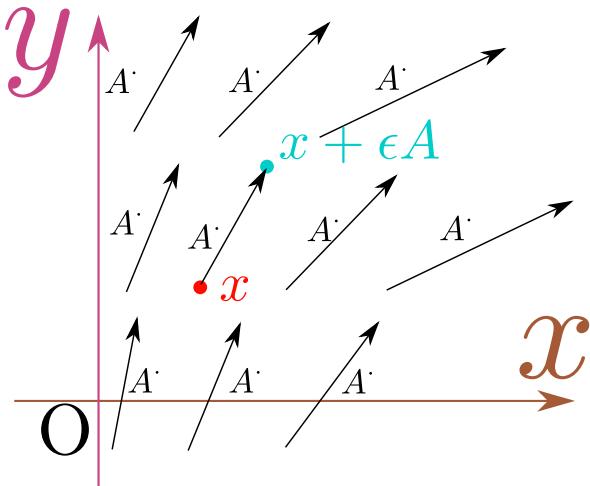


図 1-9

^{†24} こっちから説明を始めた方がよかったのかもしれない。

以下、演算子 $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ は座標によらないので、

$$A^{\cdot} \equiv A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (1.7-3)$$

のように「座標の匂いがする μ などの添字」を隠した表現を使うことにする。上についた・は「添字が上付きの量を含んでますよ」の印だと思って欲しい。これは本講義だけの約束で、多くの本では・すらつけない。あるいは「abstract index」と呼び（ホントの添字じゃないよと言いつつ） X^a のように書く。

微分演算子としてのベクトルの意味するところは図 1-9 のように、「ベクトル場 A^{\cdot} に沿った方向の変化」である。ベクトル場 A^{\cdot} を「空間の各点各点に<大きさと向きのある物理量>が分布している状況」と考えると、それは「人間がどう座標系を張るか」とは無関係に存在する。よって、そのベクトル場の方向の変化を計算する操作も、座標系によらない演算子になる。

「空間の各点各点に分布している大きさと向きのある物理量」として「風」を考えると、



今ここに小物体がいるとして、風によって力を受ける方向に風の強さに比例した距離だけ動いたとする。動く前に観測した f と動いた後に観測した f の変化量は？

が(1.7-2)のイメージである。

→ p26

1.7.1.2 微小な座標変換による定義

別の見方をすることもできる。まず座標 x^{μ} から $X^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon A^{\mu}$ ^{†25} で関係づけられた新しい座標 X^{μ} への座標変換と考える。座標変換した結果、新しい座標の値が $\{x^{\cdot}\}$ になった点にある場と、座標変換前の古い座標の値が $\{x^{\cdot}\}$ であった場所にある場（これは違う場所にいるのだから違う場である）の差を取る演算を考えると、これも A^{\cdot} を掛ける演算になる。すなわち、

$$f_{\text{新}}(\{X^{\cdot}\}) = f_{\text{旧}}(\{x^{\cdot}\}) + \epsilon A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f(\{x^{\cdot}\}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.7-4)$$

が成り立つ。ここでは、同じ意味を持つ関数 f を、「古い座標を使った場合／新しい座標を使った場合」で表記を変えて「 $f_{\text{旧}} / f_{\text{新}}$ 」としてあえてその違いを強調した。新しい座標で値が $\{x^{\cdot}\}$ である場所は、古い座標で場所が $\{x^{\cdot} + \epsilon A^{\cdot}\}$ である場所であるから、(1.7-2)と(1.7-4)で、演算子 $A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ の意味は同じである。

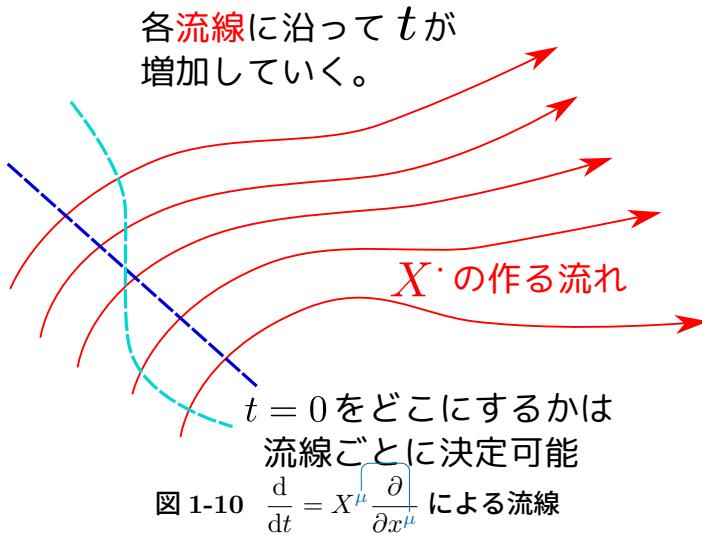
1.7.2 ベクトル場と積分曲線

電磁気学で「電気力線」や「磁力線」を考えたときのように、「各点々々で X^{μ} 方向に伸び得ていく曲線」を考えてみる。それは以下のようないくつかの微分方程式

$$\frac{dx^{\mu}(t)}{dt} = X^{\mu}(\{x^{\cdot}\}) \quad (1.7-5)$$

†25 ここでは ϵ の前にマイナスがついていることに注意。

の解である。これを積分曲線と呼ぼう。考えている空間のあらゆる点にこの積分曲線を引くことができる^{†26}。



積分曲線を引き終わった後であれば、

$$\frac{d}{dt} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.7-6)$$

のようにベクトル場を「積分曲線のパラメータの微分」で表現することができる。 X^μ の向きが積分曲線の向きに等しい。そして X^μ の長さは t のパラメトリゼーションを表現している (X^μ が長いところは t の変化量が大きい)。

積分曲線上の t を決定するためには、どこかで t の初期値を決めなくてはいけないことに注意しよう。たとえばもっともシンプルな例として、ベクトル場が $\frac{\partial}{\partial x}$ であった場合、 $t = x + (\text{定数})$ であるが、その(定数)は x 以外の変数(たとえば y)に依存してもよい(なにかの条件で fix する)。

1.7.3 ベクトル場の例

上のように定義したものをベクトルと考えると、いわゆる普通の偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ は、 A^μ が第1成分が1で他の0だった場合の特別な場合になる。3次元 (x, y, z) で考えるなら、 $\vec{e}_x = (1, 0, 0) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}$ のような対応を考えているわけである^{†27}。

^{†26} 微分方程式の解が一意的でなかったらどうしよう?—という心配があるが、ここでは一意性を満たすような条件(リプシツ条件)を満たす微分方程式しか考えないことにしよう。

^{†27} ここで、 \vec{e}_x などは「長さが1」の規格化がされているが、 $\frac{\partial}{\partial x}$ の方にはそんな規制はないことに注意。たとえば $X = 2x$ なる新しい座標を作れば、新しい座標では $\frac{\partial}{\partial X}$ のようなベクトルが基底になるが、この基底は $\frac{\partial}{\partial x}$ とは2倍長さが違う。

ベクトル $x \frac{\partial}{\partial x}$ の表す移動を図にしたものが図 1-11 である。^{→ p29} 図の矢印はこのベクトルが表現している移動を示しているが、もともとの式(1.7-1)ではその矢印の長さは ϵ に比例していて、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が取られるので、本来の意味ではこの矢印は 0 である。^{→ p26}

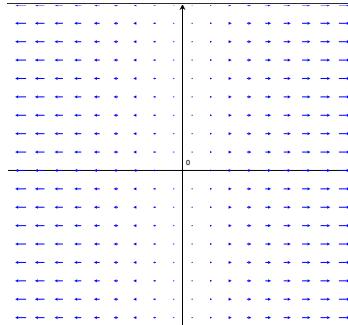


図 1-11 ベクトル $x \frac{\partial}{\partial x}$

少しだけ簡単でない例を図示しておくと、ベクトル $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ の表す移動が図 1-12 である。

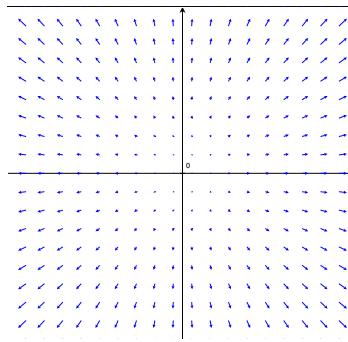


図 1-12 ベクトル $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$

われわれはこのベクトルの書き方を「座標系によらない」利点を前面に押し出して紹介したのだから、実際に座標変換してみよう。極座標に変換すると、

$$r \cos \theta \underbrace{\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x}} + r \sin \theta \underbrace{\left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}_{\frac{\partial}{\partial y}} = r \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.7-7)$$

となる^{†28}。

さらにもう少しややこしい例が図 1-13 である。こちらは極座標で表現すると

$$-r \sin \theta \underbrace{\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x}} + r \cos \theta \underbrace{\left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.7-8)$$

^{†28} どちらかといえば、 $r \frac{\partial}{\partial r}$ から出発した方が計算は簡単。

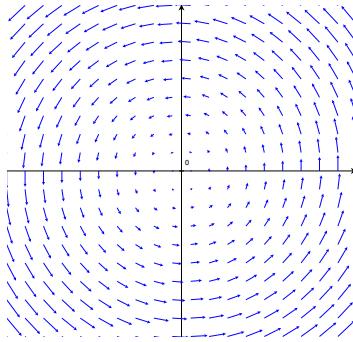


図 1-13 ベクトル $-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ 、実は $\frac{\partial}{\partial \theta}$ でもある。

になる。

ここで、(1.7-8) は $\frac{\partial}{\partial \theta}$ の形になったが、(1.7-7) はそうなっていない。しかし、変数 $X = \log \left(\frac{r}{r_0} \right)$ (あるいは $r = r_0 \exp(X)$) を作れば

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial}{\partial r} = r_0 \exp(X) \frac{\partial}{\partial r} = r \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.7-9)$$

となる。ここでは、 θ は X に依存しないようにした (よって $\frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \theta}$ の項は出ない)。 $r = 0$ にするには $X = -\infty$ にしなくてはいけないのは難点である (とはいっても、そもそも極座標で原点は常に困ったことが起こる場所なのだ)。

1.7.4 数学的表現としてのベクトル

数学的な「ベクトル」の定義は以下のようなものだ。

定義 5: また一つのベクトルの定義

- (1) 関数から関数への写像 $f(x^\cdot) \rightarrow g(x^\cdot) = X^\cdot f$ である。
- (2) 線形写像である。すなわち $X^\cdot (af(x) + bg(x)) = aX^\cdot f + bX^\cdot g$
- (3) ライプニッツ則を満たす。すなわち $X^\cdot (fg) = (X^\cdot f)g + fX^\cdot g$

この抽象的な定義だけから、 X^\cdot が微分演算子であり、 $X^\cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ のように書けることがわかる。ここでは詳細は書かないが、数学の本などで上の定義を見たときに感じる (であろう) 「なんでベクトルなのにスカラーからスカラー (関数から関数) の写像なの?」という疑問に答えておく。物理的現象として、温度分布^{†29}を考えよう。空間の各点々々に、「速度 v^μ で走っている人達」が分布しているとする。温度の分布関数 $T(\{x^\cdot\})$ と、この「人達」が感じる「単位時間あたりの温度変化 $(\Delta T)(\{x^\cdot\})$ 」という二つのスカラー場の関係は、「人達」が時刻 t のいる場所が $\{x^\cdot(t)\}$ だとすると、

$$(\Delta T)(\{x^\cdot(t)\}) = \frac{d}{dt} (T(\{x^\cdot(t)\})) \quad (1.7-10)$$

†29 スカラー場ならなんだっていい。どんなスカラー場をもってくるかは、 X^\cdot というベクトルを定義するのに関係ない。

であり、合成関数の微分を使って計算すれば、

$$(\Delta T)(\{x^\cdot(t)\}) = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\{x^\cdot\} = \{x^\cdot(t)\}} (T(\{x^\cdot\})) \quad (1.7-11)$$

である。つまり、スカラー T からスカラー ΔT を求めるという演算は、微分演算子 $v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ のだ。

結局この考え方は、先に考えた「流線でベクトル場を定義する」のと同様である。

通常物理屋が「ベクトル」と呼ぶのは X^μ の部分だが、数学屋的には、微分を含めて「微分演算子としての $X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 」を「ベクトル」と呼ぶ^{†30}。こう書くことの最大の御利益は、「座標変換で不変な演算子」としてベクトルが定義されることである^{†31}。

さて整理すると、

「数が並んだもの」としてのベクトル $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$

→ 基底を意識したベクトル $v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$

→ 微分演算子としてのベクトル $v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$

のように「ベクトルの進化」が書ける。

最後の表現を見ていると、あたかも \vec{e}_x が $\frac{\partial}{\partial x}$ に置き換わったかのようだ。というわけで、数学の世界では特に、この $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ や dx^μ を（微分演算子だとか微小変位だとかいう意味をつけることなく）、それぞれ「反変ベクトルを表現するときの基底」と「共変ベクトルを表現するときの基底」として扱うことがある。

共変ベクトルを dx^μ と組合せて

$$A_\cdot = A_\mu dx^\mu \quad (1.7-12)$$

と書き、反変ベクトルを $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ と組合せて

$$A^\cdot = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.7-13)$$

と書くのである^{†32}。上の A^\cdot を単に「ベクトル」または「接ベクトル」と呼ぶ^{†33}と呼び、 A_\cdot を「1-form」と呼ぶ。

これらの式の右辺は全体として座標系によらない。よって左辺も座標変換によって変わるものではない。そこで μ のような添字はつけない（ここまで一般的な表現である）。本講義では、「上付き

†30 数学屋にもいろいろな流儀はあるのだろうと思うが。

†31 物理屋も「座標に依存しない」書き方は好きなので、こういう呼び方は嬉しいことが多い。

†32 注意だが、 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルである。共変ベクトル $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を基底ベクトルのように使って $A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ と書いたとき、成分である A^μ は反変ベクトルである。

†33 普通のベクトルと区別して「微分演算子としてのベクトル」とか呼びたいところ。

添字のある量で表現されたベクトルだ」と示すために \cdot をつけることにする（共変ベクトルも同様）^{†34}。

正確に述べると、1-form を作るときに使う dx^μ は「ベクトルの基底」として使っている量で、大事なのは変換則であり、「微小変化」という意味を持たせる必要は実はない（しかし変換の性質が同じだし、そう考えた方がシンプルでいい）。

同じ記号 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を「微分演算子」として使ったり「ベクトルの基底」として使ったりしていると混乱することもないとは言えない（本講義では以後、基底ベクトルの表現として $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ や dx^μ を使うときは、 $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|$ や $|dx^\mu\rangle$ のように書いて区別することにする。よって 1-form

は $A = A_\mu |dx^\mu\rangle$ と、ベクトルは $A^\mu = A^\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|$ と表現する。

$|dx^\mu\rangle$ を「基底」と表現したが、以下のような考え方をした方が、この後の話では役に立つ。

$A_\mu |dx^\mu\rangle$ と書いたとき、この $|dx^\mu\rangle$ は特定の方向を向いているのではなく、任意の方向を示していて、後からここに「特定の方向への微小変位 dx^μ 」が代入されるのを待っていると考えよう。本によってはこのように「代入されるのを待っている場所」を「スロット」と表現している。このスロットに「特定の方向（たとえば x 軸方向だったり、ある曲線の伸びる向きだったり）」を代入することで計算を進めていくのである。

この 2 種類の基底ベクトルの内積は

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right| \cdot |dx^\nu\rangle = \delta_\mu^\nu \quad (1.7-14)$$

であり^{†35}、ベクトルと 1-form の内積は

$$A_\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right| \cdot B_\nu |dx^\nu\rangle = A_\mu B_\nu \quad (1.7-15)$$

となる。

FAQ 基底 $|dx\rangle$ の長さは 1 ですか？、無限小ですか？

いろんな立場があろうが、実は「そんなこと気にしなくてよろしい」というのが答えである。微小変位 dx^μ であれば「長さはいくら？」と言わされたら「無限小」と答えたくなる^{†36}が、1-form の基底としての $|dx^\mu\rangle$ は長さは定義されてなくて、ただそれぞれの基底の長さの比と向きの違いは決まっている、と考えればよい。 $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|$ もそうである。ただ、この二つの内積については (1.7-14) という関係があり、1 か 0 というちゃんとした値を持つ。

「気にしなくていいと言われても気になるからちゃんと答えを出してくれ」と思った人は、 $|dx^\mu\rangle$ は無限小で $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|$ は $\frac{1}{\text{無限小}}$ と考えても別にいい。

^{†34} この \cdot は普通はつけないのだが、今考っている量が共変ベクトルなのか反変ベクトル（1-form なのかベクトルなのか）か、あるいは添字が何個つく量なのか（テンソルの階数）の区別がつくように \cdot をつけることにする。

^{†35} まずベクトルの基底として $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|$ を定義して、その双対として $|dx^\mu\rangle$ を定義する流れも可能である（この逆でもいい）。

関数 $f(x, y, z)$ の全微分の微小変位を基底で置き換えたもの

$$\text{d}_\cdot f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} |dx\rangle + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} |dy\rangle + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} |dz\rangle \quad (1.7-16)$$

は特定の方向ではなく、「あらゆる方向の微分」を一斉に表現している（だから「全微分」）。

この基底 $|dx^\mu\rangle$ の部分に、特定方向の微小変位 dx^μ を代入すると「偏微分」になる。たとえば x 方向の微小変位なら dx のみが 0 ではない。

全微分からその方向の微分を取り出す操作は

(1) 代入操作 $(|dx\rangle, |dy\rangle, |dz\rangle) \rightarrow (dx, 0, 0)$ ^{†37}。

(2) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right|$ との内積を取る。

のどちらかであって、結果は (1) の場合

$$\underbrace{\text{d}_\cdot f(x, y, z)}_{x \text{ 方向のみ}} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx \quad (1.7-17)$$

(2) の場合

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right| \cdot \text{d}_\cdot f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \quad (1.7-18)$$

となる。

1.8 接ベクトル

X^\cdot というベクトル場は、パラメータ t による微分 $\frac{d}{dt}$ と考えることもできるという話を前にもした。
^{→ p28}

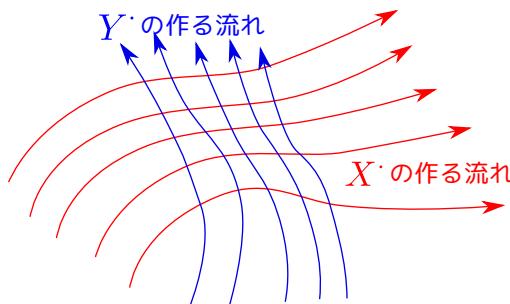


図 1-14

†36 これも考え方によっては正しくない。 $\frac{dy}{dx} = y$ から $\frac{dy}{y} = dx$ のような計算をするとき、 dx や dy は「無限小の量

だが、その比は定義されている」と考えてもいいが「それぞれの大きさは定義されてないが、相対比は決まっている」と考えても、どっちでもよい。

†37 なんなら $(1, 0, 0)$ を代入したっていいんだが、次元が違ううえに、微小量が入るところに有限量を代入するのは気が引ける。

X^{\cdot} とは別のベクトル場 Y^{\cdot} を持ってきて、この積分曲線を

$$\frac{dx^{\mu}(s)}{ds} = Y^{\mu}(\{x^{\cdot}\}) \quad (1.8-1)$$

で定義されるパラメータ s を使って引くことで、

$$\frac{d}{ds} = Y^{\mu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}}_{(1.8-2)}$$

とすることもできる。

こうして、2次元空間内に図 1-14 のような絵が描けるように思えるが、これができたからといって、「 t と s は座標になる」と考えてはいけない。

まず、 X^{\cdot} 方向に進んだときに s が変わらない保証がない。 $\frac{d}{dt}$ によって作られるある 1 本の流線上に関してなら、その線上で $s = \text{一定}$ にすることはできる。そうなるように s の原点を動かせばよいからである（図 1-10 を参照）。しかし、他の流線でそうできるとは限らない。

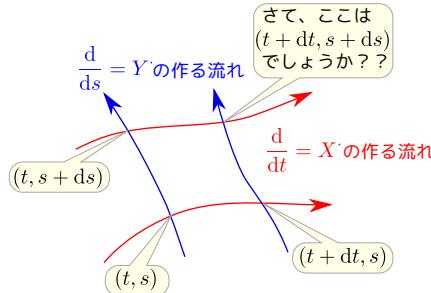


図 1-15 (t, s) が座標として
使える条件

これが何を意味するかというと、一般の場合、ある場所（座標が (t, s) ）から出発して、
 $\left\{ \begin{array}{l} t \text{ を } dt \text{ 増加させてから } s \text{ を } ds \text{ 増加させる} \\ s \text{ を } ds \text{ 増加させてから } t \text{ を } dt \text{ 増加させる} \end{array} \right.$ 二つの操作が同じ場所 $(t + dt, s + ds)$ にたどりつく
保証がないのである。

この二つを問題が解消され t, s が座標として使える条件が、この「演算子としてのベクトル」の交換関係が 0 になることである。つまり上に書いた二つの移動の結果が同じものになる。

交換関係を取ってみると、

$$\begin{aligned} [X^{\cdot}, Y^{\cdot}] &= \left[X^{\mu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}}_{\text{Lie bracket}}, Y^{\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}}_{\text{Lie bracket}} \right] = X^{\mu} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, Y^{\nu} \right]}_{\text{Lie bracket}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + Y^{\nu} \underbrace{\left[X^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right]}_{\text{Lie bracket}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \\ &= \left(X^{\mu} \underbrace{\frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}}_{\text{Lie bracket}} - Y^{\mu} \underbrace{\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}}}_{\text{Lie bracket}} \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}}_{\text{Lie bracket}} \end{aligned} \quad (1.8-3)$$

となる。後でこの交換関係が「Lie 微分」と関係することがわかる。



すでに座標として使えることがわかっている平面極座標 (r, θ) の場合、もちろん $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ は交換する。これを直交座標で表現して

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.8-4)$$

と書いても、当然この二つは交換することに変わりはない。まず、

$$\begin{aligned} & \left[x^2 + y^2, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= -y \left[x^2 + y^2, \frac{\partial}{\partial x} \right] + x \left[x^2 + y^2, \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= -y(2x) + x(2y) = 0 \end{aligned} \quad (1.8-5)$$

となることが確認される。

これにより、 $\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0$ も言える。ゆえに

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.8-6)$$

となり、

$$\begin{aligned} & \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] = \left[x \frac{\partial}{\partial x}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[y \frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= x \left[\frac{\partial}{\partial x}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[x, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{\partial}{\partial x} \\ & \quad + y \left[\frac{\partial}{\partial y}, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[y, -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{\partial}{\partial y} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.8-7)$$

と、確認できる。

ここで「では $\frac{\partial}{\partial R} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ 」と置いて R を座標に使ってもいいのでは?」と気づいた人もいるかもしれない。もちろん構わない。 $r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial R}$ という関係だから、

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r} \rightarrow R = \log r + C \quad (1.8-8)$$

とすればよい。

1.9 n -form

1.9.1 0-form とその微分の結果の 1-form

1-form という名前からして 0-form や 2-form があるのかな、と思った人もいるかもしれない。1-form は基底 $|dx^\mu\rangle$ を一個使っている（これで「向き」の情報を持たせている）ので、0-form は向きの情報を持たない量、すなわちスカラーになる。

さてスカラー $f(\{x^\cdot\})$ に、先程考えた座標系に依存しない演算子 $\text{d} = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を掛けてみよう。結果は

$$\text{d} f(\{x^\cdot\}) = dx^\mu \frac{\partial f(\{x^\cdot\})}{\partial x^\mu} \quad (1.9-1)$$

となる。 dx^μ を基底 $|dx^\mu\rangle$ に置き換えれば、これは立派な 1-form である。つまり、「0-form に d を掛けると 1-form ができる」^{†38} ことである。何を隠そう、この計算は「関数 f の全微分」の計算になっている。

たとえば、1-form

$$-ydx + xdy \quad (1.9-2)$$

（グラフで表現すると図 1-16）は何かの全微分では書けない。

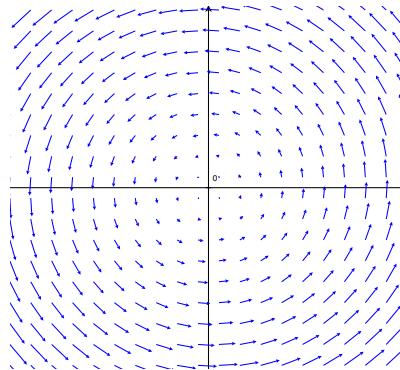


図 1-16 1-form $-ydx + xdy$

ある 1-form $Pdx + Qdy$ が何かの全微分で書ける条件は、積分可能条件

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.9-3)$$

であり、 $-ydx + xdy$ の場合の $P = -y, Q = x$ はこの条件を満たさない。

ここで、 $\text{d}\theta = -\frac{\sin \theta}{r}dx + \frac{\cos \theta}{r}dy$ を思い出すと、

^{†38} ただし、全ての 1-form が「0-form に d を掛けたもの」かというと、もちろんそうではない。

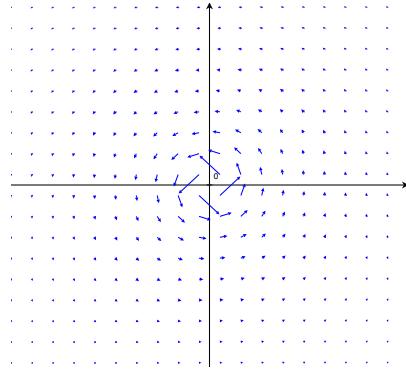


図 1-17 1-form $-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

$\frac{x}{r} = \cos \theta, \frac{y}{r} = \sin \theta$ と $x^2 + y^2 = r^2$ を使って

$$d\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \quad (1.9-4)$$

と書くことができる。この 1-form をグラフで表現すると図 1-17 である。つまり、(1.9-2) の 1-form は微分ではないが、これを $x^2 + y^2$ で割ると全微分になる^{†39}。
→ p36

ただし、これは、惜しいところで「全平面で全微分」になっていない。というのは座標 θ は原点では定義できないので（あるいは別の理由としては「分母の $x^2 + y^2$ は 0 になってはいけないので」）、上の式は原点を除いた x - y 平面上でしか成立しないのである。

1.9.2 ベクトルと 1-form の基底：2 次元極座標の例

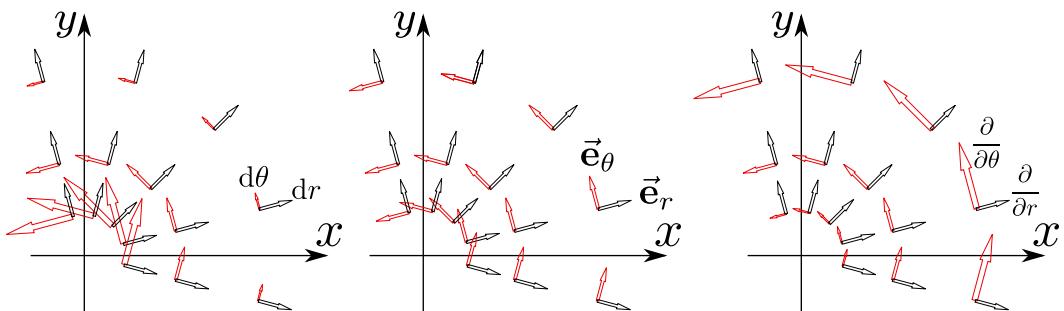


図 1-18 3 種類の基底

図 1-18 に描いたように、 $|d\theta|$, \vec{e}_θ , $\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle$ の三つの基底は、長さの変化の様子が違うのである。このうち、 $|d\theta|$ が遠方ほど小さくなるのは「同じ距離移動しても原点から遠いほど角度変化は小さい」の意味だと理解すればよい。

†39 「全微分ではない 1-form をこれで割ると全微分になる」量のことを「積分分母」と呼ぶ。積分分母は常に見つかるわけではない。物理でもっとも重要な積分分母は熱力学で現れる「温度」だが、温度という積分分母が出てくるのは熱力学第 2 法則（物理法則！）のおかげである。

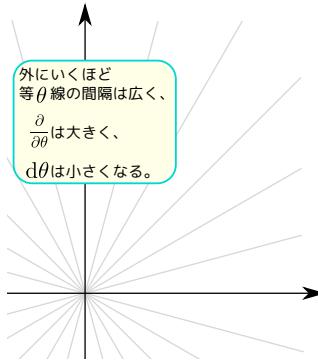


図 1-19 θ の「等高線」

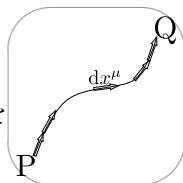
$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \right|$ の方は「同じ角度移動では原点から遠いほど移動距離が大きい」と理解すればいいだろう。あるいは図 1-19 のように θ の等高線を引いて考えると、
→ p38

等高線の間隔が広いところは $\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \right|$ が長い と考えてもよい。
等高線の間隔が狭いところは $|d\theta|$ が長い

1.9.3 1-form の積分

さて、こうやって作った 1-form なるものの意味は何なのか。1-form は、その「基底」部分を「微小変位」と解釈して $A_\mu dx^\mu$ と書いた場合、あたかも「今から線積分する量」のように見える。実際、これを線積分することにはちゃんと意味がある。ここまででは 1-form に関して「座標変換で不变になるようなもの」という観点しか話してなかったが、むしろ「1-form は線積分してこそ意味がある」と言える。

1-form $A_\mu dx^\mu$ を積分するのは、積分路に対応する微小な線の dx^μ を基底 $|dx^\mu\rangle$ に代入し

ながら足していく操作で、積分経路を  のように(点 P から点 Q までのある曲線)と設定したなら、

$$\int_P^Q A_\mu dx^\mu = \int_P^Q A_\mu dx^\mu \quad (1.9-5)$$

のように書く(基底ではなく微小変位 dx^μ が掛かっていることに注意^{†40})。この積分は一般には「どのような経路をたどって積分するか」に依存する(その依存性を $\int_{\text{ある曲線}}^Q$ で示した)。「ある曲線」をちゃんと示さないと積分は実行できない。

このような量の物理的意味を理解するための例として、静電場 \vec{E} を $E_i = E_i dx^i$ ($i = x, y, z$) の

†40 積分されている量は、「スロット」である $|dx^\mu\rangle$ に特定の経路の情報が取り込まれた結果である。

ような 1-form で表現し、これを積分してみよう。

電場 1-form の式に含まれる基底 $|dx^i\rangle$ の部分に、ある移動の微小距離 dx^i を代入して積分した量

$$\int_P^Q \underbrace{E_i dx^i}_{\substack{\text{ある曲線} \\ |dx^i\rangle \rightarrow dx^i}} = \int_P^Q (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (1.9-6)$$

は、点 P から点 Q まで移動する間に電場が単位電荷に対してする仕事である。この量は点 P と点 Q の電位差を表すのだが、この積分が「電位差」という形で

$$\int_P^Q \underbrace{E_i dx^i}_{\text{ある曲線}} = V_P - V_Q \quad (1.9-7)$$

と表現できる^{†41}ためにはある条件^{†42}が必要である。その条件についても後で、微分形式の言葉で表現しよう。

1.10 2-form

1-form の次の量として 2-form を考える。シンプルに拡張すれば、 $|dx^\mu\rangle \otimes |dx^\nu\rangle$ のように「微小変位が代入されるスロットが二つある、 $N \times N$ 成分の量」を考えるとそれが 2-form になるのかな?—と思われる。ただし、ここに出てきた記号 \otimes は「直積」で、 N 成分の基底と N 成分の基底から N^2 成分の基底を作る演算である。2 次元のベクトルの基底 $|dx\rangle, |dy\rangle$ に対して $|dx\rangle \otimes |dx\rangle, |dx\rangle \otimes |dy\rangle, |dy\rangle \otimes |dx\rangle, |dy\rangle \otimes |dy\rangle$ の四つの基底が作られる。

ところが世間で「2-form」と呼ばれるものは、単に「スロットが二つある」だけではなく、もうひとつ条件がある。というのは 2-form には、「微小な面積に付随する量」または「将来面積分される微小量」という意味合いがあるからである。以下でまず「平面上の面積」の表現を考えよう。

1.10.1 平面の面積を表現する量

1-form は微小な線 dx^μ に付随する量である。今度は幾何学的意味を先に述べておくと、1-form が「線積分される量」だったのに対し 2-form は「面積分される量」である。

2-form を考える手がかりとして「1-form $A.$ によって表現される微小な線と、1-form $B.$ によって表現される微小な線の作る微小な面積」をまず考えよう (図 1-20)。
→ p40

この「微小な面積」が $A.$ と $B.$ の両方に比例することはすぐにわかる。そこで掛算同様に $|dS.. = A. \wedge B. \rangle$ のように書けるとしよう。「 \wedge 」はこのあとちゃんと定義する、ある種の掛け算を表す記号であり、この積を「くさび積 (wedge product)」と呼ぶ。

ここでは (2 次元の平面のお話に限るとして) 「面積になる」ことをくさび積の定義にしておこう。2 次元の直交座標 (x, y) があって、 $A. = dx, B. = dy$ とするならこの微小面積は $dx \wedge dy$ であ

^{†41} この式を見て「おっ」と気づいて欲しいのは、左辺は「ある曲線」に依存しているが、右辺は点 P と点 Q の位置のみに依存していることだ。

^{†42} 答えを書いておくと $\text{rot } \vec{E} = 0$ である。

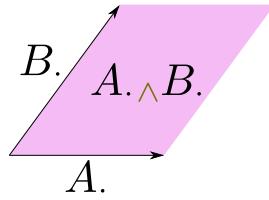


図 1-20

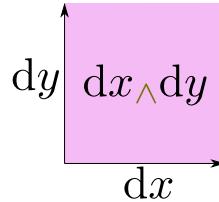


図 1-21

る。今出てきた記号 \wedge を除けば、よく見る 2 次元の面積要素 $dx dy$ となる。

とりあえずここでは $A. \wedge B.$ によって図 1-20 の面積が表現できているとしたわけであるが、そうすると、このくさび積には以下に示す性質「双線形性」があることがわかる。

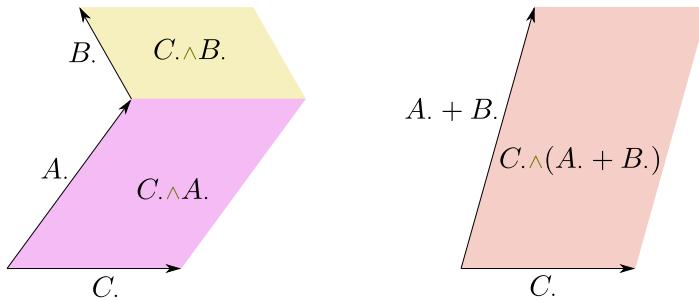


図 1-22

定義 6: くさび積の双線形性

「双線形性」とは、

$$(\alpha A. + \beta B.) \wedge C. = \alpha A. \wedge C. + \beta B. \wedge C. \quad (1.10-1)$$

$$C. \wedge (\alpha A. + \beta B.) = \alpha C. \wedge A. + \beta C. \wedge B. \quad (1.10-2)$$

が成り立つこと。

図 1-22 を参照しよう (図では和についての線形性を示しているが、定数倍についても成り立つことは容易にわかるだろう)。つまり線形結合とくさび積という二つの操作は交換する。

ここで大事なのはこの「面積」は負にもなることである。 $A. \wedge B.$ は、 $A. \rightarrow B.$ が反時計回りのときは正 (時計回りなら負) の量になる。ゆえに、くさび積は反対称 $[A. \wedge B. = -B. \wedge A.]$ である。

負の面積が有用である例を図 1-23 に示そう。図に書かれた $C. \wedge A.$ が正の面積、 $C. \wedge B.$ が負の面積とすることで、くさび積の線形性が保持されている。

面積が負になることは不思議がる人が多いのだが、たとえば図 1-24 のような凹な部分のある領域の積分が

$$S = \frac{1}{2} \int \vec{x} \times d\vec{x} \quad (1.10-3)$$

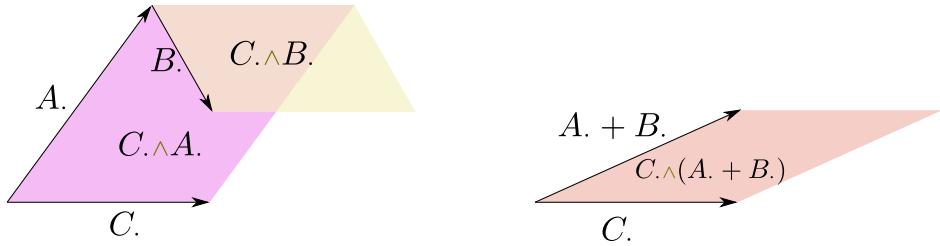


図 1-23

で計算できる（微小三角形の集まりとして計算するので $\frac{1}{2}$ が付いている）のも、「負の面積」が式に取り入れられているおかげである^{†43}。

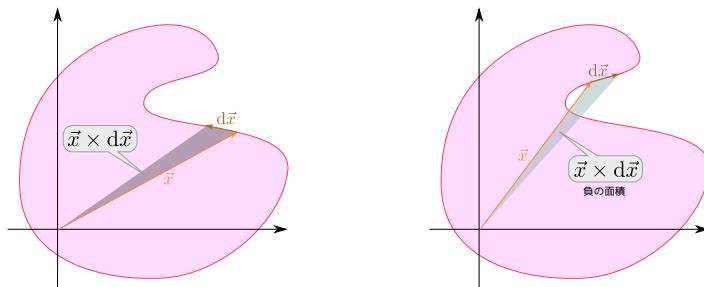


図 1-24 凹部を持つ図形の面積計算に寄与する「負の面積」

さて、この面積を基底を使って表現すると、

$$\begin{aligned}
 A \wedge B. &= (A_x |dx\rangle + A_y |dy\rangle) \wedge (B_x |dx\rangle + B_y |dy\rangle) \\
 &= A_x B_x \underbrace{|dx\rangle \wedge |dx\rangle}_0 + A_x B_y |dx\rangle \wedge |dy\rangle + A_y B_x |dy\rangle \wedge |dx\rangle + A_y B_y |dy\rangle \wedge |dy\rangle
 \end{aligned} \tag{1.10-4}$$

となるが、面積の性質上、 $|dx\rangle \wedge |dx\rangle = 0$ 、 $|dy\rangle \wedge |dy\rangle = 0$ と
 $|dx\rangle \wedge |dy\rangle = -|dy\rangle \wedge |dx\rangle$ がわかるので、

$$A \wedge B. = (A_x B_y - A_y B_x) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \tag{1.10-5}$$

である。ベクトルの外積が平行四辺形の面積を表すという当然の結果が出ている。

面積が 2-form であることから、「面積の座標変換」が以下のようにしてできる。2 次元直交座標と極座標の基底の変換を考えると、面積要素は

$$\begin{aligned}
 |dx\rangle \wedge |dy\rangle &= (\cos \theta |dr\rangle - r \sin \theta |d\theta\rangle) \wedge (\sin \theta |dr\rangle + r \cos \theta |d\theta\rangle) \\
 &= \cos \theta \sin \theta |dr\rangle \wedge |dr\rangle + r \cos^2 \theta |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle - r \sin^2 \theta |d\theta\rangle \wedge |dr\rangle - r^2 \sin \theta \cos \theta |d\theta\rangle \wedge |d\theta\rangle \\
 &= r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle
 \end{aligned} \tag{1.10-6}$$

†43 「面積は正であるべきでしょう」などと言って絶対値をつけて定義したりすると、積分結果は同じ領域を複数回数えてしまう。

のように計算できる^{†44}。

1.10.2 空間内の面積を表現する 2-form

以上は平面の中での面積の表現であったが、3次元空間内の「面積」はどうだろう？

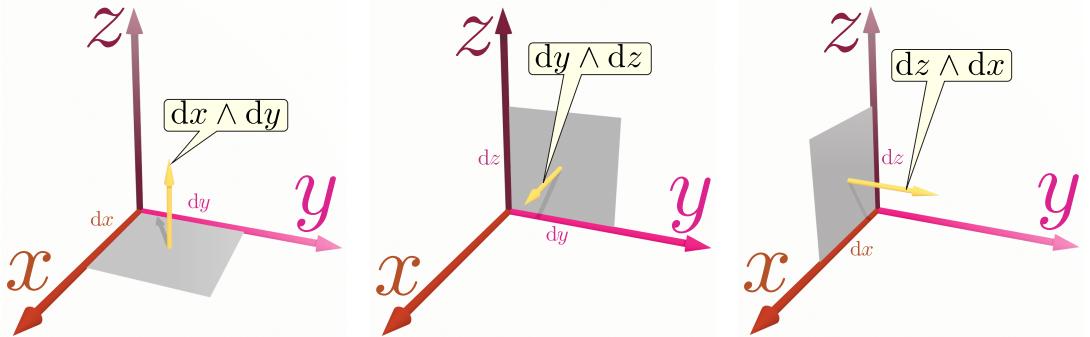


図 1-25 3 次元の、3 種類の面積

2次元の面積はスカラーだが、3次元の面積はスカラーではない。ではベクトルなのかというと、その答えは「微妙なイエス」である。多くの本では「3次元空間の面積はベクトルだ」と書いてあるのだが、それは3次元空間では2-formがベクトル的な変換をする「3次元特有の事情」があるおかげなのである^{†45}。4次元以上の空間においてはこの事情はないので、「面積は2-formである」と言い切ってしまった方が将来的にはよい。

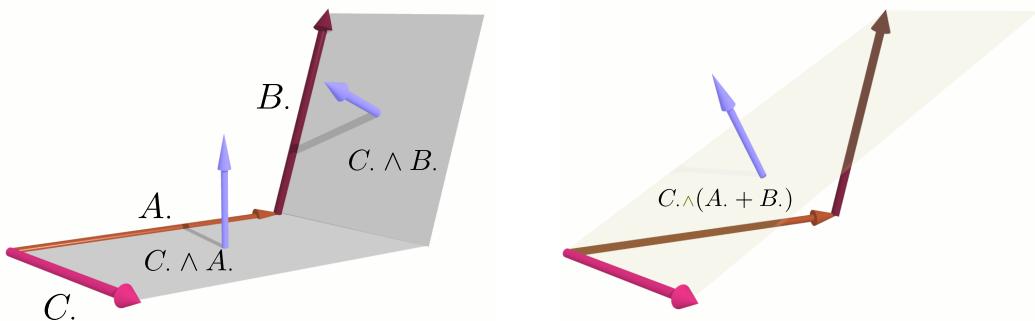


図 1-26 3 次元内面積の分配法則

^{†44} 面積を計算するときの掛け算がくさび積であることを知らない人が素直に計算すると、

$dx dy = \cos \theta \sin \theta dr^2 + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)dr d\theta - r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta^2$ となって、なんじゃこら？となる。

^{†45} 1.17 節で考える Hodge dual という考え方で、1-form と 2-form がつながる（3次元なら）。
→ p59

微小面積は（空間内に位置する斜めの面積も含めて）二つの微小線素のくさび積として計算される。双線形性はこの場合でも成り立つが、その「面積の足し算」は図 1-26 のような「向きを考慮した足し算」である。

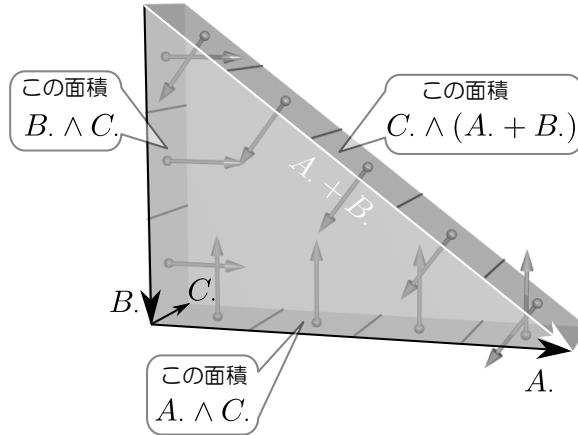


図 1-27 水圧を面積ベクトルで表現

この「斜めの面積をベクトルで表現する」ということについては不思議に思う人も多いが、物理的応用がもちろんある。「面に垂直で面積に比例するベクトル」というと、静水中の水圧^{†46}（ただし、水深による差は考慮しない）がある。水深による圧力差を考慮しない場合、水中に沈んだ物体の受ける水圧の和は 0 であるが、それは図 1-27 を見ると、2-form の和（図の $C.(A. + B.)$ ）を「斜めの面積」と解釈することでうまく理解できる。

1.10.3 一般の 2-form

面積ではない 2-form ももちろんある。たとえば後で説明するが、磁束密度 \vec{B} は実は 2-form なのである。
→ p78

ここまででは「面積を表現」という言い方をしてきたが、ここで 2-form の表現を確認しておこう。

1-form は「基底のところに微小変位が代入される量」すなわち「ベクトルの入るスロットを一つ持っている量」とした。2-form は同様に、「二つの基底があって、そこに二つの微小変位が代入される量」すなわち「ベクトルの入るスロットを二つ持っている量」として定義する。よって 2-form は $|dx^\mu\rangle \otimes |dx^\nu\rangle$ のようなスロット二つを持っている。

面積を表現するときは、二つの基底を反転させると、面積も正負がひっくり返る。そこで、ここまでなんとなく使っていた二つの基底のくさび積を

$$|dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle = |dx^i\rangle \otimes |dx^j\rangle - |dx^j\rangle \otimes |dx^i\rangle \quad (1.10-7)$$

^{†46} 別に水に限らず、等方的な圧力を生じる流体ならなんでも（空気で主）いい。

のように「直積を反対称化したもの」として定義する。くさび積はそのうち反対称な成分だけを残すので、 $\frac{N(N-1)}{2}$ 成分の量である。これと双対な量は

$$\frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \right| \otimes \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j} \right| - \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j} \right| \otimes \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \right| \right) \quad (1.10-8)$$

になる（係数 $\frac{1}{2}$ が必要である）。

二つの 1-form のくさび積は

$$\begin{aligned} A_{\wedge} B_{\cdot} &= A_{\textcolor{blue}{i}} \overbrace{|dx^i\rangle}^{\textcolor{blue}{i}} \wedge B_{\textcolor{brown}{j}} \overbrace{|dx^j\rangle}^{\textcolor{brown}{j}} = A_{\textcolor{blue}{i}} B_{\textcolor{brown}{j}} \overbrace{|dx^i\rangle}^{\textcolor{blue}{i}} \wedge \overbrace{|dx^j\rangle}^{\textcolor{brown}{j}} \\ &= \frac{1}{2} (A_{\textcolor{blue}{i}} B_{\textcolor{brown}{j}} - A_{\textcolor{brown}{j}} B_{\textcolor{blue}{i}}) \overbrace{|dx^i\rangle}^{\textcolor{blue}{i}} \wedge \overbrace{|dx^j\rangle}^{\textcolor{brown}{j}} \end{aligned} \quad (1.10-9)$$

となる。 $\frac{1}{2}$ は 2-form の定義の中に出でてくる係数なのだとと思えば、これはベクトルの外積

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad (1.10-10)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad (1.10-11)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (1.10-12)$$

と同じ計算である。

2-form を

$$A_{..} = \frac{1}{2} A_{\textcolor{blue}{i}\textcolor{red}{j}} \overbrace{|dx^i\rangle}^{\textcolor{blue}{i}} \wedge \overbrace{|dx^j\rangle}^{\textcolor{red}{j}} = \underbrace{A_{\textcolor{blue}{i}\textcolor{red}{j}} |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle}_{i < j \text{ に限る}} \quad (1.10-13)$$

のように（係数となる A_{ij} を上のように当てはめる）定義しておくことにすると、角運動量は

$$L_{..} = x_{\wedge} P_{..} \quad \text{成分を書くと、} L_{ij} = x_i P_j - x_j P_i \quad (1.10-14)$$

のように書くことができる^{†47}。



我々は角運動量の z 成分を $L_z = xP_y - yP_x$ とか書くのだが、2-form であったことを思えば、 $L_{xy} = xP_y - yP_x$ と書くべきだったのだ。こっちの方が「角運動量の z 成分」が実際に表しているものに近いと思う。なお、ケプラーの惑星の運動の法則に現れる「面積速度」が角運動量に比例することを思い出すと、「どっちも 2-form」ということに納得が行く。

^{†47} 座標を x_μ のように考えたとき、これは共変ベクトルになってないので、実はこの形の角運動量を「どんな座標変換でも不变な 2-form」の例として出すのはよくない（座標変換を特殊なものに限る必要がある）。

1.11 3-form、そして n -form

3つの基底のくさび積も同様に定義してしまおう。

$$\begin{aligned}
 & |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle \\
 = & |dx^i\rangle \otimes |dx^j\rangle \otimes |dx^k\rangle + |dx^j\rangle \otimes |dx^k\rangle \otimes |dx^i\rangle + |dx^k\rangle \otimes |dx^i\rangle \otimes |dx^j\rangle \\
 - & |dx^i\rangle \otimes |dx^k\rangle \otimes |dx^j\rangle - |dx^j\rangle \otimes |dx^i\rangle \otimes |dx^k\rangle - |dx^k\rangle \otimes |dx^j\rangle \otimes |dx^i\rangle
 \end{aligned} \tag{1.11-1}$$

こう定義したので、「後ろから $\wedge |dx^k\rangle$ を掛ける」操作は、「直積の意味で掛け算した後で、すべての基底を反対称化する」操作になる。4つ以上になっても同様である。

というわけで同様に、これを基底とする量（3次元体積に付随する量）である 3-form は同様に、

$$A_{...} = \frac{1}{3!} A_{ijk} \underbrace{|dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle}_{i < j < k \text{に限る}} = \underbrace{A_{ijk} |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle}_{i < j < k \text{に限る}} \tag{1.11-2}$$

と決める。一般に

定義 7: n -form

$$\begin{aligned}
 A_{...} &= \frac{1}{n!} A_{i_1 i_2 \dots i_n} \underbrace{|dx^{i_1}\rangle \wedge |dx^{i_2}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{i_n}\rangle}_{i_1 < i_2 < \dots < i_n \text{に限る}} \\
 &= \underbrace{A_{i_1 i_2 \dots i_n} |dx^{i_1}\rangle \wedge |dx^{i_2}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{i_n}\rangle}_{i_1 < i_2 < \dots < i_n \text{に限る}}
 \end{aligned} \tag{1.11-3}$$

としておこう。



2-form と 1-form から 3-form を作る計算は

$$\begin{aligned}
 & (A_{ij} \underbrace{|dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle}_{i < j}) \wedge (C_k |dx^k\rangle) \\
 = & A_{ij} C_k \underbrace{|dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle}_{i < j} \quad \text{→ } (i, j, k \text{ の大小関係で分類)} \\
 = & A_{ij} C_k \left(\underbrace{|dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle}_{i < j < k} - \underbrace{|dx^i\rangle \wedge |dx^k\rangle \wedge |dx^j\rangle}_{i < k < j} + \underbrace{|dx^k\rangle \wedge |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle}_{k < i < j} \right) \quad \text{→ } (\text{添字を付け直し})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A_{ij}C_k - A_{ik}C_j + A_{jk}C_i) |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle \\
 &= (A_{ij}C_k + A_{jk}C_i + A_{ki}C_j) |dx^i\rangle \wedge |dx^j\rangle \wedge |dx^k\rangle
 \end{aligned} \tag{1.11-4}$$

サイクリック順に直した i < j < k

のようになり、やはり「可能な組み合わせが全部出てくる（ただし反対称に）」のである。

以下が成り立つ。

結果 1: くさび積の計算則

k -form を $A \dots$ のように書くとき、

$$\text{(反) 交換則 : } A \dots \wedge B \dots = (-1)^{mn} B \dots \wedge A \dots \quad m, n \text{ が両方奇数のときのみ反交換}$$

(1.11-5)

$$\text{結合則 : } (A \dots \wedge B \dots) \wedge C \dots = A \dots \wedge (B \dots \wedge C \dots)$$

(1.11-6)

$$\begin{aligned}
 \text{分配則 (線形性) : } & (\alpha A \dots + \beta B \dots) \wedge C \dots \\
 &= \alpha A \dots \wedge C \dots + \beta B \dots \wedge C \dots
 \end{aligned}$$

(1.11-7)

1.12 外微分

予告編ではスカラー (0-form) を微分する（結果が 1-form になる）演算として導入した外微分演算子だが、その時点では微小変位であった dx^μ を 1-form の基底 $|dx^\mu\rangle$ に変え、さらに

定義 8: 外微分演算子

$$\text{d} = |dx^\mu\rangle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \wedge \tag{1.12-1}$$

のように基底ベクトルとくさび積 \wedge を使って「 n -form を $(n+1)$ -form にする演算」として定義しなおす。

1-form を外微分すると、

$$\begin{aligned}
 |dx^\mu\rangle \frac{\partial}{\partial x^\mu} \wedge (A_\nu |dx^\nu\rangle) &= \partial_\mu A_\nu |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle
 \end{aligned} \tag{1.12-2}$$

となる。この幾何学的意味を述べておこう。

0-form $\phi(\{x\})$ は、場所 $\{x\}$ を 1 点指定すると一つの数量が返ってくるという関数である。それを外微分すると $\partial_\mu \phi(\{x\}) |dx^\mu\rangle$ になり、これは $|dx^\nu\rangle$ だけ離れた場所の ϕ の差を計算するものであった。つまりは「点を移動（広義の意味で変形）して差を取る」という計算である。

1-form $A_\nu |dx^\nu\rangle$ は、場所 $\{x\}$ を 1 点指定するとともに、方向を指定する（スロット $|dx^\nu\rangle$ に何かを代入する）と一つの数量が返ってくる関数である。そして、基底に微小変位 dx^μ が代入されると、その微小変位に沿っての線積分となった。よってそれを外微分するということは「線を変形して差を取る」という量になる。



図 1-28 1-form の変形による差としての 2-form

具体的に、図 1-28 のように微小経路を変形する（ここで μ, ν は固定された添字で足し上げは行わない）。変形で走査された面積が、2-form の表現する面積である。図に描いた「差」を計算すると

$$\begin{aligned}
 &A_\mu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu + dx^\nu, \dots) dx^\mu - A_\mu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu, \dots) dx^\mu \\
 &- A_\nu(\dots, x^\mu + dx^\mu, \dots, x^\nu, \dots) dx^\nu + A_\nu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu, \dots) dx^\nu \\
 &= (A_\mu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu + dx^\nu, \dots) - A_\mu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu, \dots)) dx^\mu \\
 &\quad - (A_\nu(\dots, x^\mu + dx^\mu, \dots, x^\nu, \dots) - A_\nu(\dots, x^\mu, \dots, x^\nu, \dots)) dx^\nu \\
 &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\nu dx^\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (dx^\nu dx^\mu - dx^\mu dx^\nu)
 \end{aligned} \tag{1.12-3}$$

となる。最後に微小変位をまた基底に戻せば、外微分の結果の 2-form の出来上がりである。

1-form の表すのは線で、その線を「線の向く方向」とは違う方向^{†48}へと変位させて差を取る、という計算をここで行っている。

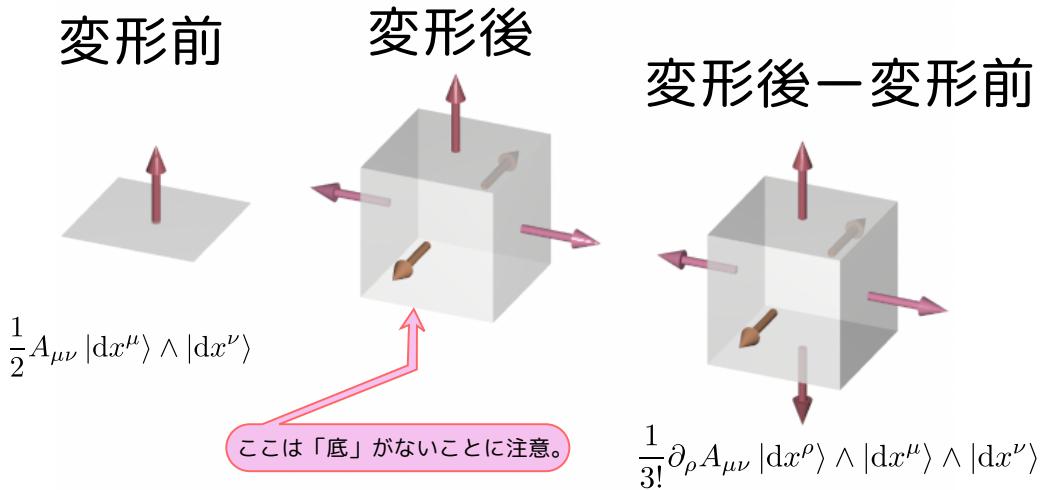


図 1-29 2-form の変形と外微分

2-form の外微分で 3-form を作るときも同様で、面を「面の向き」^{†49}とは違う方向へ変位させて差を取る（走査の跡は立体）。

n -form も同様である（ただ、図を描くのは難しい）。4-form までを成分で書いておくと

$$d\phi = \partial_\mu \phi |dx^\mu\rangle \quad (1.12-4)$$

$$dA = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \quad (1.12-5)$$

$$dB.. = \frac{1}{3!} (\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle \quad (1.12-6)$$

$$dC... = \frac{1}{4!} (\partial_\mu C_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu C_{\rho\lambda\mu} + \partial_\rho C_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda C_{\mu\nu\rho}) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle \wedge |dx^\lambda\rangle \quad (1.12-7)$$

となる。係数はサイクリックな和になるが、奇数 form のときは成分ごとに符号が変わり、偶数 form では変わらない。

「外微分」というのは「 n -form が付与された n 次元微小物体」を用意して、その n 次元のさらに $\langle \text{外} \rangle$ へと変形を行って差を取る、という微分だと考えると、名前にも合致する。

†48 くさび積が反対称な積であることが、次の変位が「違う方向」を向くことを保証している。

†49 ここで言う「面の向き」は「法線ベクトルの向き」ではなく、「面に沿った向き（2方向）」のこと。

外微分の重要な性質が

結果 2: 外微分は冪零

任意の次数の n -form に対し、以下が成り立つ。

$$\text{d.}(\text{d.}A\ldots) = 0 \quad (1.12-8)$$

である。実際書き下してみると、

$$\begin{aligned} & \left| \text{d}x^{\mu} \right| \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \wedge \left(\left| \text{d}x^{\nu} \right| \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \wedge A\ldots \right) \\ &= \left| \text{d}x^{\mu} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu} \right| \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A\ldots \right) \end{aligned} \quad (1.12-9)$$

↓ (順番を変えて)

となるわけであるが、 $\mu \leftrightarrow \nu$ に対して $\left| \text{d}x^{\mu} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu} \right|$ の部分は反対称、 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ の部分は対称なので結果は 0 である。

結果 3: 外微分の分配則

$$\text{d.} (A\ldots \wedge B\ldots) = \left(\text{d.} A\ldots \right) \wedge B\ldots + (-1)^m A\ldots \wedge \left(\text{d.} B\ldots \right) \quad (1.12-10)$$

これは A, B が 1-form のときは $\text{d.}(A\ldots \wedge B\ldots) = (\text{d.}A\ldots) \wedge B\ldots - A\ldots \wedge (\text{d.}B\ldots)$ ^{†50} で、ベクトル解析で習う式 $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\text{rot } \vec{B})$ になる。

1.13 内部積

ここまで考えた外積や外微分は form の階数を上げる (n -form $\rightarrow n+1$ -form) 操作だった。逆に下げる方の操作として内積、一般的には内部積がある。内部積は、ここまで「スロットに入れる」と表現してきた操作であると言ってよい。

(1.7-15) で、1-form とベクトルの内積を考えたが、 n -form $B\ldots$ とベクトル $A\cdot$ の「内部積」を

$$\begin{aligned} \text{I}(A\cdot)B\ldots &= \text{I}(A\cdot) \left(\frac{1}{n!} B_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \left| \text{d}x^{\nu_1} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu_2} \right| \wedge \dots \wedge \left| \text{d}x^{\nu_n} \right| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} A^{\nu_j} \frac{1}{n!} B_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j \dots \nu_n} \left| \text{d}x^{\nu_1} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu_2} \right| \wedge \dots \wedge \left| \text{d}x^{\nu_{j-1}} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu_j} \right| \wedge \left| \text{d}x^{\nu_{j+1}} \right| \wedge \dots \wedge \left| \text{d}x^{\nu_n} \right| \end{aligned} \quad (1.13-1)$$

ν_j の項のみを抜いた

†50 d. が $A\cdot$ を飛び越えるときにマイナス符号が出る。

†51 $B\ldots$ の \dots は「ここに \cdot が n 個ありますよ」という意味。

n

のように定義しよう^{†52}。

♥ $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\lambda} A^\nu \right| dx^\mu \wedge dx^\nu \rangle$ と n -form に含まれる全ての $|dx^{\nu_n}\rangle$ との内積を順番に取っていく (n 番目の基底との内積には $(-1)^{n-1}$ をつける)。

と考えてもよいし、

♥ n -form の持つ n 個のスロットに A^ν を順番に代入していく操作 (ただし左から偶数番目のスロットに代入するとき、つまり基底を奇数回飛び越すときは (-1) をつける)。

だと考えてもよい。



2-form の場合は

$$\mathcal{U}(A^\cdot) \left(\frac{1}{2} B_\mu^\nu |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \right) = \frac{1}{2} \left(A^\lambda B_\lambda^\nu |dx^\nu\rangle - A^\lambda B_\mu^\lambda |dx^\mu\rangle \right) = A^\lambda B_\lambda^\nu |dx^\nu\rangle \quad (1.13-2)$$

$|dx^\mu\rangle$ を消した項 $|dx^\nu\rangle$ を消した項

特にこの 2-form が 1-form と 1-form のくさび積であった場合は

$$\mathcal{U}(A^\cdot) (B_\mu^\nu C_\nu^\rho |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle) = A^\lambda B_\lambda^\nu C_\nu^\rho |dx^\rho\rangle - B_\nu^\lambda A^\lambda C_\lambda^\nu |dx^\nu\rangle \quad (1.13-3)$$

であり、3-form の場合は

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}(A^\cdot) \left(\frac{1}{3!} B_{\mu\nu\rho}^\lambda |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle \right) \\ &= \frac{1}{3!} \left(A^\lambda B_\lambda^\nu |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle - A^\lambda B_\mu^\lambda |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle + A^\lambda B_\nu^\lambda |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle \right) \\ & \quad |dx^\mu\rangle \wedge \text{を消した項} \quad \wedge |dx^\nu\rangle \text{を消した項} \quad \wedge |dx^\rho\rangle \text{を消した項} \\ &= \frac{1}{2} A^\lambda B_\lambda^\nu |dx^\nu\rangle \wedge |dx^\rho\rangle \end{aligned} \quad (1.13-4)$$

となる。

1.14 1-form の積分と Stokes の定理

†52 本講義では、内部積を表現する記号である $\mathcal{U}(\cdot)$ は、あえて大きな文字を使って普通の i や i と区別がつくようにした。

1.14.1 Stokes の定理 (1-form 版)

1-form は「線積分してこそ意味がある量」なのだが、その線積分に関して、一般的に以下が成り立つ。

結果 4: Stokes の定理 (1-form 版)

$$\int_S \text{d}A = \int_{\partial S} A. \quad \text{d}A \quad \text{A.} \quad (1.14-1)$$

記号 ∂S は「 S の境界」を意味する^{†53}。

つまり「 $\text{d}A$ の面積積分は、その面積の外周での A の線積分」が言える。これを「Stokes の定理」と呼ぶ。

➡ 少し長くなるが Stokes の定理の説明をしておく。 $\text{d}A$ は 2-form で成分が二つの足を持つており、 N 次元なら $\frac{N(N-1)}{2}$ の成分があるが、そのうち xy 成分をまず考えることにしよう。

左辺を成分で書くと

$$\int_S dx dy (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \quad (1.14-2)$$

である。

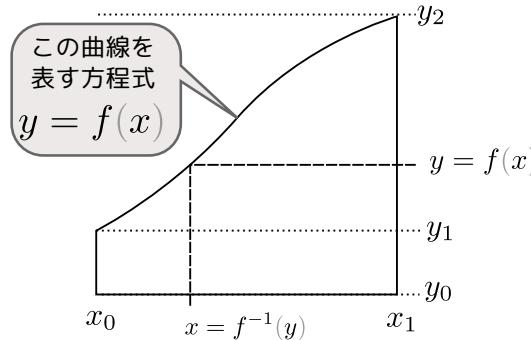


図 1-30

ここでまず、図 1-30 のような領域で (1.14-2) の積分を行う。積分は

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{f(x)} (\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

または、 $\left(\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{f^{-1}(y)}^{x_1} dx \right) (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \quad (1.14-3)$

^{†53} この意味で記号 ∂ を使うときは、「偏微分記号」ではなく「境界作用素」である。「境界作用素には境界作用素用の新しい記号作ればいいのに」と思わないでもない。

となる。

(1.14-3) の上の式の積分 $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{f(x)} dy$ は  のような積分 (y 積分が先、 x 積分が後) を、

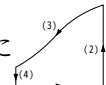
下の式の積分 $\left(\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{f^{-1}(y)}^{x_1} dx \right)$ は  のような積分 (x 積分が先、 y 積分が後) である。

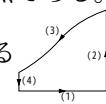
被積分関数のうち $\partial_x A_y$ の方を「 x 積分が先」で $\partial_y A_x$ の方を「 y 積分が先」で 積分を実行すると、この操作は「微分して積分」の操作となり、

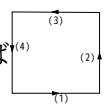
$$-\int_{x_0}^{x_1} dx (A_x(x, f(x)) - A_x(x, y_0)) + \int_{y_0}^{y_1} dy (A_y(x_1, y) - A_y(x_0, y)) + \int_{y_1}^{y_2} dy (A_y(x_1, y) - A_y(f^{-1}(y), y)) \quad (1.14-4)$$

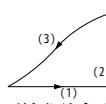
と容易に積分ができる。この式を少々並べ替えたり積分の向きを変えたりすることにより、

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} dx A_x(x, y_0)}_{(1)} + \underbrace{\int_{y_0}^{y_2} dy A_y(x_1, y)}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_0} dx A_x(x, f(x))}_{(3)} + \underbrace{\int_{y_2}^{y_1} dy A_y(f^{-1}(y), y)}_{(4)} + \int_{y_1}^{y_0} dy A_y(x_0, y) \quad (1.14-5)$$

と整理する。この式 (1.14-5) は、1-form $A = A_x dx + A_y dy$ の基底の部分 (スロット) に  の経路に沿っての dx, dy を代入していった結果としての線積分になっている。経路 (1) では y が一定なので $dy = 0$ となって $A_y dy$ の項が消失する。経路 (2) と (4) では x が一定なので $dx = 0$ となって $A_x dx$ の項が消失する。経路 (3) に関しては x も y も単調減少するので、それぞれに分けて積分を行っている。関数の引数 (積分している地点) が一方は $(x, f(x))$ 、もう一方は $(f^{-1}(y), y)$ となっているが、これらは同一点である。

さて我々は今特別な形である  に対して Stokes の定理を示した。さらに特別な形として、

経路 (3) の関数 $f(x)$ を定数関数に選べば  のような経路でも同様であることはすぐわかる。

また、経路 (4) の部分が長さ 0 になるように選べば、 のような経路でも同様とわかる。

以上のような領域 (境界の曲線が単調増加もしくは単調減少な関数で表現できるという条件を置いた) で証明できていれば、より複雑な曲線に囲まれた領域に対しても、曲線が単調増加もしくは単調減少するような領域の「部品」に分けて考えることで証明が可能である (図 1-31)。
→ p53

複雑な領域

各々が単調増加／減少な
関数の曲線で囲まれるように分割

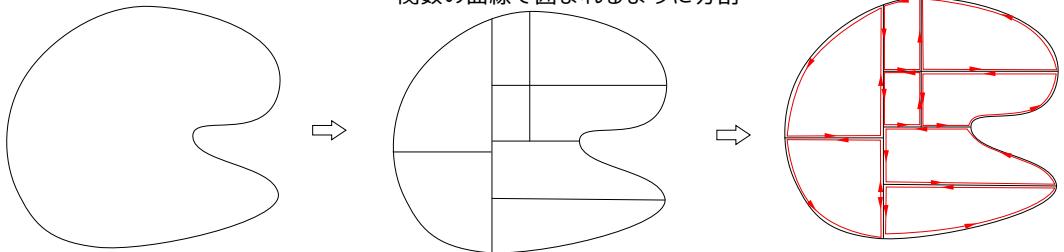


図 1-31

ここでは 2 次元面内にある経路の場合しかやっていないが、 N 次元内にあるループ経路であっても同様にして Stokes の定理は証明できる。



ここで「 N 次元内にあるループ経路を ∂S とした場合、 S の取り方はいろいろあるのでは？？」と心配になった人もいるかもしれないが、どの S の取り方でも結果は同じになることが後でわかるので心配ない。

→ p59

1.14.2 closed な 1-form の積分は経路によらない

もしも(1.9-5)の $\int_P^Q A.$ の 1-form が $d.A. = 0$ を満たす場合 (このとき「 $A.$ は closed な 1-form だ」と言う)、この積分は経路の形によらない。

なぜなら、始点と終点が等しい二つの線積分 $\int_P^Q A.$ の差は引き算する方の向きをひっくり返して足すことで $\int_P^Q A.$ のようなループになる。つまり $\int_P^Q A.$ となるが、closed な 1-form ならば Stokes の定理により、任意の境界線領域 ∂S (つまりはループ) に対して $\int_{\partial S} A. = 0$ になる。

closed な 1-form の例としては、 $A. = d.\phi$ のように 0-form の外微分 (全微分と言っても同じ) になっている場合がある (このとき「 $A.$ は exact な 1-form だ」と言う)。

$$\int_P^Q d.\phi = \int_P^Q \partial_{\mu} \phi dx^{\mu} = \left[\phi(x) \right]_{x=x_Q}^{x=x_P} = \phi(x_Q) - \phi(x_P) \quad (1.14-6)$$

のように積分の端点での値の差が積分結果となり、確かに経路の形によらない。

exact な 1-form は常に closed だが、closed な 1-form が exact かどうかはわからない。考えている空間が「可縮」つまり「空間内の任意のループを連続的に 1 点に縮めることができる」場合には closed な 1-form は exact である (ポアンカレの補題)。

可縮でない空間にある 1-form の例 (よってポアンカレの補題が効かない) としては、

$A. = -\frac{y}{x^2+y^2} |dx\rangle + \frac{x}{x^2+y^2} |dy\rangle$ がある。この 1-form は

$$\begin{aligned} \text{d.} A. &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \\ &= \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) |dx\rangle \wedge |dy\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.14-7)$$

となるので closed っぽく見えるし、この 1-form は $d\theta$ と書くことができる。「それなら exact じゃないか」と思うかもしれないが、どっこい、 θ は原点では定義されてない座標なので、「原点を除けば exact」である（そもそも最初の形でも分母に x^2+y^2 があるので原点では定義されてない）。

原点では定義されてないので、原点をまたぐ経路変更をすると積分結果が変化する。ゆえに、原点を回るような積分をすると答えは 0 ではない。実際、

$$\oint A. = \oint d\theta \quad (1.14-8)$$

だから、積分経路が原点を反時計回りに一周するごとに 2π という値が出てしまう。電磁気ではアンペールの貫流則として知られている現象である（電流の周りを回る線積分では、磁場 1-form H の積分が 0 でない）。



ところで今 2-form が 1-form の全微分で書けている場合（2-form が exact な場合）について $\int_S \text{d.} A. = \int_{\partial S} A.$ が成り立つという話をしたのだが、となると n -form の n を増やしたり減らしたりしたくなるところだ。減らす方はすぐにできるのでやってみると、

$$\int_L \text{d.} \phi = \int_{\partial L} \phi \quad (1.14-9)$$

である。 L はある曲線で、 ∂L はその境界（始点と終点）である。これはつまり、

$$\int_P^Q \text{d.} \phi = \phi_Q - \phi_P \quad (1.14-10)$$

ある曲線

というお馴染みの式（微分積分学の基本定理）である。

1.15 複素積分と微分形式

複素積分を使うと難しい積分ができるのは物理をやる上でとてもありがたい事実なのだが、複素積分が役に立つ理由は前節で考えた「closed な 1-form の線積分は経路によらない」なのである。

複素積分を使うときは、まず計算したい実数の積分

$$\int dx f(x) \quad (1.15-1)$$

の変数を $x \rightarrow z = x + iy$ と複素化する。当然、それと同時に積分測度も $dx \rightarrow dz = dx + idy$ とする。 \int を外して（すなわち、積分前の 1-form として）書くと

$$f(x)dx \rightarrow f(x + iy)(dx + idy) \quad (1.15-2)$$

である。これを 1-form として

$$f_1 = f(x + iy)|dx\rangle + i f(x + iy)|dy\rangle \quad (1.15-3)$$

とみたとき、 f_1 は closed である（つまり、 $\text{d}f_1 = 0$ ）。外微分してみると、

$$\begin{aligned} \text{d}f_1(x + iy) &= (\partial_x (if(x + iy)) - \partial_y (f(x + iy))) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \\ &\quad \text{f.の } y \text{ 成分} \quad \text{f.の } x \text{ 成分} \\ &= (if'(x + iy) - if'(x + iy)) |dx\rangle \wedge |dy\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.15-4)$$

となって、確かに 0 になる ($f(x + iy)$ を y で微分するのと、 x で微分した後で i を掛けることは結果が同じになることに注意)。

つまり、1 変数関数だった $f(x)$ を $x \rightarrow x + iy$ の置き換えによってあえて 2 変数関数にしてやる（このように実関数を複素関数に格上げすることは「解析接続」と呼ばれる手法の例）と、

$$\underbrace{f(x)dx}_{\substack{\text{1 変数の空間の} \\ \text{1-form}}} \longrightarrow \underbrace{f(x + iy)dx + if(x + iy)dy}_{\substack{\text{2 変数の空間の} \\ \text{1-form}}} \quad (1.15-5)$$

となる。この 2 変数の空間の 1-form は自動的に closed なものになる。そして、closed な 1-form の積分は経路によらない。よって、 (x, y) の 2 次元面（ $z = x + iy$ の複素平面）の上での（任意の）関数 $f(z)$ の積分は経路によらなくなる。

この「余計な（と思える）座標を導入することで、経路が変形できるようにする」というのはうまい考え方で、ゲージ理論の量子化などのときも <使える> 手段なのである。

ただしこの「経路によらない」には「例外」があって、「その点を周回すると $\oint f(z) dz$ が 0 でない点」が存在する可能性があるので、その場所を乗り越えて経路を変形することはできない。その例外が「特異点」で、特に大事な特異点が「1 次の 極」である。

まず、ある点 $z = a$ のまわりで $f(z)$ が

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{(n)}(a) (z - a)^n \quad (1.15-6)$$

のようにローラン展開されているとしよう。 a の周りを半径 R で周回するように（ $z = a + Re^{i\theta}$ として、 $\theta = 0 \rightarrow 2\pi$ ）積分するとすると、そのときの積分測度は $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ になって、

$$\oint_{\substack{\text{z=a} \\ \text{の周り}}} f(z) dz = iR \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{(n)}(a) (R e^{i\theta})^n \quad (1.15-7)$$

となる。この積分は、 $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} = 0$ ($n = -1$ 以外) であることから $n = -1$ の項のみが残って結果は

$$2\pi i\alpha^{(-1)} \quad (1.15-8)$$

となる。この $\alpha^{(-1)}$ のことを「留数」と呼ぶ。

複素積分で幸せになれる例として、

$$(-\Delta_x + m^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.15-9)$$

の解（これは後でも出てくるグリーン関数）を求めてみよう。Fourier 変換するために、

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{p} G(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad (1.15-10)$$

と置く。(1.15-9) の両辺を逆 Fourier 変換して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-\Delta_x + m^2) G(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ (|\vec{p}|^2 + m^2) G(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}'} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}'} \\ G(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{|\vec{p}|^2 + m^2} \end{aligned} \quad (1.15-11)$$

となるので、

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} \frac{1}{|\vec{p}|^2 + m^2} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad (1.15-12)$$

と求まる。この積分を実行する。まず極座標に変換して、 $d^3 \vec{p} = p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi$ とする。 θ 積分は $t = \cos \theta$ とすることで、 $\int_0^\pi d\theta \sin \theta \rightarrow \int_{-1}^1 dt$ と変換される。 $\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') = p|\vec{x} - \vec{x}'| \cos \theta$ として、

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 dt \frac{p^2}{p^2 + m^2} e^{ip|\vec{x} - \vec{x}'|t} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} \left(e^{ip|\vec{x} - \vec{x}'|} - e^{-ip|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{ip|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (1.15-13)$$

これを複素積分に直し、 p が複素数だとする。本来の積分路は実軸上を $p = -\infty$ から $p = \infty$ まで（実際には半径 R でやっておいて $R \rightarrow \infty$ 極限を取る）だが、そこに $p = \infty$ から $p = -\infty$ をつなぐ半径 ∞ の半円 $\underbrace{\hspace{10em}}_{p=\infty}$ をつけたす。この半円の積分は実は 0 である（0 になるようなものを選んで付け足した）。なぜなら、積分路において p は無限に大きい正の虚数部 $i\infty$ を含むが、被積分関数は e^{ip} (正の数) を含み、これがゆえに 0 になる。

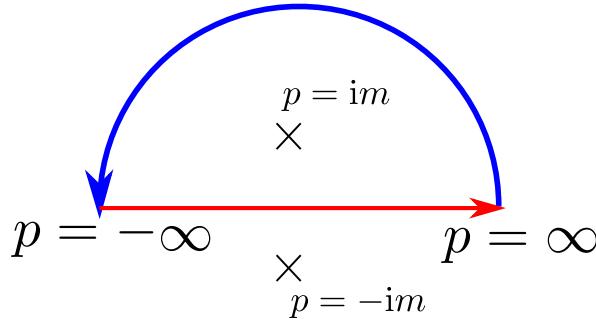


図 1-32 複素積分路

というわけでこの周回路による積分

$$\frac{i}{(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \oint dp \frac{p}{(p - im)(p + im)} e^{ip|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.15-14)$$

を行う。 $p = im$ の極だけが結果に寄与して、 $2\pi i$ を掛けた上で、被積分関数の $\frac{1}{p - im}$ の係数に $p = im$ を代入したものが残り、

$$2\pi i \times \frac{-i}{(2\pi)^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{im}{im + im} e^{i \times im |\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-m |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.15-15)$$

が答えとなる。後で出てくる「△に対するグリーン関数」は上の式で $\xrightarrow{\text{p83}} m \rightarrow 0$ の極限を取ったものである。

1.16 2-form の積分（面積分）と 1-form の外微分

幾何学的に考えるならば、2-form を特定の面（以下、 S と書く）で足し上げる操作も考えられる。

$$\int_S B_{..} = \frac{1}{2} \int_S B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.16-1)$$

上の計算の中では、 S を微小面積に分割して、その各々の微小面積に分布している $B_{..}$ が足し上げてられている。

では前節の最後で書いた「 n を増やす」をやってみる。この S が 3 次元領域 V の境界 ∂V であったとして、

結果 5: Stokes の定理 (2-form 版)

$$\int_{\partial V} B_{..} = \int_V d.. B_{..} \quad (1.16-2)$$

が成り立つ。よってこの $B_{..}$ が closed であった場合、この積分は 0 になる。

当然、2-form が exact であった場合（つまり $B_{..} = d.. A_{..}$ であった場合）も ∂V での積分は 0 になる。

なお、 m -form と「 n -form の外微分」($n+1$ -form になる) のくさび積が積分されているとき、つまり、

$$\int \frac{1}{m!} A_{\mu_1 \dots \mu_m} |dx^{\mu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\mu_m}\rangle \wedge \partial_p \frac{1}{(n+1)!} B_{\nu_1 \dots \nu_n} |dx^{\nu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_n}\rangle \quad (1.16-3)$$

のような量は、部分積分により、

$$- \int \frac{1}{m!} \partial_p A_{\mu_1 \dots \mu_m} |dx^{\mu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\mu_m}\rangle \wedge \frac{1}{(n+1)!} B_{\nu_1 \dots \nu_n} |dx^{\nu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_n}\rangle \quad (1.16-4)$$

になるわけだが、さらに基底部分の並べ直しにより、

$$-(-1)^m \int \frac{1}{(m+1)!} \partial_p A_{\mu_1 \dots \mu_m} |dx^{\mu_1}\rangle \wedge |dx^{\mu_2}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\mu_m}\rangle \wedge \frac{1}{n!} B_{\nu_1 \dots \nu_n} |dx^{\nu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_n}\rangle \quad (1.16-5)$$

となる。短く書けば

$$\int \underset{m}{\text{A}} \dots \underset{n}{\text{B}} \dots = -(-1)^m \int \text{d} \underset{m}{\text{A}} \dots \underset{n}{\text{B}} \dots \quad (1.16-6)$$

である（部分積分による符号 -1 と、 d が m -form を飛び越えることによる符号 $(-1)^m$ がつく）。

1.16.1 n -form に対する Stokes の定理

微分形式をつかってまとめて言うと、 n -form である $A \dots$ が closed であるとき（つまり $\text{d} A \dots = 0$ であるとき）、 $\int A \dots$ は積分境界には依存するが積分経路に依らない。つまり、

結果 6: Stokes の定理 (n -form 版)

$$\int_V \text{d} \underset{0}{A} \dots = \int_{\partial V} A_{\nu_1 \dots \nu_n} |dx^{\nu_1}\rangle \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_n}\rangle \quad (1.16-7)$$

が成り立つ。

 この結果を眺めていると、あたかも「 V に掛かった ∂ 演算子を外して $A \dots$ の方に持っていく（あたかも部分積分のときにやったように）と、 d になる」という式のように見えてくる。

ところで、 $(\text{d} \text{.})^2 = 0$ である（恒等的に）。ならば、

$$\int_V \text{d} (\text{d} \text{.} A \dots) = \int_{\partial V} \text{d} \text{.} A \dots = \int_{\partial(\partial V)} A \dots = 0 \quad (1.16-8)$$

が（恒等的に）成り立ちそうだ。つまりいかなる領域をもってきても ∂^2 を掛けると 0 になる。これは「境界には境界はない」ということなのである。とりあえず 3 次元までなら図を描いて実感できるのでやってみよう。

保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ があるとき、ある面積を通して流れ出す J を計算する積分

$$\int_S J_\mu dS^\mu \quad (1.16-9)$$

は積分領域 S の選び方に依らず、その領域の境界だけで決まる—というのは物理でよく使う法則であるが、これも Stokes の定理から保証されるわけである。

1.17 Levi-Civita 記号と Hodge dual

1.17.1 Hodge dual の心

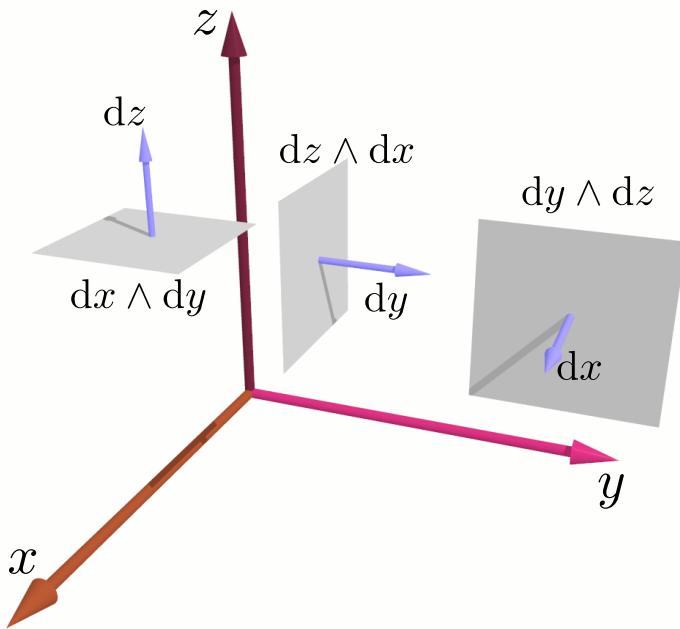


図 1-33 向きを表現する 1-form と
面積を表現する 2-form

3 次元で面積がベクトルとして考えることができたことを思い出すと、3 次元では 1-form (ベクトル) \leftrightarrow 2-form (面積) の対応関係がある (図 1-33 を参照)。

$$A. = \quad A_x |dx\rangle \quad + A_y |dy\rangle \quad + A_z |dz\rangle \quad (1.17-1)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$A.. = \quad A_{yz} |dy\rangle \textcolor{brown}{\wedge} |dz\rangle \quad + A_{zx} |dz\rangle \textcolor{brown}{\wedge} |dx\rangle \quad + A_{xy} |dx\rangle \textcolor{brown}{\wedge} |dy\rangle \quad (1.17-2)$$

という対応関係を見て考えると、その操作は「 $|dx\rangle$ が与えられたら、「 $|dx\rangle$ 以外を並べたものを返す」ような操作であろう。面を考えてその面を通り抜ける流れを考えているのが $|dx\rangle \wedge |dy\rangle$ を基底とする書き方で、どの方向に流れているかを考えているのが $|dz\rangle$ を基底する書き方である。

 このような操作（「Hodge dual」と呼ぶ）を N 次元で定義していこう。そのためには、Levi-Civita の記号をまず定義する。

1.17.2 2 次元と 3 次元の Levi-Civita 記号

まず 2 次元の場合を Levi-Chivita の記号 $\epsilon_{\mu\nu}$ の全成分を書こう。

$$\epsilon^{12} = 1, \epsilon^{21} = -1, \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 \quad (1.17-3)$$

これは 2 つのルールを設定すると決まる。一つは「添字に対して反対称であること」、もう一つは「 $\epsilon^{12} = 1$ であること」である。

行列で表示するなら、

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{11} & \epsilon^{12} \\ \epsilon^{21} & \epsilon^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17-4)$$

である。

3 次元なら、二つのルールのうち後者を $\epsilon^{123} = 1$ に修正して、

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1, \quad \epsilon^{132} = \epsilon^{213} = \epsilon^{321} = -1, \quad \text{それ以外は } 0 \quad (1.17-5)$$

となる。

これらを使って行列式を

$$\text{2 次元: } \det \mathbf{A} = \epsilon^{\textcolor{red}{ij}} \textcolor{blue}{A}_{1\textcolor{blue}{i}} \textcolor{blue}{A}_{2\textcolor{red}{j}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\textcolor{red}{ij}} \epsilon^{\textcolor{magenta}{mn}} \textcolor{blue}{A}_{\textcolor{blue}{m}\textcolor{blue}{i}} \textcolor{blue}{A}_{\textcolor{red}{n}\textcolor{red}{j}} \quad (1.17-6)$$

$$\text{3 次元: } \det \mathbf{A} = \epsilon^{\textcolor{red}{ijk}} \textcolor{blue}{A}_{1\textcolor{blue}{i}} \textcolor{blue}{A}_{2\textcolor{red}{j}} \textcolor{blue}{A}_{3\textcolor{red}{k}} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\textcolor{red}{ijk}} \epsilon^{\textcolor{magenta}{mnp}} \textcolor{blue}{A}_{\textcolor{blue}{m}\textcolor{blue}{i}} \textcolor{blue}{A}_{\textcolor{red}{n}\textcolor{red}{j}} \textcolor{blue}{A}_{\textcolor{red}{p}\textcolor{red}{k}} \quad (1.17-7)$$

のように表現することができる（後で考える任意次元でも同様である）。

1.17.3 任意の時空での Levi-Civita 記号

任意の次元に対しては、以下のように定義する。

定義 9: 任意の時空での Levi-Civita 記号

$$\epsilon_{(1)}^{12\cdots N} = 1 \quad \text{で、全ての添字に関して反対称} \quad (1.17-8)$$

括弧つき添字 (1) の意味は後で説明する。また別の記号

$$\text{sgn} \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_N \\ b_1, b_2, \dots, b_N \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & (a_1, a_2, \dots, a_N) \text{ が } (b_1, b_2, \dots, b_N) \text{ の偶置換} \\ -1 & (a_1, a_2, \dots, a_N) \text{ が } (b_1, b_2, \dots, b_N) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{どちらでもない} \end{cases} \quad (1.17-9)$$

を使うと、

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \\ 1, 2, \dots, N \end{pmatrix} \quad (1.17-10)$$

である。

どの座標系でもこの記号の成分が上で定義された数値 (1 か -1 か 0) になるためには、座標変換 $x^{\cdot} \rightarrow X^{\cdot}$ によってこの記号は

$$\underbrace{\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}}_{X \cdot \text{座標系}} = \det \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \underbrace{\frac{\partial X^1}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial X^2}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial X^N}{\partial x^{\nu_N}}}_{\det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)} \epsilon_{(1)}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} \quad (1.17-11)$$

のように変換されると定義する必要がある。最初の \det の項がなければこれは反変テンソルの変換である^{†54}。上につけた (1) はテンソルでなく「ウェイト 1 のテンソル密度」であることを表現している^{†55}。

この式を示すには、まず X^{\cdot} 座標系での $\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}$ が完全反対称性を持つことを示す。たとえば $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ の取替を行うと元の -1 倍となることはすぐに確認できる。となれば、後は X^{\cdot} 座標系でも $\epsilon_{(1)}^{12 \dots N} = 1$ であることを示せばよい。

$$\underbrace{\epsilon_{(1)}^{12 \dots N}}_{X \cdot \text{座標系}} = \det \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \underbrace{\frac{\partial X^1}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial X^2}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial X^N}{\partial x^{\nu_N}}}_{\det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)} \epsilon_{(1)}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} \quad (1.17-12)$$

を見ると、これが 1 になることがわかる。



このような、「どんな座標系でも同じ成分になる量」としては、Levi-Civita の他には Kronecker のデルタ δ_{ν}^{μ} がある。証明は、テンソルの共変な足と反変な足が互いに逆行列で変換することを使えば簡単である。

同様に、上で定義した $\epsilon_{(1)}$ と添字の上下関係をひっくり返した量である

$$\epsilon_{12 \dots N}^{(-1)} = 1 \quad \text{で、全ての添字に関して反対称} \quad (1.17-13)$$

^{†54} この \det 因子がつく変換をする量は「テンソル密度」と呼ばれる。見た目はテンソルに見えるが「厳密にはテンソルではない」ことに注意。 $\epsilon_{(1)}$ は「ウェイト 1 の反変テンソル密度」と言われる。 \det の因子の入り方が $\det \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)$ の 1 乗だからである（すぐ後にウェイト -1 の共変テンソル密度が出てくる）。同様にスカラーに見えるが変換にこの因子が掛かる量は「スカラー密度」と呼ばれる。

^{†55} 本により書き方は違う。つけない場合も多い。

を作る。この量はウェイト -1 の共変テンソル密度（添字 (-1) と (1) でウェイトの違いの区別がつくようにしている）で、変換性

$$\underbrace{\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}^{(-1)}}_{X \text{ 座標系}} = \det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial X^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial X^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial X^{\mu_N}} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)} \quad (1.17-14)$$

を持つ。この変換性で不变量となることは、テンソル部分の変換が $\epsilon_{(1)}$ と逆行列が掛かる形になっていることからすぐにわかる。

$\sqrt{|\det g|}$ と $|dx^{\mu_1}\rangle$ などを掛けて N -form にした量^{†56}

$$\sqrt{|\det g|} \frac{1}{N!} \underbrace{\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}^{(-1)} |dx^{\mu_1}\rangle}_{\text{スカラー}} \wedge |dx^{\mu_2}\rangle \wedge \cdots \wedge |dx^{\mu_N}\rangle = \sqrt{|\det g|} |dx^1\rangle \wedge |dx^2\rangle \wedge \cdots \wedge |dx^N\rangle \quad (1.17-15)$$

は N 次元体積要素で、座標変換に対して不变な量である（ $\epsilon_{(-1)}$ のウェイト -1 と $\sqrt{|\det g|}$ のウェイト 1 が消し合ってスカラーになる）。

$\sqrt{|\det g|}$ がウェイト 1 であることを説明しておこう。

$$\underbrace{g_{\mu\nu}}_{X \text{ 座標系}} = g_{\mu}^{\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial X^{\nu}} \quad (1.17-16)$$

という式を、左辺が行列で右辺が 3 つの行列の積であると考えて全体の行列式を計算すると、

$$\underbrace{\det g}_{X \text{ 座標系}} = \det g \left(\det \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \right)^2 \quad (1.17-17)$$

なる式が得られる。これは下付きの $g_{\mu\nu}$ の行列式 $\det g$ はウェイト 2 のスカラー密度であることを意味する。よって $\sqrt{|\det g|}$ はウェイト 1 のスカラー密度である。

 $\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)}$ の添字を $g^{\mu\nu}$ を使って上に上げた量

$$g^{\mu_1 \nu_1} \underbrace{g^{\mu_2 \nu_1}}_{\text{添字}} \cdots g^{\mu_N \nu_N} \underbrace{\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)}}_{\text{添字}} \quad (1.17-18)$$

は $\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}$ に一致するだろうか？—この量が添字 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ に関して反対称であることはすぐにわかるので、添字に $1, 2, \dots, N$ を代入した量が 1 になるかどうかを確認してみよう。すぐにわかるように、

$$g^{1 \nu_1} \underbrace{g^{2 \nu_1}}_{\text{添字}} \cdots g^{N \nu_N} \underbrace{\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)}}_{\text{添字}} \quad (1.17-19)$$

は、 $g^{\mu\nu}$ の \det である。 $g_{\mu\nu}$ の行列式を $\det g$ と書くのが慣例なので、計算結果は $\frac{1}{\det g}$ だ。ゆえに、

^{†56} この式の 1 行目の Levi-Civita 記号はなくてもよい。後ろの基底部部分だけで添え字の反対称性は出ているし、1 から N まで順に並んだときは係数が 1 になる。

結果 7: 上付き Levi-Civita と下付き Levi-Civita の関係

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N} = \det g \times g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \cdots g^{\mu_N \nu_N} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)} \quad (1.17-20)$$

が成り立つ。 $\epsilon^{(-1)}$ のウェイトを 1 にするために、ウェイト 2 の $\det g$ を掛けていると思えばよい。

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の場合は $\det g = -1$ であり、 $\epsilon_{(1)}^{txyz} = -g^{tt} g^{xx} g^{yy} g^{zz} \epsilon_{txyz}^{(-1)}$ (つまり、

$$\epsilon_{(1)}^{txyz} = \epsilon_{txyz}^{(-1)} = 1$$

$\epsilon^{(-1)}$ も $\epsilon_{(1)}$ の各成分は 1 か -1 である。ゆえに、その積も 1 か -1 になる。どちらになるかは並べ替えの回数で決まる。

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_N}^{(-1)} = \text{sgn} \begin{pmatrix} \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N \\ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N \end{pmatrix} \quad (1.17-21)$$

であるが、添字のうち前から k 個ずつを縮約すると、

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu_{k+1} \mu_{k+2} \cdots \mu_N} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k \nu_{k+1} \nu_{k+2} \cdots \nu_N}^{(-1)} = k! \text{sgn} \begin{pmatrix} \nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \cdots, \nu_N \\ \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \cdots, \mu_N \end{pmatrix} \quad (1.17-22)$$

のように、残った添字についての sgn の $k!$ 倍になる。

2 次元なら、

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2} \epsilon_{\nu_1 \nu_2}^{(-1)} = \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} - \delta_{\nu_2}^{\mu_1} \delta_{\nu_1}^{\mu_2} = \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2 \\ \nu_1, \nu_2 \end{pmatrix} \quad (1.17-23)$$

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2} \epsilon_{\mu_1 \nu_2}^{(-1)} = \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \quad (1.17-24)$$

3 次元なら、

$$\begin{aligned} \epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{(-1)} &= \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} - \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_2}^{\mu_3} + \delta_{\nu_2}^{\mu_1} \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_1}^{\mu_3} - \delta_{\nu_2}^{\mu_1} \delta_{\nu_1}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} + \delta_{\nu_3}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_1}^{\mu_3} - \delta_{\nu_3}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_3} \delta_{\nu_1}^{\mu_2} \\ &= \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \mu_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.17-25)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\mu_1 \nu_2 \nu_3}^{(-1)} &= 3\delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} - 3\delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_2}^{\mu_3} + \delta_{\nu_2}^{\mu_3} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} - \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} + \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_2}^{\mu_3} - \delta_{\nu_3}^{\mu_3} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \\ &= \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} = \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu_2, \mu_3 \\ \nu_2, \nu_3 \end{pmatrix} - \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_2}^{\mu_3} \end{aligned} \quad (1.17-26)$$

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \nu_3}^{(-1)} = 2\delta_{\nu_3}^{\mu_3} \quad (1.17-27)$$

となる。

1.18 Hodge dual

$N = k + \ell$ 次元において、 ℓ -form の成分 $A_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\ell}$ に $\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu_{k+1} \cdots \mu_{k+\ell}}$ と $\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k \nu_{k+1} \cdots \nu_{k+\ell}}^{(-1)}$ を以下のように掛ける。

$$\epsilon_{(1)}^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu_{k+1} \cdots \mu_{k+\ell}} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k \nu_{k+1} \cdots \nu_{k+\ell}}^{(-1)} A_{\mu_{k+1} \cdots \mu_{k+\ell}} = k! \ell! A_{\nu_{k+1} \cdots \nu_{k+\ell}} \quad (1.18-1)$$

となって、 $k! \ell!$ 倍されて元に戻る。ここで計算を分割して、

$$(*A_{(1)})^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = \frac{1}{\ell!} \epsilon_{(1)}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell A_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell} \quad (1.18-2)$$

$$A_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell} = \frac{1}{k!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}^{(-1)} \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell (*A_{(1)})^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad (1.18-3)$$

のように、 A を $*A_{(1)}$ にする^{†57} 操作と、その逆操作を作る。

添字が上付きになつたり下付きになつたりする（さらにテンソルになつたりテンソル密度になつたりする）。もうひとつ、(1.18-2) では ϵ の足のうち「前の方」にある $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k$ が「縮約されない足」で、(1.18-3) では「後ろの方」にある $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell$ の方が「縮約されない足」であるという点も同じではない。

以上を修正して、操作前も操作後も下付きの足を持ち、（操作前が k -form なら操作後は $(n - k)$ -form になる）2つの操作が同じルールで行われるように定義し直した記号を作ろう。

k -form の成分を以下のように ℓ -form の成分に対応させる ($k + \ell = N$ が考えている空間の次元)。つまり、「下の足（共変ベクトルの添字）」をいったん計量テンソルをつかって上げて反変ベクトルの添字にして、そこに下付き ϵ を掛けてまた下付きの足にする。このとき、更にウェイトを保つように（結果が共変テンソルになるように）、 $\sqrt{|\det g|}$ を掛ける。

$$(\star A)_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell} = \frac{\sqrt{|\det g|}}{k!} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell}^{(-1)} \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k g^{\mu_1 \rho_1} g^{\mu_2 \rho_2} \cdots g^{\mu_k \rho_k} A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k}$$

$$= \frac{\sqrt{|\det g|}}{k!} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\ell}^{(-1)} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k} \quad (1.18-4)$$

* と比較して、 $\sqrt{|\det g|}$ が掛かっていることと、足の上げ下げの操作も入っているところが違う^{†58}。

4 次元の Minkowski 空間^{†59}で、 $\epsilon_{txyz}^{(-1)} = 1$ のように選んでいる場合の \star を示しておくと、

$$\begin{aligned} \star A_{xyz} &= \epsilon_{xyzt} g^{tt} A_t = A_t, & \star A_{xyt} &= \epsilon_{xytz} g^{zz} A_z = A_z, \\ \star A_{yzt} &= \epsilon_{yzttx} g^{xx} A_x = A_x, & \star A_{zxt} &= \epsilon_{zxtty} g^{yy} A_y = A_y \end{aligned} \quad (1.18-5)$$

$$\star A_{xy} = \epsilon_{xyzt} g^{zz} g^{tt} A_{zt} = A_{zt}, \quad \star A_{xz} = \epsilon_{xzyt} g^{yy} g^{tt} A_{yt} = -A_{yt},$$

^{†57} (1.18-2) ではテンソルにテンソル密度（ウェイト 1）を掛けたので、結果はウェイト 1 のテンソル。それを₍₁₎ で表現した。

^{†58} Hodge dual の説明のときに足の上げ下げを考慮しなくてもいい例のみを書いている教科書が結構ある。そういう本では \star と $*$ の区別をしてない場合が多い。曲線座標を使うときには意識しておいた方がよい。

^{†59} この時空では、 $\det g = -1$ 。

$$\begin{aligned}
\star A_{xt} &= \underbrace{\epsilon_{xtyz} g^{yy} g^{zz}}_{-1 \ 1 \ 1} A_{yz} = -A_{yz}, \quad \star A_{yz} = \underbrace{\epsilon_{yzxt} g^{xx} g^{tt}}_{-1 \ 1 \ -1} A_{xt} = A_{xt}, \\
\star A_{yt} &= \underbrace{\epsilon_{ytxz} g^{xx} g^{zz}}_{1 \ 1 \ 1} A_{xz} = A_{xz}, \quad \star A_{zt} = \underbrace{\epsilon_{ztxy} g^{xx} g^{yy}}_{-1 \ 1 \ 1} A_{xy} = -A_{xy} \tag{1.18-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\star A_t &= \underbrace{\epsilon_{txyz} g^{xx} g^{yy} g^{zz}}_{1 \ 1 \ 1 \ 1} A_{xyz} = A_{xyz}, \quad \star A_x = \underbrace{\epsilon_{xyzt} g^{yy} g^{zz} g^{tt}}_{-1 \ 1 \ 1 \ -1} A_{yzt} = A_{yzt}, \\
\star A_y &= \underbrace{\epsilon_{yzxt} g^{xx} g^{yy} g^{tt}}_{-1 \ 1 \ 1 \ -1} A_{xzt} = A_{xyz}, \quad \star A_z = \underbrace{\epsilon_{zxyt} g^{yy} g^{zz} g^{tt}}_{-1 \ 1 \ 1 \ -1} A_{yzt} = A_{yzt} \tag{1.18-7}
\end{aligned}$$

となる。

この種の変換を、基底をつけて書くと

$$\begin{aligned}
&\star (A_t|dt\rangle + A_x|dx\rangle + A_y|dy\rangle + A_z|dz\rangle) \\
&= A_t|dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle + A_x|dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle + A_y|dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle + A_z|dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle \tag{1.18-8}
\end{aligned}$$

となる。つまり \star は基底の方を

$$\begin{aligned}
|dt\rangle &\rightarrow |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle, \quad |dx\rangle \rightarrow |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle, \\
|dy\rangle &\rightarrow |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle, \quad |dz\rangle \rightarrow |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle \tag{1.18-9}
\end{aligned}$$

とする変換だと考えてもよい（もちろん両方やっては駄目）。

1 という数 (0-form) の \star を取ると、

$$\sqrt{|\det g|} |dx_1\rangle \wedge |dx_2\rangle \wedge \cdots \wedge |dx_N\rangle \tag{1.18-10}$$

となって、これは体積要素そのものである。

上の式を見ると、1-form \rightarrow 3-form の \star をした後で 3-form \rightarrow 1-form の \star をすると元に戻る。一方、2-form \rightarrow 2-form の \star を 2 回やると、元の逆符号になる。

一般の ℓ -form でどうなるか見ておこう。

$$\begin{aligned}
(\star(\star A))_{\mu_1 \cdots \mu_\ell} &= \frac{|\det g|}{k! \ell!} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_\ell \nu_1 \cdots \nu_k}^{(-1)} \underbrace{g^{\nu_1 \rho_1} \cdots g^{\nu_k \rho_k}}_{\times \epsilon_{\rho_1 \cdots \rho_k}^{(-1)} \lambda_1 \cdots \lambda_\ell} \underbrace{g^{\lambda_1 \alpha_1} \cdots g^{\lambda_k \alpha_k}}_{A_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell}} \\
&= \frac{|\det g|}{k! \ell!} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_\ell \nu_1 \cdots \nu_k}^{(-1)} \times \frac{1}{\det g} \underbrace{\epsilon_{(1)}^{\nu_1 \cdots \nu_k \alpha_1 \cdots \alpha_\ell} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell}}_{\text{sgn} \left(\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell}{\mu_1, \dots, \mu_\ell} \right)} \tag{1.18-11}
\end{aligned}$$

ここで、足し上げられている $\nu_1 \cdots \nu_k$ の添字を前の方にまとめるため、

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_\ell \nu_1 \cdots \nu_k}^{(-1)} = (-1)^{k\ell} \epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_k \mu_1 \cdots \mu_\ell}^{(-1)} \tag{1.18-12}$$

とする。これにより、

$$\frac{|\det g|}{k! \ell! \det g} (-1)^{k\ell} \underbrace{\epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_k \mu_1 \cdots \mu_\ell}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\nu_1 \cdots \nu_k \alpha_1 \cdots \alpha_\ell} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell}}_{\text{sgn} \left(\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell}{\mu_1, \dots, \mu_\ell} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k\ell} \frac{|\det g|}{\ell! \det g} \text{sgn} \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \\ \mu_1, \dots, \mu_\ell \end{array} \right) A_{\alpha_1 \dots \alpha_\ell} \\
&= (-1)^{k\ell} \frac{|\det g|}{\det g} A_{\mu_1 \dots \mu_\ell}
\end{aligned} \tag{1.18-13}$$

符号因子

となる。上の例では、 $|\det g| = -1$ なので、 $k = \ell = 2$ のときは符号因子は $-$ 、 $k = 1, \ell = 3$ のときは符号因子は $+$ になる。

1-form の \star を取って（すると $N - 1$ -form ができる）、これと 1-form とのくさび積をつくると、

$$A_{\cdot \wedge} (\star B_{\cdot}) = \frac{\sqrt{|\det g|}}{(N-1)!} A_{\mu} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{N-1} \nu_N}^{(-1)} g^{\nu_N \rho} B_{\rho} |dx^{\mu}| \wedge |dx^{\nu_1}| \wedge |dx^{\nu_2}| \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_{N-1}}| \tag{1.18-14}$$

となる。ここで N 次元で N 個の基底が全部出てきたことになり、 A_{μ} と縮約されている $|dx^{\mu}|$ 以外の添字は $\epsilon^{(-1)}$ との縮約でつぶれている。ということは、 $\epsilon^{(-1)}$ のうち基底と縮約されていない ν_N が、 ρ と一致するしかない ($\nu_N = \mu$)。そのときに $\epsilon^{(-1)} = 1$ になり、

$$A_{\cdot \wedge} (\star B_{\cdot}) = \sqrt{|\det g|} g^{\mu \rho} A_{\mu} B_{\rho} |dx^1| \wedge |dx^2| \wedge |dx^3| \wedge \dots \wedge |dx^N| \tag{1.18-15}$$

となる。基底の並びを $|dx^1| \wedge |dx^2| \wedge |dx^3| \wedge \dots \wedge |dx^N|$ にした時点で $(N-1)!$ の数因子が出ることに注意せよ。

$g^{\mu \rho} A_{\mu} B_{\rho}$ の部分はスカラー、残りの因子は体積要素でスカラーだから、この式は全体としてスカラーになる。

後で出てくる、スカラー場のラグランジアン密度 $\frac{1}{2} \sqrt{|\det g|} g^{\mu \rho} \partial_{\mu} \phi \partial_{\rho} \phi$ に体積要素を掛けたものは $\frac{1}{2} \mathbf{d} \phi \wedge (\star \mathbf{d} \phi)$ と表現できる。つまり作用は $\frac{1}{2} \int \mathbf{d} \phi \wedge (\star \mathbf{d} \phi)$ である。

なお、2-form $A_{\cdot \cdot}, B_{\cdot \cdot}$ に関して同様の計算をすると、

$$\begin{aligned}
&A_{\cdot \cdot \wedge} (\star B_{\cdot \cdot}) \\
&= \frac{\sqrt{|\det g|}}{(N-2)! 2! 2!} A_{\mu \alpha} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{N-2} \nu_{N-1} \nu_N}^{(-1)} g^{\nu_{N-1} \rho} g^{\nu_N \beta} B_{\rho \beta} |dx^{\mu}| \wedge |dx^{\alpha}| \wedge |dx^{\nu_1}| \wedge |dx^{\nu_2}| \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_{N-2}}|
\end{aligned} \tag{1.18-16}$$

となるが、今度は (μ, α) と ν_{N-1}, ν_N のペアが一致（または片方をひっくり返したものが一致）したときに $\epsilon^{(-1)}$ が ± 1 になる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
A_{\cdot \cdot \wedge} (\star B_{\cdot \cdot}) &= \frac{\sqrt{|\det g|}}{4} A_{\mu \alpha} (B^{\mu \alpha} - B^{\alpha \mu}) |dx^1| \wedge |dx^2| \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_N}| \\
&= \frac{\sqrt{|\det g|}}{2} A_{\mu \alpha} B^{\mu \alpha} |dx^1| \wedge |dx^2| \wedge \dots \wedge |dx^{\nu_N}|
\end{aligned} \tag{1.18-17}$$

となる。これを使うと後で出てくる電磁場のラグランジアン密度は $-\frac{1}{2} F_{\cdot \cdot \wedge} (\star F_{\cdot \cdot})$ または $-\frac{1}{2} \mathbf{d} A_{\cdot \cdot} (\star (\mathbf{d} A_{\cdot \cdot}))$ と表現できる。微分形式を使わないテンソルによる表現は、 $-\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu \nu} F^{\mu \nu}$ である。

同様のことが N -form に対して言えて、 $A \dots \wedge (\star B \dots)$ は、 $A \dots$ と $B \dots$ の縮約 $\times \frac{\sqrt{|\det g|}}{N!}$ になる。

外微分やくさび積は「テンソルの足が違うものを掛けていく」という操作になっているが、ここに \star が一発かまされると「テンソルの足が同じものを掛けていく（縮約）」操作に化けると思えばよい。

1.19 余微分

 外微分という微分は便利なのだが、「常に \langle すでに n -form が持っている方向 \rangle とは違う方向で微分される」という点が「物理でよく出てくる同じ方向の微分を重ねる計算（ラプラスアンとかダランベルシアンとか）」とは異質なものになっている。となると「同じ方向の微分」も欲しくなる。それは \star 演算と外微分の組み合わせで出現する。

外微分は n -form $\rightarrow (n+1)$ -form を行う微分だったが、 \star 演算子を作ったことで、 $(n+1)$ -form $\rightarrow n$ -form になる微分を作ることができる。というのは \star 演算子は n -form を $(N-n)$ -form にするから、

$$n\text{-form} \xrightarrow{\star} (N-n)\text{-form} \xrightarrow{\text{d.}} (N-n+1)\text{-form} \xrightarrow{\star} (n-1)\text{-form}$$

という一連の操作で「微分しつつ次数を下げる」ことができる。この一連の動作を「余微分 (coderivative)」と呼ぶ^{†60}。記号として、 $\delta^{\star} = \star \text{d.} \star$ と書くことにしよう。

3 次元の 1-form に対するこの計算を書いておくと、

$$\begin{aligned} \delta^{\star} A_{\mu} |dx^{\mu}| &= \star \left(\text{d.} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{(-1)} g^{\nu_3 \mu} A_{\mu} |dx^{\nu_1}| \wedge |dx^{\nu_2}| \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \star \left(\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{(-1)} \partial_{\rho} \left(\sqrt{\det g} g^{\nu_3 \mu} A_{\mu} \right) |dx^{\rho}| \wedge |dx^{\nu_1}| \wedge |dx^{\nu_2}| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{(-1)} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{(-1)} \partial_{\rho} \left(\sqrt{\det g} g^{\nu_3 \mu} A_{\mu} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_{\rho} \left(\sqrt{\det g} g^{\rho \mu} A_{\mu} \right) \end{aligned} \tag{1.19-1}$$

となる。これは実は $\text{div } \vec{A}$ である。上の計算は 3 次元で行ったが、 N 次元でこれが成り立つことはすぐに確認できる。

^{†60} sine に対する cosine、tangent に対する cotangent のように、数学での co- という接頭詞は「反対側に作用する」という意味合いを持つことが多い。

$A = \mathbf{d}\phi$ の場合、上の式は

$$\delta^* (\mathbf{d}\phi) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\mu \left(\sqrt{\det g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) \quad (1.19-2)$$

となり、これはラプラシアンである。なお、さっき書いたスカラー場の作用から導かれる運動方程式は $\delta^* (\mathbf{d}\phi) = 0$ となるが、左辺はまさに上の式となる。

外微分は「違う座標での微分（これまでとは別の方向への微分）」を掛けていく計算だが、 \star が一発かまされることにより「同じ方向の微分」に化ける、というわけだ。

1.20 Lie 微分

微分演算子としての「ベクトル $X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 」による微分—つまりは「 X で表現される流れに沿った方向の変化を表現する微分」を Lie 微分と呼び、 X^μ 方向の微分を記号 \mathcal{L}_X で表す。

「なんちゃら微分」がいろいろあるが、

全微分 関数に対する微分で、特定の方向ではなく「あらゆる方向」への微分を表現したもの。

偏微分 ある座標の変化の方向の微分 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ または $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 。 「全微分の dx, dy の係数の部分」とでいろんな方向の微分が計算できる。

外微分 form に対する微分で、form の階数（基底の数）を増やす。つまり「これまで微分してなかった方向への微分をつけたす」感じ。

Lie 微分 変化の方向を X^μ で指定する。 $X \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 「ある座標の方向」とは限らない（対応する座標がない場合もある）。

のように違いがある。

Lie 微分も、座標系によらない量である（座標変換すると X^μ と $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ が連動して変換される）。ただし、Lie 微分に関しては、掛かる相手がスカラーなのかベクトルなのかによって形が変わる。

1.20.1 スカラーに対して

スカラー関数 $f(\{x^\cdot\})$ に対する X^μ 方向の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X f(\{x^\cdot\}) = X^\mu \underbrace{\frac{\partial f(\{x^\cdot\})}{\partial x^\mu}}_{\text{スカラー}} \quad (1.20-1)$$

である。この Lie 微分がスカラーに掛かる場合の式の意味するところは

$$\mathcal{L}_X f(\{x^\cdot\}) = X^\mu \underbrace{\frac{\partial f(\{x^\cdot\})}{\partial x^\mu}}_{\text{スカラー}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\{x^\cdot + \epsilon X^\cdot\}) - f(\{x^\cdot\})}{\epsilon} \quad (1.20-2)$$

であり、「 X^\cdot 方向に移動して f の値がどれだけ変化したかを測る」量になっている。

1.20.2 ベクトル場に対する Lie 微分

関数 f に微分演算子としてのベクトル $Y^{\cdot} = Y^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ を掛けた結果 $Y^{\cdot} f$ はスカラーであるから、この X^{\cdot} による Lie 微分は

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot} f) = X^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(Y^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \right) = X^{\mu} \left(\frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} + Y^{\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \quad (1.20-3)$$

であるが、一方「 Y^{\cdot} を掛ける」操作を後にして、

$$Y^{\cdot} \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(f) = Y^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(X^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \right) = Y^{\mu} \left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} + X^{\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \quad (1.20-4)$$

となる。この二つの引き算

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot} f) - Y^{\cdot} \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(f) = X^{\mu} \frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} - Y^{\mu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \quad (1.20-5)$$

は「ある微分演算子を f に掛けたもの」になっている。この量が $\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot})f$ だとすれば（つまり、ライプニツ則 $\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot} f) = \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot})f + Y^{\cdot} \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(f)$ が Lie 微分にも成り立つだとすれば）

$$\text{ベクトルに対して} \sim \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\cdot}) = \left(X^{\mu} \frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} Y^{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad (1.20-6)$$

$$\text{反変ベクトル成分に対して} \sim \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y^{\nu}) = X^{\mu} \frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} Y^{\mu} \quad (1.20-7)$$

となるのである。第 1 項は Lie 微分による「移動」によって起こる変化を表す項で、第 2 項は Lie 微分の結果として起こる「座標系の変更」による変化を表す項だと考えればよい。

第 2 項がつくのは、「ベクトルが微分したとき、移動先では座標軸が同じ向きを向いてない」ことを反映しているからだと考えてよい。「流れ」もしくは「座標変換」を表現するベクトルの成分 X^{μ} が定数であるとき（座標軸の向きが変わらないとき）は第 2 項は 0 である。

1.20.3 1-form に対する Lie 微分

1-form に対する Lie 微分については、（すでにベクトルの Lie 微分を知っているので）「1-form とベクトルの内積がスカラーであること」を使って定めよう。

$$\begin{aligned} A^{\mu} \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(B_{\mu}) &= \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(A^{\mu} B_{\mu}) - \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(A^{\mu}) B_{\mu} \\ &= X^{\nu} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} B_{\mu} + X^{\nu} A^{\mu} \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \left(X^{\nu} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - A^{\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) B_{\mu} \\ &= X^{\nu} A^{\mu} \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + A^{\nu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} B_{\mu} = A^{\mu} \left(X^{\nu} \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} B_{\nu} \right) \end{aligned} \quad (1.20-8)$$

とすると、

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\cdot}) = \left(X^{\mu} \frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Y_{\mu} \right) dx^{\nu} \quad (1.20-9)$$

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\nu}) = X^{\mu} \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Y_{\mu} \quad (1.20-10)$$

となる。この式も、第1項は「移動」によって起こる変化を表す項で、第2項は「座標軸の変更」によって起こる変化を表す項である。ベクトル場と1-formで「座標軸の変更」の影響が違うのでかかる行列も違う（添字の付き方に注意）。

1.20.4 Lie微分と外微分の関係

1-formに対する「微分」というと「外微分」もあった。外微分とLie微分の違いを見てみよう。1-formを外微分すると2-formになるが、1-formのLie微分は1-formである。結果がどちらも1-formになるように、0-form $X^{\mu} Y_{\mu}$ の外微分（結果は1-form）と、 Y_{\cdot} の X^{\cdot} 方向へのLie微分（こちらも結果は1-form）の差を比較してみる。

$$\begin{aligned}
 \text{d.}(X^{\mu} Y_{\mu}) - \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\cdot}) &= \partial_{\nu}(X^{\mu} Y_{\mu})|dx^{\nu}\rangle - \left(X^{\mu} \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Y_{\mu} \right) |dx^{\nu}\rangle \\
 &= \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Y_{\mu} + X^{\mu} \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - X^{\mu} \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Y_{\mu} \right) |dx^{\nu}\rangle \\
 &= X^{\mu} \left(\frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) |dx^{\nu}\rangle
 \end{aligned} \tag{1.20-11}$$

が結果であるが、これを見ると、 Y_{\cdot} の外微分

$\text{d.}Y_{\cdot} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} Y_{\nu} - \partial_{\nu} Y_{\mu}) |dx^{\mu}\rangle \wedge |dx^{\nu}\rangle$ に似た形が出現している。というか、内部積の定義を使えば X^{μ} と $\text{d.}Y_{\cdot}$ との内部積 $\times (-1)$ にちょうどなっている。つまり、式

$$\text{d.}(X^{\mu} Y_{\mu}) - \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\cdot}) = - \text{d.}(X^{\mu} Y_{\mu}) + \text{d.}(Y_{\cdot}) \text{d.}X^{\mu} \tag{1.20-12}$$

$$\text{順番を変えて、} \quad \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\cdot}) = \text{d.}(X^{\mu} Y_{\mu}) + \text{d.}(X^{\cdot}) \text{d.}Y_{\cdot} \tag{1.20-13}$$

を作ることができる。さらに、今は1-form Y_{\cdot} に対する演算として計算したが、 n -form Y_{\dots} に対しても

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}}(Y_{\dots}) = \text{d.}(\text{d.}(X^{\cdot})Y_{\dots}) + \text{d.}(X^{\cdot})\text{d.}Y_{\dots} \tag{1.20-14}$$

が成り立つことが計算するとわかる。



X^{\cdot} 方向へのLie微分は、「外微分してから X^{\cdot} と内部積を取った結果」と「 X^{\cdot} と内部積を取ってから外微分した結果」の和である。

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}} = \text{d.}\text{d.}(X^{\cdot}) + \text{d.}(\text{d.}(X^{\cdot})) \tag{1.20-15}$$

1-formに対して

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{X^{\cdot}}(A_{\mu}|dx^{\mu}\rangle) &= \text{d.}(X^{\mu} A_{\mu}) + \text{d.}(A_{\mu}) \left(\frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) |dx^{\mu}\rangle |dx^{\nu}\rangle \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle dx^{\mu} \rangle \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu} + \langle dx^{\mu} \rangle X^{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + X^{\mu} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \langle dx^{\nu} \rangle \\
&= \langle dx^{\mu} \rangle \left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu} + X^{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right)
\end{aligned} \tag{1.20-16}$$

と確認できる。共変ベクトルと反変ベクトルを縮約したスカラーに対しても

$$\overbrace{X^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (A^{\mu} B_{\mu})}^{\mathcal{L}_X(A^{\mu} B_{\mu})} + \overbrace{X^{\rho} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}}^{\mathcal{L}_X(A^{\mu})} B_{\mu} + \overbrace{A^{\mu} \left(\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\mu}} B_{\rho} + X^{\rho} \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\rho}} \right)}^{\mathcal{L}_X(B_{\mu})}
\tag{1.20-17}$$

が確認できる。

1.21 共変微分について

➡ 「共変微分」という言葉が一般相対論やゲージ理論でよく使われる。ここでは共変微分とはどのようなものかについて説明しておく。

1.21.1 一般相対論の共変微分

まず、共変ベクトルの共変微分を考える。共変ベクトルの座標変換はもちろん

$$\tilde{A}_{\tilde{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} A_{\nu}
\tag{1.21-1}$$

である。「共変ベクトルの共変微分 $\nabla_{\rho} A_{\mu}$ 」とは

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\rho}} \tilde{A}_{\tilde{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\rho}}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \nabla_{\lambda} A_{\nu}
\tag{1.21-2}$$

のように変換される量である。つまり、微分の結果がちゃんと二階の共変テンソルの変換則を満たしてくれる様にした微分が共変微分である。

Lie 微分と共に共変微分は別の概念ではあるが、このあたりの思想は、Lie 微分のときの「ベクトルの Lie 微分がベクトルでありますように」に近い（Lie 微分はベクトル微分の結果はベクトルであり、テンソルにはならないのでそこも違う）。

単なる微分はこうはいかない。実際やってみると、

$$\partial'_{\rho} A'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} A_{\lambda} \right) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\rho} \partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} A_{\lambda}
\tag{1.21-3}$$

となって、第 2 項の分だけ変換則がテンソルのものとはずれてしまう。

共変微分を「共変」微分にするために、このずれを補正する量である $\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$ を含む項を

$$\nabla_{\rho} A_{\mu} = \partial_{\rho} A_{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} A_{\lambda}
\tag{1.21-4}$$

のように付け加える。この量（クリストッフェル記号と呼ぶ）が

$$\tilde{\Gamma}^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\rho}\tilde{\mu}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\lambda}}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\rho}} \partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\lambda}}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\rho}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}
\tag{1.21-5}$$

のように変換してくれれば^{†61}、消えて欲しい「ずれ」を吸収してくれて、

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\mu}} - \tilde{\Gamma}_{\tilde{\rho}\tilde{\mu}}^{\tilde{\lambda}} \tilde{A}_{\tilde{\lambda}} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \partial_{\nu}^{\tilde{\lambda}} A_{\tilde{\lambda}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\rho} \partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} A_{\tilde{\lambda}} - \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\tilde{\lambda}}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\rho} \partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\lambda}}}{\partial x^{\tilde{\lambda}}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\rho}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \right) \frac{\partial x^{\tilde{\rho}}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\lambda}}} A_{\tilde{\lambda}} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\rho}}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} (\partial_{\lambda} A_{\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} A_{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.21-6)$$

が成り立ってくれる^{†62}。

なお、ここでは Γ の変換性だけを決めて、具体的にどんな量であるかは決めなかった。それについては(3.1-10)を参照すること。

さて今共変ベクトルの共変微分を作ったが、反変ベクトルの共変微分を

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} \tilde{A}^{\tilde{\nu}} = \frac{\partial x^{\tilde{\rho}}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\nu}}}{\partial x^{\lambda}} \nabla_{\tilde{\rho}} A^{\lambda} \quad (1.21-7)$$

となるように作ることにする。これが $\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} - G_{\mu\alpha}^{\nu} A^{\alpha}$ であるとしてこの $G_{\alpha\mu}^{\nu}$ を計算していくと、ちょうど Γ の逆符号であることが、「共変ベクトルと反変ベクトルの積 $A_{\mu} B^{\mu}$ の共変微分は普通の微分と同じである」とことと「共変微分に関してもライプニッツ則が成りたつ」とするだけでわかる。つまり、

$$\nabla_{\nu} (A_{\mu} B^{\mu}) = (\nabla_{\nu} A_{\mu}) B^{\mu} + A_{\mu} (\nabla_{\nu} B^{\mu})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} (A_{\mu} B^{\mu}) &= (\partial_{\nu} A_{\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} A_{\alpha}) B^{\mu} + A_{\mu} (\partial_{\nu} B^{\mu} - G_{\nu\alpha}^{\mu} B^{\alpha}) \\ 0 &= -\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} A_{\alpha} B^{\mu} - A_{\mu} G_{\nu\alpha}^{\mu} B^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.21-8)$$

となることから（足を整理してから比較することにより） $\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} = -G_{\nu\mu}^{\alpha}$ がわかる。よって、反変ベクトルの共変微分は

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} A^{\alpha} \quad (1.21-9)$$

となる。同様の手順を踏むことで、

$$\nabla_{\rho} A_{\mu\nu} = \partial_{\rho} A_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} A_{\alpha\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} A_{\mu\alpha} \quad (1.21-10)$$

$$\nabla_{\rho} A^{\mu\nu} = \partial_{\rho} A^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu} A^{\alpha\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} A^{\mu\alpha} \quad (1.21-11)$$

のように二階のテンソルの共変微分も定義できる。

ここまで共変微分の定義の話を聞くと「さっきやった Lie 微分に現れる ∂_{μ} も共変微分しなくてもいいのか？」と、一つまり

$$\mathcal{L}_{X^{\cdot}} (Y^{\nu}) = X^{\mu} \frac{\partial Y^{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} Y^{\mu} \rightarrow \mathcal{L}_{X^{\cdot}} (Y^{\nu}) = X^{\mu} \nabla_{\mu} Y^{\nu} - (\nabla_{\mu} X^{\nu}) Y^{\mu} \quad (1.21-12)$$

†61 第1項がなければ $\Gamma_{\rho\mu}^{\beta}$ は添字の通りのテンソルだと言えるが、第1項がある分だけ Γ はテンソルではない。

†62 ここで、 $\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}$ が下付きの足について対称であるとした。そうでない（反対称成分を持つ）と考える場合もあるが、ここではそこには踏み込まないことにする。

としなくていいのか? —と心配する人がいるかもしれない。しかし実は

$$\mathcal{L}_{X^\mu}(Y^\nu) = X^\mu \left(\partial_\mu Y^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu Y^\rho \right) - \left(\partial_\mu X^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu X^\rho \right) Y^\mu \quad (1.21-13)$$

となって、 Γ を含む項は互いに相殺して共変微分に変更しても変わらないことがわかる。Lie 微分が「座標系によらない表現」であることを思えばこうなって当然である。

同じ理由で外微分 d の微分を共変微分に直す必要はない。1-form に対する外微分の場合で確認すると、

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.21-14)$$

である。

1.21.2 電磁気学および Yang-Mills 場における共変微分

上で考えた共変微分は「テンソルの変換性が微分によって損なわれない」ことを目標にして作られた。テンソルの変換性ではなく「複素関数の局所的位相変換」に対する変換性が微分によって損なわれないことを目標とした「共変微分」を作ることができる。

複素数場 ψ に対する局所的変換を $\psi \rightarrow e^{iq\theta(x)}\psi$ とする。 ψ の微分は

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \left(e^{iq\theta(x)} \psi \right) = e^{iq\theta(x)} \partial_\mu \psi + iq (\partial_\mu \theta(x)) \psi \quad (1.21-15)$$

となってしまう。これが $D_\mu \psi \rightarrow e^{iq\theta(x)} D_\mu \psi$ となるように、共変微分 D_μ を定義する。具体的には、

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - iq A_\mu) \psi \quad (1.21-16)$$

と定義して、 A_μ が $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x)$ と変換することにすれば、 $D_\mu \psi \rightarrow e^{iq\theta(x)} D_\mu \psi$ が成り立ってくれる。

なお、 ψ が列ベクトルであり θ が行列であるような場合

$$\psi_a \rightarrow \left(e^{iq\theta_{\cdot\cdot}} \right)_a^b \psi_b \quad (1.21-17)$$

のような変換に対して不变な共変微分を作るには、

$$D_{\mu,a} \psi_b = \partial_\mu \psi_a - iq A_{\mu,a} \psi_b \quad (1.21-18)$$

のように「行列の値をとるゲージ場」を用意して、

$$A_{\mu,a} \rightarrow \frac{1}{iq} \left(\partial_\mu e^{iq\theta_{\cdot\cdot}} \right)_a^c \left(e^{-iq\theta_{\cdot\cdot}} \right)_c^b + \left(e^{iq\theta_{\cdot\cdot}} \right)_a^c A_{\mu,c} \left(e^{-iq\theta_{\cdot\cdot}} \right)_c^b \quad (1.21-19)$$

のように変換させればよい。



このように局所的不变性を要求することからゲージ場（電磁場）が自動的に出てくることを持って「自然が局所的不变性を要求するのだ」のように語る人もたまにいるのだが、すべての位相変換不变性が局所的であることを要求されるわけではない。位相変換に限らず「すべての不变性が局所化されるとは限らない」ことに注意しよう。

第2章 微分形式で語る電磁気学

➡ ここでは、物理の中でも特に微分形式を使うことの恩恵が大きい、電磁気学について述べていく。前半は3次元空間での静電磁気学を、後半では4次元時空での動的電磁気学を扱う。

2.1 3次元空間の静電場

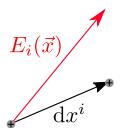
まずは静電磁場から始めよう。考えるのは3次元空間である。

2.1.1 電場は1-form

電場の定義は「その場に単位電荷を置いたとしたら受ける力」である。この定義から（力がベクトルなのだから）電場もベクトルである。共変ベクトルとして書くことにして1-form

$$E_i(\vec{x}) = E_i(\vec{x}) | dx^i \rangle \quad (2.1-1)$$

($i = 1, 2, 3$ または x, y, z) を考えよう。基底 $| dx^\mu \rangle$ を微小変化 dx^μ だとして^{†1} $E_i | dx^i \rangle$ と考えると、この量は

「単位試験電荷が dx^i 動いた  ときに電場からされる仕事」

である。 $E_i(\vec{x})$ の各成分は座標系によるが、この「仕事」は座標系によらない。物理の世界では座標系によらない量がえらい。電場の各成分 $E_i(\vec{x})$ より、電場と微小変位の内積でスカラーになるようにした $E_i(\vec{x}) dx^i$ の方が「えらい」のである。

つまり何が言いたいかというと、電場は1-formとして定義するのが自然なのだ。

静電場の場合、電場は

$$E_i(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial x^i} V(\vec{x}) \quad (2.1-2)$$

のように電位の微分として書かれるから、これを

$$E_i(\vec{x}) | dx^i \rangle = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x^i} | dx^i \rangle \quad \text{すなわち, } E(\vec{x}) = -\text{d}V(\vec{x}) \quad (2.1-3)$$

^{†1} 「だとして」などという曖昧な考え方が嫌なら、ちゃんと $dx^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j} \right|$ (これも座標によらない表現) と内積を取ることで $| dx^i \rangle \rightarrow dx^i$ の置き換えを実行する。この後もよくやるが、基底 $| d? \rangle$ は「後で何らかの意味を持つ微小変位が代入されるのを待っているスロット」と考えておくとよい。

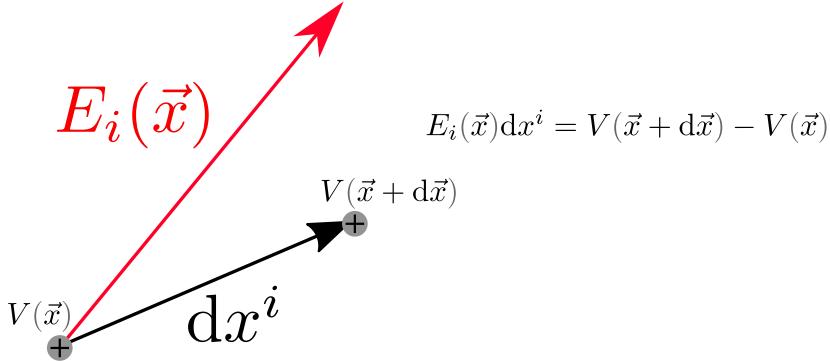


図 2-1

のように関係づけることができる。なお、電場の 1-form が電位の 0-form の微分で書けるためには積分可能条件を満たしていなくてはいけないが、その条件は $\text{d} \cdot E(\vec{x}) = 0$ 、すなわち

$$\begin{aligned}
 \text{d} \cdot (E_j(\vec{x}) | dx^j \rangle) &= \partial_i E_j(\vec{x}) | dx^i \rangle \wedge | dx^j \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_i E_j(\vec{x}) - \partial_j E_i(\vec{x})) | dx^i \rangle \wedge | dx^j \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{2.1-4}$$

である（なじみ深い書き方をすれば、 $\text{rot } \vec{E}(\vec{x}) = 0$ である）。

静電場だから成り立つ条件 $\text{d} \cdot E(\vec{x}) = 0$ があるからこそ、我々は安心して $E(\vec{x}) = -\text{d} \cdot V(\vec{x})$ と書けるのである。

2.1.2 E は 1-form だが、 D は 2-form

多くの電磁気学の教科書では、電束密度 \vec{D} を電場 \vec{E} 同様にベクトルであると習う。しかし、電束密度が「単位面積あたりを通過する電束」として「微小面積に付随するもの」と定義されていることを思うと、電束密度 \vec{D} は 2-form で $D..(\vec{x}) = \frac{1}{2} D_{ij}(\vec{x}) | dx^i \rangle \wedge | dx^j \rangle$ と表現される量であるべきだ。直交座標で成分をばらして書くならば

$$D..(\vec{x}) = D_{xy}(\vec{x}) | dx \rangle \wedge | dy \rangle + D_{yz}(\vec{x}) | dy \rangle \wedge | dz \rangle + D_{zx}(\vec{x}) | dz \rangle \wedge | dx \rangle \tag{2.1-5}$$

となる。

Maxwell 方程式の一つである $\text{div } \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ は、

$$\text{d} \cdot D..(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \tag{2.1-6}$$

$$\frac{1}{3!} (\partial_i D_{jk}(\vec{x}) | dx^i \rangle \wedge | dx^j \rangle \wedge | dx^k \rangle) = \frac{1}{3!} \rho_{ijk}(\vec{x}) | dx^i \rangle \wedge | dx^j \rangle \wedge | dx^k \rangle \tag{2.1-7}$$

のよう書かれる。直交座標系ならば

$$(\partial_x D_{yz}(\vec{x}) + \partial_y D_{zx}(\vec{x}) + \partial_z D_{xy}(\vec{x})) | dx \rangle \wedge | dy \rangle \wedge | dz \rangle = \rho_{xyz}(\vec{x}) | dx \rangle \wedge | dy \rangle \wedge | dz \rangle$$

$$\partial_x D_{yz}(\vec{x}) + \partial_y D_{zx}(\vec{x}) + \partial_z D_{xy}(\vec{x}) = \rho_{xyz}(\vec{x}) \tag{2.1-8}$$

である^{†2}。電荷密度が 3-form なのも、「微小体積に付随するもの」と定義させていることを考えれば当然の結果である。

なお、3 次元極座標であれば、

$$(\partial_r D_{\theta\phi}(\vec{x}) + \partial_\theta D_{\phi r}(\vec{x}) + \partial_\phi D_{r\theta}(\vec{x})) |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle = \rho_{r\theta\phi}(\vec{x}) |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle \quad (2.1-9)$$

となる。

$$|dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle = r^2 \sin \theta |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle \quad (2.1-10)$$

の関係があるので、 ρ_{xyz} と $\rho_{r\theta\phi}$ は $r^2 \sin \theta$ 倍違う。

FAQ あれ、 ρ はスカラーじゃないんですか？

違う。 ρ (正しくは $\rho_{...}$) は 3-form である (考えてみれば「単位体積あたりの」とつくあたり、まさに 3-form ではないか！)。

3-form の成分 (ρ_{xyz} や $\rho_{r\theta\phi}$) は座標変換によって変換する。3 次元の場合、3-form の成分は同時に「スカラー密度」でもある。

また、面積要素が

$$r |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle, \quad r^2 \sin \theta |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle, \quad r \sin \theta |d\phi\rangle \wedge |dr\rangle \quad (2.1-11)$$

の三つであることから、単位面積あたりの電束で定義された $D_{(r)}$, $D_{(\theta)}$, $D_{(\phi)}$ (それぞれ、 r, θ, ϕ 方向の成分^{†3}) と $D_{\theta\phi}$, $D_{\phi r}$, $D_{r\theta}$ も大きさが違う。ゆえに (2.1-9) を通常の成分で書くと

$$\partial_r (r^2 \sin \theta D_{(r)}(\vec{x})) + \partial_\theta (r \sin \theta D_{(\theta)}(\vec{x})) + \partial_\phi (r D_{(\phi)}(\vec{x})) = \rho(\vec{x}) r^2 \sin \theta \quad (2.1-12)$$

となる。

(2.1-12) の両辺を $r^2 \sin \theta$ (体積要素の因子) で割ると、見慣れた (?) 極座標の div の式

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 D_{(r)}(\vec{x})) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta D_{(\theta)}(\vec{x})) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (D_{(\phi)}(\vec{x})) = \rho(\vec{x}) \quad (2.1-13)$$

となる。この式が複雑でめんどくさい、という声をよく聞くが、(2.1-9) のように微分形式の形で書くと非常に単純である (ややこしい部分が $D_{r\theta}$ や $\rho_{r\theta\phi}$ の定義に押し込まれている)。初等的なベクトル計算に翻訳しようとするとめんどくさいことが発生するわけだが、微分形式の世界だけで話を進めると楽である。

2.2 3 次元空間の静磁場

^{†2} 両辺で因子 $3!$ が消失しているのは、(2.1-7) が同じ内容の項を $3!$ 個含んでいるから。

^{†3} $\vec{D} = D_{(r)} \vec{e}_r + D_{(\theta)} \vec{e}_\theta + D_{(\phi)} \vec{e}_\phi$ のように単位ベクトルを基底に使った表現の係数。

2.2.1 H は 1-form だが、 B は 2-form

さて磁場はどうだろうか、というと、もちろん「単位磁極に働く力」の表現として、1-form

$$H_i = H_i^i |dx^i\rangle \quad (2.2-1)$$

で表現してもいい。この式の基底に微小変位 dx^i を代入した結果は、「単位磁極が dx^i 動いたときに磁場からされる仕事」となる。しかし、ここで「磁極は実は存在してない。磁場は電流と相互作用する」ことを思い出すと「磁極がないのにそれを使って定義するのはまずくないか？」と不安になる。

電場は「電荷を動かしたときの仕事がスカラー」であることを使って定義した。つまり電場は「移動の変位（ベクトル量）を入れるとスカラー量が出てくる量（1-form）」だった。それに対して磁束密度は「電流を動かしたときの仕事がスカラー」である。つまり、移動の変位と移動した電流（流れる向きがあるからこれもベクトル量）という、二つのベクトル量を入れるとスカラー量が出てくる量（2-form）なのである。

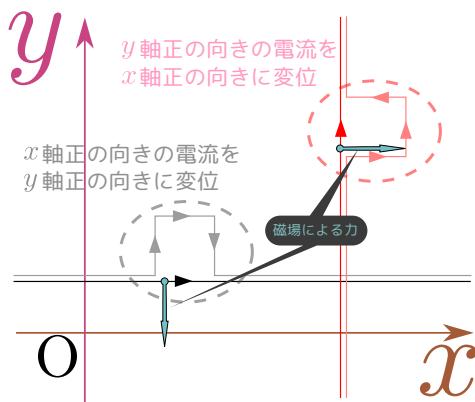
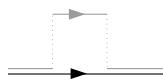
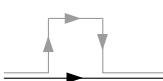


図 2-2 電流の変位

簡単のため、まずは y 軸正方向に流れる長さ dy の電流の微小部分が x 軸正方向に微小距離 dx だけ変位した場合を考えよう（図 2-2 の右側）。磁場による力の向きは図に示した通りなので、このとき磁場は正の仕事をする。

電流を変位させると（いかに仮想変位とはいえ）、 のように「ワープする電流」を作るわけにはいかないから、 のように電流の連結を保ったまま変位させなくてはいけない。

FAQ

ワープする電流作ったら何がまずいですか？

今考えている「静電磁場」という仮定か、電荷の保存則か、どちらかを捨てないといけない。電流が途中でワープすることは、そこに流れ込んできた電荷が消え失せることだから、電荷のローカルな保存則を破る。保存則を守りたかったら「流れてきた電荷はその場所に貯まるのだ」と考えなくてはいけない。その場合、「ある点の電荷量が時間的に変化する」という状況が生まれて、静電磁場でなくなる。

どちらにせよ、まともな理論でないものを扱うことになってしまう。

x 軸正方向に流れる長さ dx の電流の微小部分が y 軸正方向に微小距離 dy だけ変位した場合 (図 2-2 の左側) では、磁場のする仕事は負になる。計算してみると、この二つの仕事は符号は違うが、どちらも絶対値は $B_z I dx dy$ となる^{†4}。 B_z は $I dx dy$ が掛かることでスカラー (仕事) になる量なので、2-form の成分 B_{xy} と解釈すべきだ。

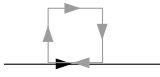
他の成分でも同じことが言えるので、

$$\begin{aligned} B_{..} &= \frac{1}{2} B_{ij} \langle dx^i \rangle \wedge \langle dx^j \rangle = B_{12} \langle dx^1 \rangle \wedge \langle dx^2 \rangle + B_{23} \langle dx^2 \rangle \wedge \langle dx^3 \rangle + B_{31} \langle dx^3 \rangle \wedge \langle dx^1 \rangle \\ &= B_z \langle dx \rangle \wedge \langle dy \rangle + B_x \langle dy \rangle \wedge \langle dz \rangle + B_y \langle dz \rangle \wedge \langle dx \rangle \end{aligned} \quad (2.2-2)$$

のように書ける。我々が「 z 方向の磁場」^{†5}と呼ぶところの B_z は実は

$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 軸向きの電流が } y \text{ 軸向きに変位したとき磁場のする仕事 } \times (-1) \\ y \text{ 軸向きの電流が } x \text{ 軸向きに変位したときに磁場のする仕事} \end{array} \right.$ なのである (ただし、電流の長さと変位は単位長さに、電流も単位電流とする)。

この二つが同じになる理由は、図 2-3 のような図を描くと納得できる。
→ p80

この変位は実は、 のように、元の電流に長方形電流を加えるのと同じである。そしてこの「加える長方形電流」が $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 軸向きの電流が } y \text{ 軸向きに変位する} \\ y \text{ 軸向きの電流が } x \text{ 軸向きに変位する} \end{array} \right.$ ときで逆なので、一方に $\times (-1)$ が必要なのである。

これが正しい「磁束密度の定義」で、本質的に 2-form (微小面積に付随する量) である (向きのある矢印ではないのだ!)。よって、 \vec{B} と書くより $B_{..}$ と書く方が本質を突いた記述である。

電流を単位長さの単位電流ではなく、 $(I \Delta x)^{..} = I \Delta x^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle$ (I の電流のうち、 Δx^i で表現される素片) とするならば、2-form $B_{..}$ との内部積を計算することで外部からする仕事が計算できる。

$$\textcolor{violet}{y}((I \Delta x)^{..}) B_{..} = I \Delta x^1 B_{12} \langle dx^2 \rangle - I \Delta x^2 B_{12} \langle dx^1 \rangle + I \Delta x^2 B_{23} \langle dx^3 \rangle - I \Delta x^3 B_{23} \langle dx^2 \rangle$$

^{†4} 高校物理でも出てくる公式 電流の単位長さあたりに働く力 $F = BIL$ で、単位長さではなく dx または dy に働く力を計算すると出る。

^{†5} 「磁場は H であって、 B は磁束密度なのでは?」というツッコミ多数と思われるが、「 B こそが磁場であって H は媒質中の磁場を表現するための補助場である」という考え方もある。本講義ではそちらの立場をとって B を磁場と呼ぶ。

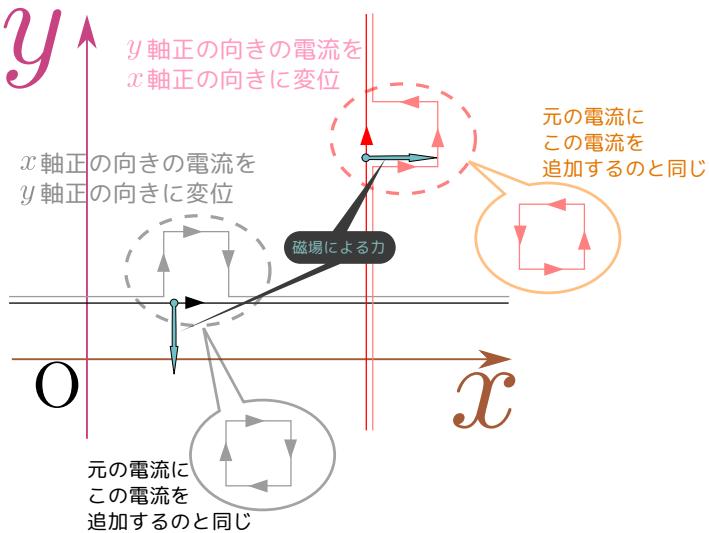


図 2-3 電流の変位と周回電流

$$\begin{aligned}
 & + I \Delta x^3 B_{31} |dx^1\rangle - I \Delta x^1 B_{31} |dx^3\rangle \\
 & = (I \Delta x^3 B_{31} - I \Delta x^2 B_{12}) |dx^1\rangle + (I \Delta x^1 B_{12} - I \Delta x^3 B_{23}) |dx^2\rangle \\
 & \quad + (I \Delta x^2 B_{23} - I \Delta x^1 B_{31}) |dx^3\rangle \\
 & = - \underbrace{(I \Delta x_y B_z - I \Delta x_z B_y)}_{(\vec{I} \Delta x \times \vec{B})_x} |dx\rangle - \underbrace{(I \Delta x_z B_x - I \Delta x_x B_z)}_{(\vec{I} \Delta x \times \vec{B})_y} |dy\rangle \\
 & \quad - \underbrace{(I \Delta x_x B_y - I \Delta x_y B_x)}_{(\vec{I} \Delta x \times \vec{B})_z} |dz\rangle \tag{2.2-3}
 \end{aligned}$$

$B..$ の外微分を計算すると $\text{div } \vec{B}$ に対応するものが出てくるのは電束密度 $D..$ の場合と同様である。Maxwell 方程式により $\text{d.. } B.. = 0$ である。

なお、磁場 $H..$ は 1-form である。ベクトルと考える場合、(真空中では) B と H は定数倍の違いでしかないのだが、微分形式を使った表現では(真空中でも) 1-form か 2-form かの違いがある(このあたりは $D..$ と $E..$ の関係と同じ)。

静磁場に対する Maxwell 方程式(初等的電磁気の教科書に載っている微分形の書き方は $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$) は

$$\text{d.. } H.. = j.. \tag{2.2-4}$$

となる。この式の両辺の外微分を取ると、両辺とも 0 になる。左辺は $(\text{d..})^2 = 0$ により、右辺は電流の保存則 $\text{d.. } j.. = 0$ による。初等的電磁気の教科書に載っている積分形の式は $\oint \vec{H} \cdot \vec{x} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ だが、「左辺は線積分、右辺は面積分」されることが、 $\text{d.. } H.. = j..$ という式

の中に見えている。書いておくと

$$\int_S \textcolor{brown}{d} \cdot H \cdot = \int_S j \cdot \cdot \xrightarrow{\text{Stokes}} \int_{\partial S} H \cdot = \int_S j \cdot \cdot \quad (2.2-5)$$

となる。

2.2.2 電流密度は 2-form

$j \cdot \cdot$ という表現に「あれ、電流はベクトルじゃないのか」と思う人もいるだろうから、ここで少し「2-form としての電流密度」について書いておこう。電流密度に何を掛けば「観測可能なスカラー」になるかを考えてみよう。我々は二つの微小長さ dx^μ と dx^ν でできた「平行四辺形の

虫取り網」($|dx^\nu\rangle$ のような形⁶⁾) を持っていて、しかもその虫取り網は「平行四辺形内

を単位時間あたりに通過する電気量」を測定できるとする。すると、「電流密度」という物理量は「どのような平行四辺形の虫取り網を持ってくるか」に対応して単位時間あたりの通過電気量を返してくれる、「微小長さが入るのを待ち構えている二つのスロットを持った量」一つまりは 2-form $j \cdot \cdot = \frac{1}{2} j_{\mu\nu} |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle$ なのである。通常の 3 次元空間では、

$$j \cdot \cdot = j_{xy} |dx\rangle \wedge |dy\rangle + j_{yz} |dy\rangle \wedge |dz\rangle + j_{zx} |dz\rangle \wedge |dx\rangle \quad (2.2-6)$$

である。「いや、電流は流れる向きがあるんだから、ベクトルで書こうよ」と思うのなら、これの \star を取って、

$$\star(j \cdot \cdot) = (\star j) \cdot \cdot = \frac{\sqrt{|\det g|}}{2} \epsilon_{\textcolor{teal}{l} \textcolor{brown}{m} \textcolor{red}{n}}^{\textcolor{brown}{(-1)} \textcolor{blue}{m} \textcolor{red}{j}} \textcolor{brown}{g}^{\textcolor{brown}{m} \textcolor{red}{j}} \textcolor{brown}{g}^{\textcolor{brown}{n} \textcolor{blue}{k}} \textcolor{brown}{j}_{\textcolor{blue}{j} \textcolor{blue}{k}} |dx^l\rangle \quad (2.2-7)$$

とする。直交座標系ならシンプルに、

$$\star(j \cdot \cdot) = (\star j) \cdot \cdot = j_{yz} |dx\rangle + j_{zx} |dy\rangle + j_{xy} |dz\rangle \quad (2.2-8)$$

であり、
 1-form の x 成分と 2-form の yz 成分
 1-form の y 成分と 2-form の zx 成分 がそれぞれ等しい。
 1-form の z 成分と 2-form の xy 成分

⁶⁾ スロット $|dx^\mu\rangle$ と $|dx^\nu\rangle$ にいろんな微小長さを代入することが「虫取り網をいろんな方向に向ける」ことに対応する。



3次元極座標のときを計算してみる。このときは g_{ij} が $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$ 、 g^{ij} がその逆

行列で $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$ である。

$$j_{..} = j_{r\theta} |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle + j_{\theta\phi} |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle + j_{\phi r} |d\phi\rangle \wedge |dr\rangle \quad (2.2-9)$$

というのが 2-form として書いた電流密度の式だが、たとえばこの $j_{r\theta}$ という量は「単位面積あたりの流れ」になっていない。なぜなら後ろについている $|dr\rangle \wedge |d\theta\rangle$ は「微小面積」になっていない！—微小面積にするには、 $|dr\rangle \wedge r |d\theta\rangle$ にしなくてはいけない（同様に、 $|d\phi\rangle$ が出現するときは $r \sin \theta |d\phi\rangle$ が出てくるようにしないとダメである。

よって、

$$j_{..} = \underbrace{\frac{j_{r\theta}}{r} |dr\rangle \wedge r |d\theta\rangle}_{j_{(\phi)}} + \underbrace{\frac{j_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta} r |d\theta\rangle \wedge r \sin \theta |d\phi\rangle}_{j_{(r)}} + \underbrace{\frac{j_{\phi r}}{r \sin \theta} r \sin \theta |d\phi\rangle \wedge |dr\rangle}_{j_{(\phi)}} \quad (2.2-10)$$

のように書き直したときの、 $\frac{j_{r\theta}}{r}$, $\frac{j_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta}$, $\frac{j_{\phi r}}{r \sin \theta}$ が「単位面積あたりの流れ」になっている。これらをそれぞれ、 $j_{(\phi)}$, $j_{(r)}$, $j_{(\theta)}$ （それぞれ、 r, θ, ϕ 方向の成分であるが、共変ベクトルの成分でも反変ベクトルの成分でもない）と書くことにする。★を計算すると

$$\begin{aligned} \star(j_{..}) &= r^2 \sin \theta (g^{rr} g^{\theta\theta} j_{r\theta} |d\phi\rangle + g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} j_{\theta\phi} |dr\rangle + g^{\phi\phi} g^{rr} j_{\phi r} |d\theta\rangle) \\ &= r^2 \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} j_{r\theta} |d\phi\rangle + \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} j_{\theta\phi} |dr\rangle + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} j_{\phi r} |d\theta\rangle \right) \\ &= \sin \theta j_{r\theta} |d\phi\rangle + \frac{1}{r^2 \sin \theta} j_{\theta\phi} |dr\rangle + \frac{1}{\sin \theta} j_{\phi r} |d\theta\rangle \\ &= j_{(\phi)} r \sin \theta |d\phi\rangle + j_{(r)} |dr\rangle + j_{(\theta)} r |d\theta\rangle \end{aligned} \quad (2.2-11)$$

となって、長さ 1 の基底ベクトルとの対応が $\vec{e}_r \rightarrow dr$, $\vec{e}_\theta \rightarrow r d\theta$, $\vec{e}_\phi \rightarrow r \sin \theta d\phi$ だったことを思い出すと、この結果は $j_{(\phi)} \vec{e}_\phi + j_{(r)} \vec{e}_r + j_{(\theta)} \vec{e}_\theta$ である。

2.2.3 $\text{d}_H H = j_{..}$ とグリーン関数



方程式 $\text{d}_H H = j_{..}$ に戻って、これを解く方法を考えよう。電磁気学で習うビオ・サバールの法則が出てくる。

この式は 3 次元の 2-form の式なので 3 本の方程式のように思えるが、 d_H を掛けて 0 (つまり

「closed」) の条件があるので、独立な方程式は 2 本だと思うべきである。成分を書き出す形では

$$\begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{yx} \\ j_{zx} \\ j_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.2-12)$$

である。微分を扱うのは面倒なのでフーリエ変換して、

$$\begin{bmatrix} 0 & -ip_z & ip_y \\ ip_z & 0 & -ip_x \\ -ip_y & ip_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{yz} \\ j_{zx} \\ j_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.2-13)$$

となる。

微分方程式を解くときには「微分演算子の逆」を考える方法がある。 $\mathcal{D}\phi = J$ に対して $J = \mathcal{D}^{-1}\phi$ を考えるような手法である。この演算子 \mathcal{D}^{-1} は「微分演算子 \mathcal{D} に対するグリーン関数 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 」と積分を使って実現する。

定義 10: グリーン関数の定義

微分演算子 \mathcal{D} に対し、

$$\mathcal{D}G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2-14)$$

を満たす関数をグリーン関数と呼ぶ。

このような関数が見つかれば、微分方程式 $\mathcal{D}\phi = J$ の解は

$$\phi(\vec{x}) = \int d^D \vec{x}' G(\vec{x}, \vec{x}') J(\vec{x}') \quad (2.2-15)$$

になる(代入すると確認できる)。 \mathcal{D}^{-1} は「 G を掛けて積分する」一連の操作を表現する記号である。

もっとも馴染みのあるグリーン関数は、ラプラスアン Δ に対するグリーン関数

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.2-16)$$

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2-17)$$

であろう (Δ_x は \vec{x} 座標に関するラプラスアンを示す)。

これを使って方程式 $\Delta V(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$ が、

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.2-18)$$

のように解ける^{†7}。

^{†7} この式 (2.2-18) 自体は「微小電荷 $\rho(\vec{x}) d^3 \vec{x}$ が作る電位を足し上げる」計算だと説明されることが多いが、この積分でやっていることはまさにグリーン関数による「微分方程式の逆」なのである。

ここで \mathcal{D} にあたる行列 $\begin{bmatrix} 0 & -ip_z & ip_y \\ ip_z & 0 & -ip_x \\ -ip_y & ip_x & 0 \end{bmatrix}$ には Ker (0 固有値のベクトル) $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$ があることに気づく。ということは逆演算子はない。この行列は反対称なので左固有ベクトルと右固有ベクトルは同じなので、 $\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}$ が固有値 0 の左固有ベクトルである。

 もっと単純な例で状況を確認しておくと、「 z 軸回りの回転」によって起こる微小変化を表現する行列 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を考えると、この行列には Ker がある (z 軸回りの回転なので、も

ともと z 軸を向いているベクトルは回らない。つまり $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に掛けると 0)。

しかし、その Ker 部分 (つまりは z 成分) を除いた部分 (つまり x, y 成分) に限って考えれば逆行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ がある。この 2 つを掛算すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2-19)$$

となり「 x, y 空間 (平面) への射影演算子」になる。

今の場合に即して状況を整理すると、行列とベクトルで書かれた方程式 $\mathbf{K}\vec{H} = \vec{j}$ の逆を考えたが、 \mathbf{K} が 1 本の 0 固有値の固有ベクトル \vec{v} を持っている ($\mathbf{K}\vec{v} = 0$) ため、「本当の逆行列」はない。このとき、「 \vec{v} を除く空間への射影演算子 \mathcal{P} 」を

$$(\mathcal{P})_j^i = \delta_j^i - \frac{v^i v_j}{v^2} \quad (2.2-20)$$

のようを作ることができる。

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1} = \mathcal{P} \quad (2.2-21)$$

となるような「射影空間内の逆 $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ 」を作る。

行列 \mathbf{K} は

$$(\mathbf{K})_{ij} = i\epsilon_{ijk}^{(-1)} p_k \quad (2.2-22)$$

のように表現できる。これに対して 0 固有値なベクトルは \vec{p} である (ϵ の反対称性から、 $i\epsilon_{ijk}^{(-1)} p_k p_j = 0$ がすぐにわかる)。よって我々は $(\mathbf{K})_{ij} (\tilde{\mathbf{K}}^{-1})_{jk} = \delta_{ik} - \frac{p_i p_k}{p^2}$ となる $(\tilde{\mathbf{K}}^{-1})_{ij}$ が欲しい。ここで ϵ と ϵ の積が δ で書けるという式を思い出して、

$$(\tilde{\mathbf{K}}^{-1})_{ij} = \frac{i}{p^2} \epsilon_{ijk}^{(-1)} p_k \quad (2.2-23)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K})_{ij} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \Big|_{jk} &= -\frac{1}{p^2} \epsilon_{ijm}^{(\text{f})} p_m \epsilon_{jkn}^{(-1)} p_n \\
 &= \frac{1}{p^2} (\delta_{ik} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mk}) p_m p_n = \delta_{ik} - \frac{p_i p_k}{p^2}
 \end{aligned} \tag{2.2-24}$$

となる^{†8}。逆行列が作れないような行列でも「固有値 0 の空間を取り除いた空間」の中での逆行列を作ることができる。この $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ の意味するところは、実は「ビオ・サバールの法則」なのである。これを確認しよう。まず

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{|p|^2} e^{ip \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{2.2-25}$$

であったことを思い出そう。これに $\epsilon^{ijk} \partial_k$ を掛けると

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\epsilon^{ijk} p_k}{|p|^2} e^{ip \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \frac{\epsilon^{ijk}}{4\pi} \left(-\frac{(\vec{x} - \vec{x}')_k}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) \tag{2.2-26}$$

となる。 ϵ^{ijk} の部分は 3 次元の外積になるので、

ビオ・サバールの法則（体積積分形）

電流密度 $\vec{j}(\vec{x})$ が空間に存在している時、 \vec{x} における磁束密度 $\vec{B}(\vec{x})$ は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad \text{または} \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \tag{2.2-27}$$

である。

が出てきた。「逆がない筈の演算子 \mathbf{K} 」の逆が計算できたが、ここでは Ker の部分（具体的には、 \vec{H}, \vec{j} の \vec{p} に比例する部分）が計算から抜けているという点に注意が必要である。

「3 次元空間の微分形式を使った静電磁場に対する Maxwell 方程式」をまとめておくと、

$$\begin{aligned}
 \text{d} B .. &= 0, & \text{d} E .. &= 0, \\
 \text{d} D .. &= \rho .., & \text{d} H .. &= j .. \tag{2.2-28}
 \end{aligned}$$

となる。

2.2.4 ベクトルポテンシャルの導入

$\text{d} B .. = 0$ ということは、2-form $B ..$ は 1-form の外微分で書ける^{†9}。

$$\begin{aligned}
 B .. &= \text{d} A .. = \left| dx^i \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge (A_j \left| dx^j \right\rangle) \right) = \partial_i A_j \left| dx^i \right\rangle \wedge \left| dx^j \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \left| dx^i \right\rangle \wedge \left| dx^j \right\rangle
 \end{aligned}$$

^{†8} ここでやっているのは、初等的ベクトル解析での $\text{rot rot} = \Delta - \text{div grad}$ と同等の計算である。

^{†9} ポアンカレの補題により。よって当然可縮でない領域が出てきたときは注意が必要。
→ p53

$$\begin{aligned}
&= (\partial_x A_y - \partial_y A_x) |dx\rangle \wedge |dy\rangle + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) |dy\rangle \wedge |dz\rangle \\
&+ (\partial_z A_x - \partial_x A_z) |dz\rangle \wedge |dx\rangle
\end{aligned} \tag{2.2-29}$$

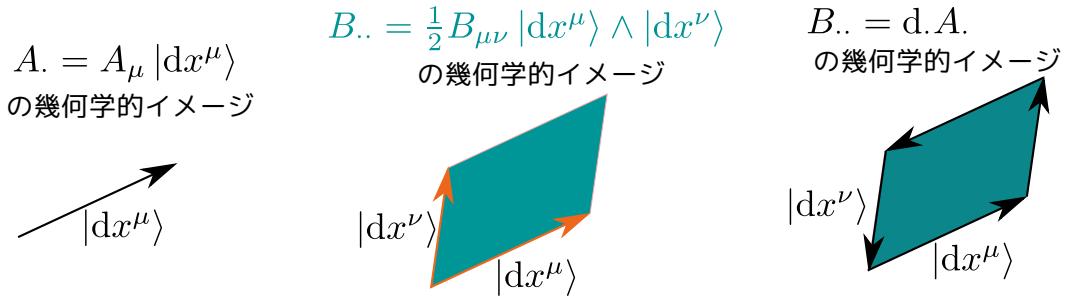


図 2-4

我々に観測できる量である磁場 $B_{\cdot\cdot}$ は、実は $d_{\cdot} A_{\cdot}$ と表されることがわかったが、ここで $(d_{\cdot})^2 = 0$ を思い出すと、 Λ を任意のスカラーとして

$$A_{\cdot} \rightarrow A_{\cdot} + d_{\cdot} \Lambda \tag{2.2-30}$$

という変更を加えても、磁場は

$$B_{\cdot\cdot} \rightarrow d_{\cdot} (A_{\cdot} + d_{\cdot} \Lambda) = d_{\cdot} A_{\cdot} \tag{2.2-31}$$

となって変更されない。物理的に観測可能な量が変更されないということは、 A_{\cdot} は「観測にかかるない自由度」を含んでいる。

$$\delta_G B_{\cdot\cdot} = d_{\cdot} d_{\cdot} \Lambda = 0$$

の幾何学的イメージ

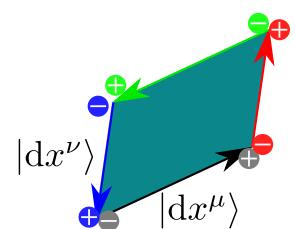
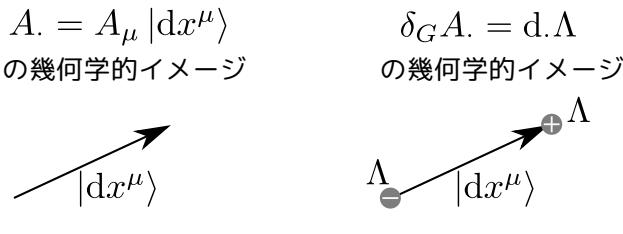


図 2-5

変換 (2.2-30) は「ゲージ変換」と呼ばれる。 $B_{\cdot\cdot}$ は物理的に定義された量で、「外微分すると $B_{\cdot\cdot}$ になる量」として定義された A_{\cdot} は、その定義の仕方から必然的に「物理と関係ない自由度」を持ってしまっている（その物理と関係ない自由度を動かすのがゲージ変換）。よって電磁場は後で説明する「拘束系（より正確には冗長系）」になる。

$\delta_G A_{\cdot} = d_{\cdot} \Lambda$ という式を見て感じ取って欲しいことは、

変位 dx^μ にそって定義された A_\cdot が $d_\cdot A$ だけ変化するということは実は変位の端点にしかよらない変化をする、ということ。 B_\cdot は「面積に沿って定義された量」で、 $B_\cdot = d_\cdot A_\cdot$ を見ると、 A_\cdot はその面積の境界で定義されている。「境界の境界はない」から、 Λ は B_\cdot に影響を及ぼせない。

である。↑これだけの内容が、 $\delta_G B_\cdot = d_\cdot (d_\cdot A_\cdot) = 0$ に集約される。なお、ループではなく始点と終点のある線の場合では、ゲージ変換による変化は「始点と終点」のみが問題になる（この始点と終点の変化を考えるのが「ホモトピー」という数学上の概念である）。

2.3 4 次元への移行

電場は 0-form の外微分による 1-form (exact な 1-form) で書け、磁束密度は 1-form の外微分である 2-form (exact な 2-form) で書ける。これは一見非対称に感じるが、実は電場が 0-form の外微分を使って $-d_\cdot V(\vec{x})$ のように書けるのは静電場の場合のみである。動的な電場は

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.3-1)$$

のようにベクトルポテンシャルの時間微分を含む。これも (V の前の符号を除けば) 外微分っぽい式になっている。このことを踏まえた上で 4 次元的記述をすると、実は電場も 1-form の外微分である 2-form で書ける。

そこで A_\cdot を

$$A_\cdot = A_x |dx\rangle + A_y |dy\rangle + A_z |dz\rangle + \overset{-V}{A_t} |dt\rangle \quad (2.3-2)$$

のように 4 次元に拡張 ($A_t = -V$ としていることに注意) してから外微分を取ると

$$\begin{aligned} & d_\cdot A_\cdot \\ & = \underbrace{(-\partial_x V - \partial_t A_x)}_{E_x} |dx\rangle \wedge |dt\rangle + \underbrace{(-\partial_y V - \partial_t A_y)}_{E_y} |dy\rangle \wedge |dt\rangle + \underbrace{(-\partial_z V - \partial_t A_z)}_{E_z} |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + \underbrace{(\partial_y A_z - \partial_z A_y)}_{B_x} |dy\rangle \wedge |dz\rangle + \underbrace{(\partial_z A_x - \partial_x A_z)}_{B_y} |dz\rangle \wedge |dx\rangle + \underbrace{(\partial_x A_y - \partial_y A_x)}_{B_z} |dx\rangle \wedge |dy\rangle \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

のようにまとまる。この $d_\cdot A_\cdot$ を F_\cdot と書くことにすると、

$$\begin{aligned} F_\cdot & = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \\ & = E_x |dx\rangle \wedge |dt\rangle + E_y |dy\rangle \wedge |dt\rangle + E_z |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + B_x |dy\rangle \wedge |dz\rangle + B_y |dz\rangle \wedge |dx\rangle + B_z |dx\rangle \wedge |dy\rangle \end{aligned} \quad (2.3-4)$$

とまとまる。3 次元から 4 次元への移行は

- ベクトル・ポテンシャル 1-form A に $A_t|dt\rangle = -V|dt\rangle$ の項を加える。
- 電場 1-form $E = E_x|dx\rangle + E_y|dy\rangle + E_z|dz\rangle$ の後ろに $|dt\rangle$ を掛けて 2-form にする。
- もちろん、全ての場を場所の関数 $f(\vec{x})$ から時空点の関数 $f(t, \vec{x})$ (あるいは $f(\{x\})$) にする。
- ベクトルポテンシャルと場の関係は、 $dA(\vec{x}) = B(\vec{x})$ から $dA(\{x\}) = F(\{x\})$ になる。
- 電流密度は 2-form でなく 3-form になり、電荷密度と合わせて一つの 3-form になる (これは後で詳しく)。

で行える。

F_{xt} ($|dx\rangle \wedge |dt\rangle$ の係数) の意味を明確にしておこう。

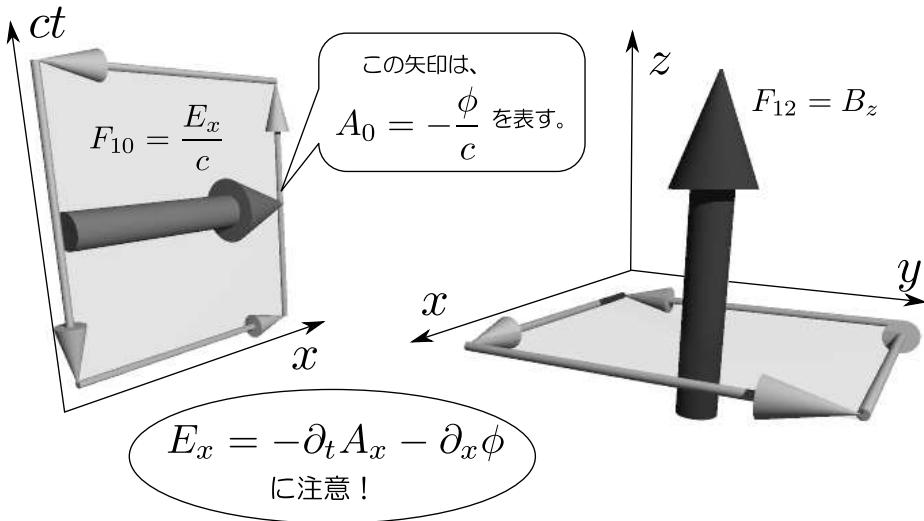


図 2-6

図 2-6 の左は「 $x-t$ 平面上で定義された F_{xt} すなわち電場 E_x を図にしたもの、右は「 $x-y$ 平面上で定義された F_{xy} すなわち磁場 B_z を図にしたものである。3 次元的な電場ベクトルと $(0i)$ 面の関係は、3 次元的な磁場ベクトルと (ij) 面の関係とは少し違っているが、これは我々が 3 次元的表現をするときには「時間方向」を無視しているからだと言える。

$d^2 = 0$ なので、 $dF_{..} = 0$ である。 $dF_{..}$ の $|dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle$ の項を取り出すと、

$$(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle = 0 \quad (2.3-5)$$

となる (図 2-7 を参照)。
→ p89

また $|dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle$ の項を取り出すと、

$$\underbrace{\partial_x F_{yt} + \partial_y F_{tx} + \partial_t F_{xy}}_{(-\partial_y E_x + \partial_x E_y + \partial_t B_z)} |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle = 0 \quad (2.3-6)$$

(rot \vec{E})_z

となり、Maxwell 方程式の $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の z 成分が出る。図で表現すると図 2-8 となる。
→ p89

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

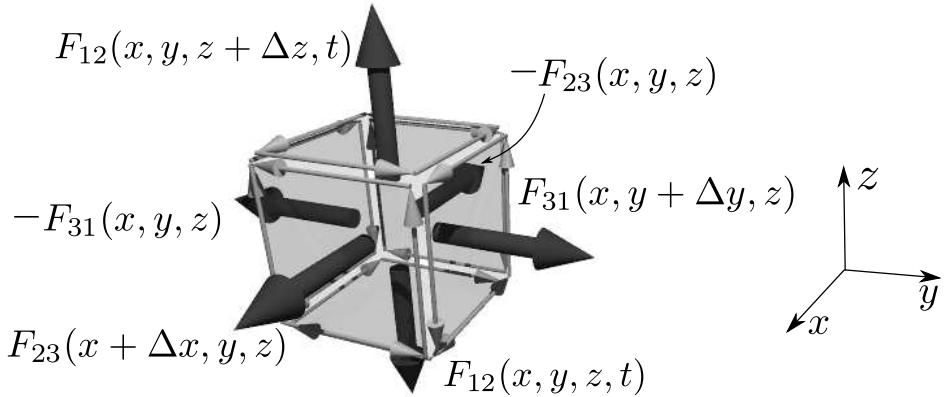


図 2-7

$$\partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = 0$$

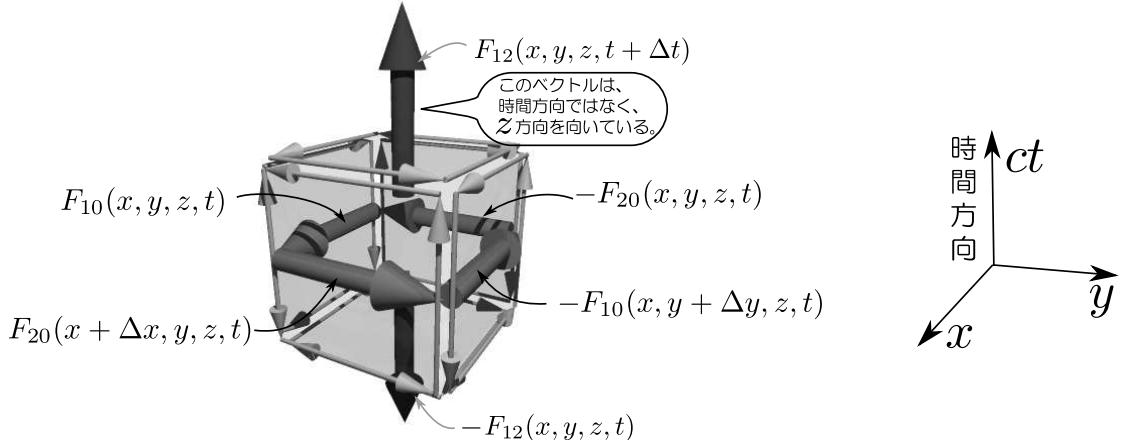


図 2-8

この図では z 軸は完全に省略されていることに注意しよう^{†10}。この場合は天井と床から $\partial_t F_{xy} = \partial_t B_x$ 、左と右から $\partial_y F_{tx} = -\partial_y E_x$ 、正面と裏から $\partial_x F_{yt} = \partial_x E_y$ が出る。

同様に y 成分、 z 成分の式も出る。つまり、元々の Maxwell 方程式のうち四つが 4 次元 rot の性質から出るのである^{†11}。この「4 次元 rot の性質」というのは実は恒等式 $\text{d}(\text{d.A.}) = 0$ であり、この立場では Maxwell 方程式のうち四つは「物理法則」ですらない。

では 4 次元ベクトルポテンシャルを使ったときの「物理法則」はどう出るかというと、そこで Hodge dual が登場する。電磁場の場合の Hodge star は、

$$(\star F)_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{(-1)} \underbrace{g^{\rho\alpha}}_{\text{green}} \underbrace{g^{\lambda\beta}}_{\text{red}} F_{\alpha\beta} \quad (2.3-7)$$

†10 図に書きこまれた B_z は、ほんとうは書けない。この図には z 軸方向は全くないのだから。

†11 Lorentz 変換すれば、この t 軸と x, y, z 軸が混じり合う。つまりこの四つの Maxwell 方程式は、4 次元的には互いにからみあっているのだと考えることもできる。

で定義される (2-form から 2-form への写像となる)。ただし簡単のため座標は普通の Minkowski 空間の座標にすることにして、 $\det g = -1$ の場合を書いておく。すると、

$$(\star F)_{12} = \frac{1}{2} (\epsilon_{1230}^{(-1)} F^{30} + \epsilon_{1203}^{(-1)} F^{03}) = -F^{30} = F_{30} = E_z \quad (2.3-8)$$

$$(\star F)_{30} = \frac{1}{2} (\epsilon_{3012}^{(-1)} F^{12} + \epsilon_{3021}^{(-1)} F^{21}) = -F^{12} = -F_{12} = -B_z \quad (2.3-9)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \star F_{..} = & -B_x |dx\rangle \wedge |dt\rangle - B_y |dy\rangle \wedge |dt\rangle - B_z |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + E_x |dy\rangle \wedge |dz\rangle + E_y |dz\rangle \wedge |dx\rangle + E_z |dx\rangle \wedge |dy\rangle \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

である。この 2-form (これは exact でも closed でもない) の外微分を取ると

$$\begin{aligned} & \text{d.} \begin{pmatrix} -B_x |dx\rangle \wedge |dt\rangle - B_y |dy\rangle \wedge |dt\rangle - B_z |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ + E_x |dy\rangle \wedge |dz\rangle + E_y |dz\rangle \wedge |dx\rangle + E_z |dx\rangle \wedge |dy\rangle \end{pmatrix} \\ = & -\partial_y B_x |dy\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle - \partial_z B_x |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle \\ & - \partial_x B_y |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle - \partial_z B_y |dx\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & - \partial_x B_z |dx\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle - \partial_y B_z |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + \partial_x E_x |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle + \partial_t E_x |dt\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \\ & + \partial_y E_y |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dx\rangle + \partial_t E_y |dt\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dx\rangle \\ & + \partial_z E_z |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dy\rangle + \partial_t E_z |dt\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dy\rangle \\ = & (\partial_y B_x - \partial_x B_y + \partial_t E_z) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + (\partial_z B_y - \partial_y B_z + \partial_t E_x) |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + (-\partial_z B_x + \partial_x B_z + \partial_t E_y) |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle \\ & + (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

なので、Maxwell 方程式からこの 3-form が

$$-j^z |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle - j^x |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle - j^y |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle + \rho |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \quad (2.3-12)$$

に等しい。

$$j_{xyt} = -j^z, \quad j_{yzt} = -j^x, \quad j_{zxt} = -j^y, \quad j_{xyz} = j^t \quad (2.3-13)$$

としておくと、(2.3-12) は

$$\begin{aligned} & j_{xyt} |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dt\rangle + j_{yzt} |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dt\rangle + j_{zxt} |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle + j_{xyz} |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \\ = & j... \end{aligned} \quad (2.3-14)$$

とまとまる。 $(2.3-13)$ の符号の付き方が変に思えるかもしれないが、

$$j_{xyt} = j^z \underbrace{\epsilon_{zxyt}^{(-1)}}_{-1}, \quad j_{yzt} = j^x \underbrace{\epsilon_{xyzt}^{(-1)}}_{-1}, \quad j_{zxt} = j^y \underbrace{\epsilon_{yzxt}^{(-1)}}_{-1}, \quad j_{xyz} = j^t \underbrace{\epsilon_{txyz}^{(-1)}}_1 \quad (2.3-15)$$

と考えれば ($\epsilon_{txyz}^{(-1)} = 1$ で、この偶置換なら 1、奇置換なら -1 となる)、

$$j_{\mu\nu\rho} = j^{\lambda} \underbrace{\epsilon_{\mu\nu\rho}^{(-1)}}_{\lambda} = -\epsilon_{\mu\nu\rho}^{(-1)} j^{\lambda} \quad (2.3-16)$$

と、統一した形にまとまる。

以上の式は Maxwell 方程式の残りである $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ と $\text{div } \vec{D} = \rho$ になっている (ただし、真空中でかつ $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ の単位系を取っていることにして $\vec{H} = \vec{B}, \vec{D} = \vec{E}$ にしている)。つまり残った (恒等式ではない) Maxwell 方程式は

$$\text{d.} (\star F..) = j... \quad (2.3-17)$$

である。

この式が Euler-Lagrange 方程式として出てくるような作用は

$$\int \left(-\frac{1}{2} \text{d.} A. \wedge \star \text{d.} A. + A. \wedge j... \right) \quad (2.3-18)$$

である。変分を取ると、

$$\begin{aligned} & \int \left(-\frac{1}{2} \text{d.} (\delta A.) \wedge \star \text{d.} A. - \frac{1}{2} \text{d.} A. \wedge \star \text{d.} \delta A. + \delta A. \wedge j... \right) \\ &= \int \underbrace{(-\text{d.} \delta A. \wedge \star \text{d.} A. + \delta A. \wedge j...)}_{\text{d.} (\delta A. \wedge \star \text{d.} A.) + \delta A. \wedge \text{d.} (\star \text{d.} A.)} = \int \delta A. (-\text{d.} (\star \text{d.} A.) + j...) \end{aligned} \quad (2.3-19)$$

となる。

途中で分配則 $\text{d.} (\delta A. \wedge \star \text{d.} A.) = \text{d.} \delta A. \wedge \star \text{d.} A. - \delta A. \wedge \text{d.} (\star \text{d.} A.)$ と、Stokes の定理から $\int \text{d.} (?)$ が表面項となることをを使った。

2.4 電磁場の Lorentz 変換

2.4.1 ベクトル、テンソル、form のローレンツ変換

せっかく 4 次元的な書き方をしたのだから、電場や磁場がどのように Lorentz 変換されるかを考えておこう。Lorentz 変換は座標に対して

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.4-1)$$

という変換（ただし、 β は光速度が 1 になる単位系における座標系の速度。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ）である（座標の微小変位に対しても同様）。このとき、反変ベクトルは上と同じ変換

$$V^{t'} = \gamma(V^t - \beta V^x), \quad V^{x'} = \gamma(V^x - \beta V^t), \quad V^{y'} = V^y, \quad V^{z'} = V^z \quad (2.4-2)$$

（行列 $\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ による変換）を、共変ベクトルは

$$W_{t'} = \gamma(W_t + \beta W_x), \quad W_{x'} = \gamma(W_x + \beta W_t), \quad W_{y'} = W_y, \quad W_{z'} = W_z \quad (2.4-3)$$

（行列 $\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ による変換）をされる^{†12}。

微分演算子としてのベクトルに関して

$$\begin{aligned} & V^{t'} \left\langle \frac{\partial}{\partial t'} \right\rangle + V^{x'} \left\langle \frac{\partial}{\partial x'} \right\rangle + V^{y'} \left\langle \frac{\partial}{\partial y'} \right\rangle + V^{z'} \left\langle \frac{\partial}{\partial z'} \right\rangle \\ &= V^t \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + V^x \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + V^y \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + V^z \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

が、1-form に関して

$$\begin{aligned} & W_{t'} |dt'\rangle + W_{x'} |dx'\rangle + W_{y'} |dy'\rangle + W_{z'} |dz'\rangle \\ &= W_t |dt\rangle + W_x |dx\rangle + W_y |dy\rangle + W_z |dz\rangle \end{aligned} \quad (2.4-5)$$

が成り立っている。

この「座標系によらない式」から成分の Lorentz 変換を求める方法を以下に示す（とりあえず今は変化しない y, z 成分は省略しておく）。1-form の方で示すと、基底が $|dt'\rangle = \gamma|dt\rangle - \gamma\beta|dx\rangle$ およ $|dx'\rangle = \gamma|dx\rangle - \gamma\beta|dt\rangle$

びその逆 $|dt\rangle = \gamma|dt'\rangle + \gamma\beta|dx'\rangle$ のように変換されるので、
 $|dx\rangle = \gamma|dx'\rangle + \gamma\beta|dt'\rangle$

$$W_t(\gamma|dt'\rangle + \gamma\beta|dx'\rangle) + W_x(\gamma|dx'\rangle + \gamma\beta|dt'\rangle) = W_t|dt\rangle + W_x|dx\rangle \quad (2.4-6)$$

が成り立つ。左辺を並べ替えれば

$$\underbrace{(\gamma W_t + \gamma\beta W_x)|dt'\rangle}_{W_{t'}} + \underbrace{(\gamma W_x + \gamma\beta W_x)|dx'\rangle}_{W_{x'}} = W_t|dt\rangle + W_x|dx\rangle \quad (2.4-7)$$

^{†12} t 成分だけが足の上げ下げによって符号がひっくり返ると思ってもよいし、この 2 つの行列は「一方を転置すると互いに逆行列」なのだとおもってもよい。今の場合は対称行列なので転置は何もしない操作であるが。

となり、成分の変換が読み取れる。

2-form もしくは 2 階のテンソルに関しても同様の計算（上の 2 種類のどちらでも）ができる。

2 階のテンソルである $F_{\mu\nu}$ は下つきの 2 本の足がそれぞれ共変ベクトルの足のように変換されると考えると、

$$E_{x'} = F_{x't'} = \gamma^2 (F_{xt} + \beta F_{tt} + \beta F_{xx} + \beta^2 F_{tx}) = \gamma^2 (1 - \beta^2) F_{xt} = F_{xt} = E_x \quad (2.4-8)$$

$$E_{y'} = F_{y't'} = \gamma (F_{yt} + \beta F_{yx}) = \gamma E_y - \beta B_z \quad (2.4-9)$$

$$E_{z'} = F_{z't'} = \gamma (F_{zt} + \beta F_{zx}) = \gamma E_z + \beta B_y \quad (2.4-10)$$

$$B_{x'} = F_{y'z'} = F_{yz} = B_x \quad (2.4-11)$$

$$B_{y'} = F_{z'x'} = \gamma (F_{zx} + \beta F_{zt}) = \gamma B_y + \beta E_z \quad (2.4-12)$$

$$B_{z'} = F_{x'y'} = \gamma (F_{xy} + \beta F_{ty}) = \gamma B_z - \beta E_y \quad (2.4-13)$$

と変換される。 B_x, E_x という「 x 成分」が変化しないことを一瞬奇異に感じるかもしれないが、これに $dy \wedge dz$ を掛けたものが「この面を通り抜ける電気力線／磁力線の本数」と考え、それが不变量なのだと考えると納得できる。 E_y, B_y に関しては $dz \wedge dx$ を掛けたものが不变量と考え、「電気力線／磁力線の本数は変わらないが、Lorentz 短縮によって dx が $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍に変わるので本数密度が圧縮される」と考えると、 γ 倍になる部分が出てくるのは納得である。

なお、当然結果は全く一緒なのだが、form で書いて基底の方を逆変換で置き換えて、

$$\begin{aligned}
 F_{..} = & E_x (\underbrace{\gamma |dx'\rangle + \beta \gamma |dt'\rangle}_{|dx\rangle} \wedge \underbrace{(\gamma |dt'\rangle + \gamma \beta |dx'\rangle)}_{|dt\rangle}) + E_y |dy'\rangle \wedge (\underbrace{\gamma |dt'\rangle + \gamma \beta |dx'\rangle}_{|dy\rangle}) \\
 & + E_z |dz'\rangle \wedge (\underbrace{\gamma |dt'\rangle + \gamma \beta |dx'\rangle}_{|dz\rangle}) \\
 & + B_x |dy'\rangle \wedge \underbrace{|dz'\rangle}_{|dz\rangle} + B_y |dz'\rangle \wedge (\underbrace{\gamma |dx'\rangle + \beta \gamma |dt'\rangle}_{|dx\rangle}) + B_z (\underbrace{\gamma |dx'\rangle + \beta \gamma |dt'\rangle}_{|dx\rangle} \wedge \underbrace{|dy'\rangle}_{|dy\rangle}) \\
 = & E_x \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{E_{x'}} |dx'\rangle \wedge |dt'\rangle + \gamma \underbrace{(E_y - \beta B_z)}_{E_{y'}} |dy'\rangle \wedge |dt'\rangle + \gamma \underbrace{(E_z + \beta B_y)}_{E_{z'}} |dz'\rangle \wedge |dt'\rangle \\
 & + B_x \underbrace{|dy'\rangle \wedge |dz'\rangle}_{B_{y'}} + \gamma \underbrace{(B_y + \beta E_z)}_{B_{x'}} |dz'\rangle \wedge |dx'\rangle + \gamma \underbrace{(B_z - \beta E_x)}_{B_{z'}} |dx'\rangle \wedge |dy'\rangle \quad (2.4-14)
 \end{aligned}$$

と計算することで変換則をつくることもできる。

3 階のテンソルである電流密度は

$$j_{x'y'z'} = \gamma (j_{xyz} + \beta j_{tyz}) = \gamma (j_{xyz} + \beta j_{yzt}) \quad (2.4-15)$$

$$j_{x'y't'} = \gamma^2 (j_{xyt} + \beta j_{tyt} + \beta j_{xyx} + \beta^2 j_{tyx}) = \gamma^2 (1 - \beta^2) j_{xyt} = j_{xyt} \quad (2.4-16)$$

$$j_{y'z't'} = \gamma (j_{yzt} + \beta j_{yxz}) = \gamma (j_{yzt} + \beta j_{xyz}) \quad (2.4-17)$$

$$j_{z'x't'} = \gamma^2 (j_{zxt} + \beta j_{ztt} + \beta j_{zxx} + \beta^2 j_{ztx}) = \gamma^2 (1 - \beta^2) j_{zxt} = j_{zxt} \quad (2.4-18)$$

という変換を受けるが、(2.3-13)の翻訳ルール

→ p90

$j_{xyt} = -j^z, j_{yzt} = -j^x, j_{zxt} = -j^y, j_{xyz} = j^t$ を使うと、

$$j^{t'} = \gamma (j^t - \beta j^x), j^{x'} = \gamma (j^x - \beta j^t), j^{y'} = j^y, j^{z'} = j^z \quad (2.4-19)$$

となって、反変ベクトルの Lorentz 変換に（当然ながら）一致する。

2.4.2 Lorentz 変換に関するパラドックス

さて、上で求めた電流密度の変換則の<ぼーーっと考えていると見逃すポイント>は「静止系で電荷密度が 0 ($j^t = j_{xyz} = 0$) であっても運動系では 0 じゃない」ことである。これに関しては有名なパラドックスがあるので紹介しよう。

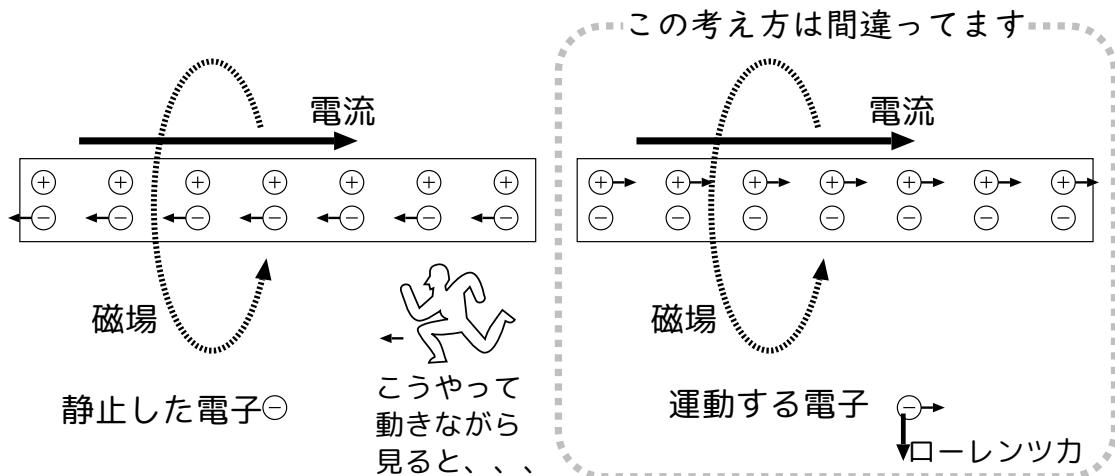


図 2-9

電流が流れている導線から少し離れたところに静止した電子がいる。導線には流れている自由電子（-電荷）がいるが、静止している金属イオン（+電荷）もいて、全体として電荷は中和している。ゆえに導線のまわりに電場はない。電流があるから磁場はあるが、磁場は止まっている電子に力を及ぼすことはない。よってこの電子は力を受けない。

ここで、流れている電子と同じ速度で移動しながらこの現象を見たとしよう。電子は止まってしまうが、金属イオンは逆に動き出すので、やはり電流は流れている。故に磁場はやはり発生している。今度は外においてある電子は動いている。磁場中を動く電子は力を受けるので、この立場で考えると電子には力が働く。

さて、はたして電子に力は発生するのか、しないのか？？

電線の中の電子の動く速度はけっこうゆっくり（歩く速度より遅いぐらい）なので、この実験は実際にやることができるが、もちろん、電子は動かない。見る人の立場によって結果が変わるはずはない。

電磁場の Lorentz 変換を知っていると、この謎には下の図のような答を出すことができる。すでに電磁場の Lorentz 変換を求めておいたので、それを見てもらうとわかると思うが、導線に対して動く人から見ると、導線に対して止まっている人には見えない電場が見えて、電場による力と磁場による力が相殺するのである。

この電場はもちろん、理由もなく発生するのではない。上で求めた電流密度の Lorentz 変換により、電荷密度が発生しているのである。電荷密度が 0 でなくなる原因は、導線の中を考えるとわかる（図 2-10 を見よ）。

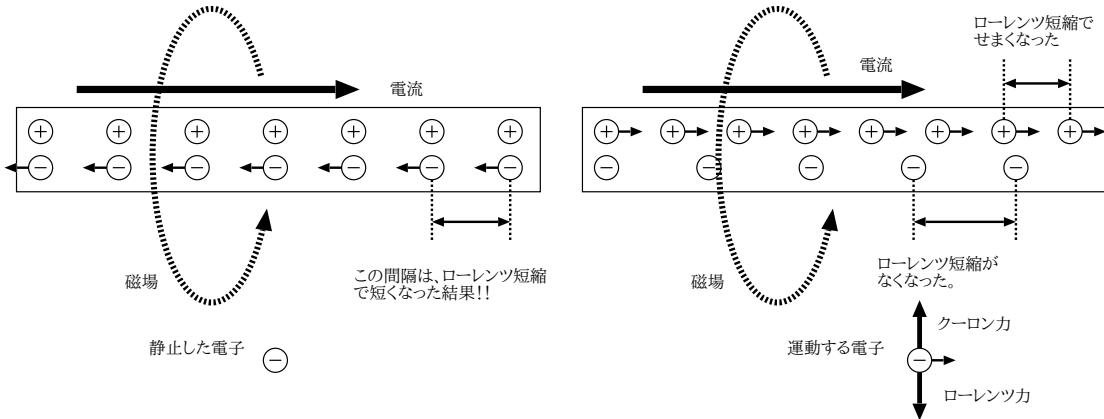


図 2-10

最初導線内には等しい電荷があって電場がキャンセルしている、と言ったが、相対論によれば動いている物体は Lorentz 短縮で長さが縮むはず。一群の電荷が動いたとすると、運動方向に圧縮されて電荷密度が上がる。ということは、今導線内にある電子の流れは「すでに Lorentz 短縮した結果」として+電荷とキャンセルしている。これを動きながら見ると、今度は+電荷が Lorentz 短縮により圧縮され、電子の方は逆に圧縮される原因がなくなり、いわば「圧縮が解除される」のである。結果として、運動しながら見ると導線は+に帯電している。この+に帯電した導線は電子を内側にひっぱり、磁場による Lorentz 力を打ち消す。

この問題が教えてくれる教訓は「相対論なんてのは宇宙の話や素粒子の話をする時にしか出てこない、特殊な世界の話」と思いこんではいけないということである。量子力学がミクロな世界にとどまらないように、相対論も普段見る物理現象にも効いているのである。相対論の助けなしには、電磁気現象を完全に理解することはできないのである。

2.4.3 「運動する磁場」は電場を伴う

電磁誘導の説明として、この Lorentz 変換を使って「磁場が運動すると電場ができるから」という説明をすることがある。この考え方を検証しておこう。

まるで高校物理の練習問題みたいだが、 z 方向に一様な磁束密度 B の磁場が掛かっていて、電場などはない空間を考える。その空間内では $F_{\perp} = B|dx\rangle \wedge |dy\rangle$ である。これを y 方向に速度 β の

ローレンツ変換すると、

$$F_{..} = B|\mathrm{d}x'\rangle(\gamma|\mathrm{d}y'\rangle + \gamma\beta|\mathrm{d}t'\rangle) \quad (2.4-20)$$

となり、磁場は z 方向に γB 、電場は x 方向に $\gamma\beta B$ だけできる。

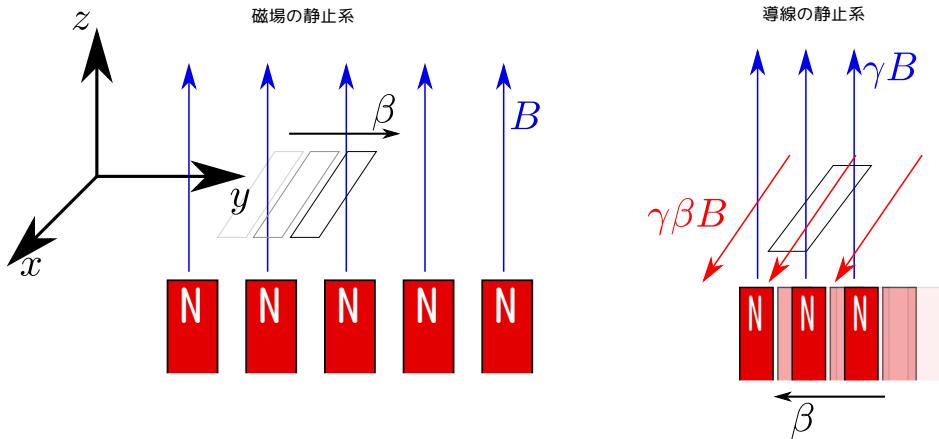
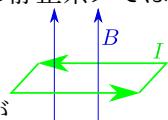


図 2-11

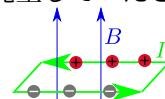
よってこの x' 座標系で静止している、 x 方向を向いた長さ L の導体棒には電位差 $\gamma\beta BL$ がある。その電場は、 x 軸正の方向に導体内の正電荷を引っ張る。

〈磁場が静止〉して導体棒が動く系では、電場はいないが導体内の電荷が動くことで「電流」が発生し、磁場中の電流が受ける力（フレミングの左手の法則による）がやはり x 軸の正の方向を向く。

さて、この電場、どこから出てきたのかな?—というと実は図に描かれていない「磁場を発生させていたもの」に、<磁場の静止系>では存在してなかった「電荷分布」が生まれているからなの



のように電磁石によって発生していたとしよう。電流が



た効果により導線に電荷がまわる。この現象を「誘導起電」、この運動方向を「電磁石の運動方向」と呼ぶ。このように発生する電荷を「誘導電荷」と呼ぶ。

流动していた導線が動くと、2.4.2 項で考えた効果により導線に電荷が  のように発生するのである。つまり「電場は運動したから湧いて出た」と考えると途中をすっ飛ばした理解になる。ちゃんと中抜きをせずに表現すれば、「運動したから電荷分布に変化が生じて、それがゆえに電場が出現した」のである^{†13}。

†13 「電磁誘導」という一つの名前で呼ばれている現象には、 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を通じて「 \vec{B} の時間変化によって生起き

れたもの」と、「静止系から運動系に移ったことにより生起された \vec{E} によるもの」がある。この違いは「誘導起電力とは何か」を考えるときにも重要。なお、起電力という言葉がしばしば誤用されている件については、文献 [8] を参照。



ここで発生した電場は、結局電荷密度由來の場なので、

$\text{d}E = 0$ (なじみの形では $\text{rot } \vec{E} = 0$) または

$\oint E = 0$ (なじみの形では $\oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$ を満たした電場である。これは (座標系によらない表示だから)、運動する座標系でも同じである。

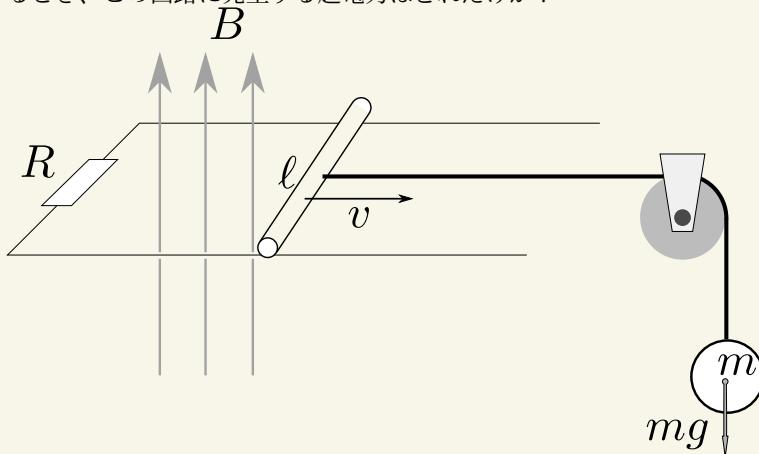
つまり、観測者が磁場に対して動くことによって生じる電場は、「一周すると 0」であるという条件を満たしている (荷電粒子を周回させても nonzero の仕事をもたらすことはない) 電場なのである。これに対して、磁場の時間変化に由来する (つまり、 $\text{d}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ からくる) 電場は周回積分して 0 ではない (つまりは起電力になる)。

「あれ、電線を動かしても発電はできるよね」と思った人は、どこに違いがあるのかを考えてみるとよい (以下の問い合わせを参照)。



【問い合わせ 2-1】 高校物理でよく出てくる

一様な鉛直上向きの磁束密度 B の磁場のある場所に、抵抗 R をつないだ水平な導体レール (平行で間隔は ℓ) を作り、そこに導体棒を渡した。導体棒に質量 m のおもりを滑車を通じて水平な糸でつないで運動させた。抵抗 R 以外の電気抵抗と空気抵抗、摩擦は無視できるとする。等速運動になっていくとき、この回路に発生する起電力はどれだけか?



答えは $B\ell v$ 。

という問題では、磁場は時間変化していないにも関わらず、起電力が発生している (電荷に仕事がされている!)。

上の話、特に「観測者が磁場に対して運動している系で発生する電場は周回積分すると 0」という話はどこへ行った?^{†14}

^{†14} hint: 「○○の話はどこへ行った?」という問い合わせへの答えは「ここに行った」である場合と、「そもそもその話とは前提が違う」である場合がある。

2.4.4 電流の作る磁場の式を Lorentz 変換で出す

直線上に分布した一様な電荷のつくる静電場は

$$E_{..} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} |d\rho\rangle \quad (2.4-21)$$

だから、4次元では、

$$F_{..} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} |d\rho\rangle \wedge |dt\rangle \quad (2.4-22)$$

である。これを z 軸方向に速度 β の Lorentz 変換をすると、 ρ, θ の二つの座標は変化せず、 z, t の2つの座標が Lorentz 変換される。基底の変換を行うと、

$$F_{..} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} |d\rho\rangle \wedge \underbrace{(\gamma|dt'\rangle + \beta\gamma|dz'\rangle)}_{|dt\rangle} \quad (2.4-23)$$

になる。電場は γ 倍に強くなる（圧縮される）。

磁場は

$$B_{..} = \frac{\rho_L\beta\gamma}{2\pi\rho} |d\rho\rangle \wedge |dz'\rangle \quad (2.4-24)$$

となる。 $|d\rho\rangle \wedge |dz'\rangle$ は（3次元なので）ベクトルとしてみれば θ 方向を向いている。つまりは右ねじの法則による磁場が（Lorentz 変換によって）出てくる。

2.5 $F_{..}$ から作られるスカラー

F からスカラーを作る方法は二つあって、まず一つは

$$\begin{aligned} \star F_{..} \wedge F_{..} &= -B_x B_x |dx\rangle \wedge |dt\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle + E_x E_x |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle \\ &\quad + (x, y, z \text{ サイクリック}) \\ &= - (E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z - B_x B_x - B_y B_y - B_z B_z) |dt\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \end{aligned} \quad (2.5-1)$$

である。これは $-\frac{1}{2}$ 倍すると電磁場のラグランジアン $\frac{1}{2}|\vec{E}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{B}|^2$ になる。

4次元に限って使えるもう一つが、

$$\begin{aligned} F_{..} \wedge F_{..} &= E_x B_x |dx\rangle \wedge |dt\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle + E_x B_x |dy\rangle \wedge |dz\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dt\rangle \\ &\quad + (x, y, z \text{ サイクリック}) \\ &= -2 (E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z) |dt\rangle \wedge |dx\rangle \wedge |dy\rangle \wedge |dz\rangle \end{aligned} \quad (2.5-2)$$

である。しかし（2.5-2）の量はあまり馴染み深い量ではない。

ラグランジアンの話をしたので、ついでに電磁場と電流密度の相互作用エネルギー密度についても書いておこう。3次元的な書き方をするとこれは $\rho V - \vec{j} \cdot \vec{A}$ であるから、 $-j^\mu A_\mu$ であ

る。ラグランジアン密度においては位置エネルギーはマイナス符号つきで登場するので、これは「ラグランジアン密度に $-\rho V + \vec{j} \cdot \vec{A} = j^{\mu} A_{\mu}$ を追加せよ」を意味する。これは form の言葉では、「 $A_{\mu} j_{\mu}$ を追加せよ」ということである ([\(2.3-18\)を参照](#))。よって、form で書いた電磁場の作用は、 $\int \left(-\frac{1}{2} \star F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_{\mu} j^{\mu} \right)$ になる。

 【問い合わせ】 1+2 次元時空の真空中の電磁気学の、Maxwell 方程式を form の形と成分表示で書き下せ。この時空での電磁気学は我々の 1+3 次元時空とどのように違うかを解説せよ。

第3章 微分形式で語る一般相対論

3.1 共変微分と平行移動

1.21節で考えた共変微分の意味は
 \rightarrow p71

$$\Delta x^{\mu} \nabla_{\mu} A_{\nu} = A_{\nu}(x + \Delta x) - \underbrace{(A_{\nu}(x) + \Delta x^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho})}_{A_{\nu//}(x \rightarrow x + \Delta x)} \quad (3.1-1)$$

のように考え直すことができる。すなわち、

$$A_{\nu//}(x \rightarrow x + \Delta x) \equiv A_{\nu}(x) + \Delta x^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho} \quad (3.1-2)$$

という量を「 A_{ν} を場所 x から場所 $x + \Delta x$ まで平行移動させたもの^{†1}」と定義して、共変微分は

$$\frac{\text{「最初から } x + \Delta x \text{ にいる量」} - \text{「 } x \text{ から場所 } x + \Delta x \text{ まで平行移動させてきた量」}}{\Delta x} \quad (3.1-3)$$

だと考える。シンプルな微分は

$$\frac{\text{「 } x + \Delta x \text{ にいる量」} - \text{「 } x \text{ にいる量」}}{\Delta x} \quad (3.1-4)$$

である。しかし場所 $x + \Delta x$ と場所 x ではベクトルのいる座標が違うから、この「シンプルな微分」は意味のある計算にならない。

スカラー量は平行移動しても変化しない。ゆえに共変ベクトルと反変ベクトルの内積も平行移動しても変化しない。このことは

$$(A_{\mu} B^{\mu})_{//}(x \rightarrow \Delta x) = A_{\mu}(x) B^{\mu}(x)$$

$$\underbrace{\Delta x^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho}}_{A_{\mu} \text{ の平行移動による変化}} + \underbrace{A_{\mu} (-\Delta x^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} B^{\nu})}_{B^{\mu} \text{ の平行移動による変化}} = 0 \quad (3.1-5)$$

のように確認できる（共変ベクトルと反変ベクトルで Γ の符号が違うのはこのような理由付けがある）。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分が0であること、すなわち $\nabla_{\mu} g_{\mu\nu} = \partial_{\mu} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\rho} g_{\mu\rho} = 0$ は、
 $\partial_{\mu} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\rho\mu}^{\rho} g_{\nu\rho} + \Gamma_{\rho\nu}^{\rho} g_{\mu\rho}$ と解釈すれば「 $g_{\mu\nu}$ を平行移動すると、そのままその場所にいる量にな

^{†1} この量は、 $\{x^{\cdot}\}$ と $\{\Delta x^{\cdot}\}$ 両方の関数である。

る」と言ってもよい。同じことを「ベクトルの内積と、平行移動したベクトルの内積は等しい」すなわち

$$g_{\mu\nu}(x) A^{\mu}(x) B^{\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x + \Delta x) A^{\mu}_{\parallel}(x + \Delta x) B^{\nu}_{\parallel}(x + \Delta x) \quad (3.1-6)$$

と言ってもよい。

このことから Γ を g で表すことができる。

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\tau}_{\rho\mu} g_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\rho\nu} g_{\tau\mu} = 0 \quad (3.1-7)$$

$$\partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} g_{\tau\rho} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho} g_{\tau\nu} = 0 \quad (3.1-8)$$

$$\partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\rho} g_{\tau\mu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\mu} g_{\tau\rho} = 0 \quad (3.1-9)$$

と三つの式を作つて（下2つの式の和）引く（一番上の式）をすると、

$$\begin{aligned} -\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - 2\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} g_{\tau\rho} &= 0 \\ \frac{1}{2} g^{\tau} (\partial_{\mu} g_{\tau\nu} + \partial_{\nu} g_{\tau\mu} - \partial_{\tau} g_{\mu\nu}) &= \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.1-10)$$

のよう Γ を求めることができる。

3.2 曲率

3.2.1 リーマン曲率

共変微分の交換関係 $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]$ を反変ベクトルに対するものとして

定義 11: リーマン曲率の定義

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} V^{\lambda} \quad (3.2-1)$$

のよう Γ を求める。右辺に V^{ρ} の微分は現れない。これは具体的に計算すればすぐに確認できる。

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\rho} = \partial_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \nabla_{\nu} V^{\lambda} \quad (3.2-2)$$

となるが、右辺第2項は μ, ν をひっくり返して引くことで消えるので、

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} &= \partial_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \nabla_{\nu} V^{\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \underbrace{\partial_{\mu} \partial_{\nu} V^{\rho}}_{\mu\nu\text{対称}} + \partial_{\mu} (\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} V^{\lambda}) + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \underbrace{\partial_{\nu} V^{\lambda}}_{\mu\nu\text{対称}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\tau} V^{\tau} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \underbrace{\partial_{\mu} V^{\lambda}}_{\mu\nu\text{対称}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \partial_{\nu} V^{\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\tau} V^{\tau} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

$$= \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\tau}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \right) V^\tau - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (3.2-3)$$

となる。よって、

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\tau}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \quad (3.2-4)$$

である。

スカラーに対する共変微分の交換関係は

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \phi &= \nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho \phi - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

となって 0 である ($\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ が μ, ν 対称であることに注意)。

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho^W &= \nabla_\mu ((\nabla_\nu V_\rho^W) W^\rho + V_\rho^W (\nabla_\nu W^\rho)) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= (\nabla_\mu \nabla_\nu V_\rho^W) W^\rho + (\nabla_\nu V_\rho^W) (\nabla_\mu W^\rho) + (\nabla_\mu V_\rho^W) (\nabla_\nu W^\rho) + V_\rho^W (\nabla_\mu \nabla_\nu W^\rho) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= ((\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V_\rho^W) W^\rho + V_\rho^W ((\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) W^\rho) \\ &= ((\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V_\rho^W) W^\rho + V_\rho^W R_{\lambda\mu\nu}^\rho W^\lambda = 0 \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

となることから、

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = -R_{\rho\mu\nu}^\lambda V_\lambda \quad (3.2-7)$$

がわかる。また、 $\boxed{\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0}$ から

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] g_{\rho\lambda}^V V^\lambda &= g_{\rho\lambda}^V [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda W^\lambda = g_{\rho\lambda}^V (R_{\tau\mu\nu}^\rho V^\tau W^\lambda + V_\rho^\lambda R_{\tau\mu\nu}^\tau W^\tau) \\ &= (R_{\rho\tau\mu\nu}^\lambda + R_{\tau\mu\nu}^\rho) V^\rho W^\lambda = 0 \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

となるので、

$$R_{\rho\tau\mu\nu} = -R_{\tau\rho\mu\nu} \quad (3.2-9)$$

がわかる。

共変微分に関するヤコビ恒等式を考えると、

$$[[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \nabla_\rho] V_\lambda + (\mu, \nu, \rho \text{ のサイクリック和}) = 0 \quad (3.2-10)$$

でなくてはいけない。よって、

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\rho V_\lambda - \nabla_\rho ([\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda) + (\mu, \nu, \rho \text{ のサイクリック和}) &= 0 \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\rho V_\lambda - \nabla_\rho (R_{\lambda\mu\nu}^\tau V_\tau) + (\mu, \nu, \rho \text{ のサイクリック和}) &= 0 \\ R_{\rho\mu\nu}^\tau \nabla_\tau V_\lambda + \underbrace{R_{\lambda\mu\nu}^\tau \nabla_\rho V_\tau}_{\text{相殺}} - (\nabla_\rho R_{\lambda\mu\nu}^\tau) V_\tau - \underbrace{R_{\lambda\mu\nu}^\tau \nabla_\rho V_\tau}_{\leftarrow \text{相殺}} + (\mu, \nu, \rho \text{ のサイクリック和}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

となる。 $\nabla_\tau V_\lambda$ の前の係数が 0 になるべきであることから、

結果 8: リーマン曲率の巡回対称性

$$R^\tau_{\rho\mu\nu} + R^\tau_{\mu\nu\rho} + R^\tau_{\nu\rho\mu} = 0 \quad (3.2-12)$$

が、 V_τ の前の係数が 0 になるべきことから

結果 9: ビアンキ恒等式

$$\nabla_\rho R^\tau_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\tau_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu R^\tau_{\lambda\rho\mu} = 0 \quad (3.2-13)$$

がわかる。

巡回対称性の式で添字を下におろして $R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} + R_{\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2} + R_{\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} = 0$ という式を作る。

$$R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} + R_{\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2} + R_{\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} = 0 \quad (3.2-14)$$

$$R_{\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_1} + R_{\alpha_2\beta_2\alpha_1\beta_1} + R_{\alpha_2\alpha_1\beta_1\beta_2} = 0 \quad (3.2-15)$$

$$R_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} + R_{\beta_1\alpha_1\alpha_2\beta_2} + R_{\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_1} = 0 \quad (3.2-16)$$

$$R_{\beta_2\alpha_1\alpha_2\beta_1} + R_{\beta_2\alpha_2\beta_1\alpha_1} + R_{\beta_2\beta_1\alpha_1\alpha_2} = 0 \quad (3.2-17)$$

という 4 本の式を作る。これらの式の中には、 $\alpha\alpha\beta\beta$ タイプの添字のものが 2 回、 $\beta\beta\alpha\alpha$ タイプの添字のものが 2 回現れ、 $\alpha\beta\alpha\beta$ の形が 8 回現れている。リーマン曲率の添字の反対称性を使って、添字ができるかぎり同じ形になるように並べ直すと、

$$R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} - R_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2} + R_{\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} = 0 \quad (3.2-18)$$

$$-R_{\alpha_2\beta_1\alpha_1\beta_2} + R_{\alpha_2\beta_2\alpha_1\beta_1} - R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} = 0 \quad (3.2-19)$$

$$R_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} - R_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2} + R_{\alpha_2\beta_1\alpha_1\beta_2} = 0 \quad (3.2-20)$$

$$-R_{\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} + R_{\alpha_2\beta_2\alpha_1\beta_1} - R_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} = 0 \quad (3.2-21)$$

と変わる（同じ式になったものを同じ色にした）。（1 番めの式） – （2 番めの式） – （3 番めの式） + （4 番めの式） という計算を行うと、

$$2R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} - 2R_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} = 0 \quad (3.2-22)$$

を得る。つまり

結果 10: リーマン曲率の対称性

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.2-23)$$

がわかる。

3.2.2 リッチ曲率とスカラー曲率

定義 12: リッチ曲率

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{\rho} \quad (3.2-24)$$

でリッチ曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ (結果 10 のおかげで対称テンソルになる) を定義する。さらに、それを縮約した

定義 13: スカラー曲率

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.2-25)$$

でスカラー曲率を定義する。別の書き方すると、

$$R^\mu_\nu = R^{\rho\mu}_{\rho\nu}, \quad R = R^{\rho\mu}_{\rho\mu} \quad (3.2-26)$$

である。

ビアンキの恒等式(3.2-13)の τ と ρ を縮約すると

$$\nabla_\rho R^\rho_{\lambda\mu\nu} - \nabla_\mu R_{\lambda\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.2-27)$$

が、さらに λ と μ を縮約すると

$$\begin{aligned} -\nabla_\rho R^\rho_\nu - \nabla_\mu R^\mu_\nu + \nabla_\nu R &= 0 \\ \nabla_\rho \left(R^\rho_\nu - \frac{1}{2} g^\rho_\nu R \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2-28)$$

という恒等式を得る。この式の括弧内は Einstein テンソルと呼ばれ、

$$G^\mu_\nu \equiv R^\mu_\nu - \frac{1}{2} g^\mu_\nu R \quad (3.2-29)$$

で定義される。

Einstein テンソルは Einstein 方程式に出てくることで知られる。Einsteiner 方程式はラグランジアン密度 $\sqrt{-g}R$ の変分を取ることで出てくるので、それを見ておこう。

そのために

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} gg^{\beta\alpha} \delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\beta\alpha} \delta g_{\alpha\beta} \quad (3.2-30)$$

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\rho\lambda} \quad (3.2-31)$$

$$\delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \delta g_{\alpha\beta} \quad (3.2-32)$$

のようにまず公式を作る。すると (R の中には $g_{\mu\nu}$ が含まれていないとすれば)、

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta} \right) \delta g_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.2-33)$$

という式が変分原理から出る。「だが R の中には $g_{\mu\nu}$ が含まれているぞ」と心配になる人がいるだろう。その心配を払拭するためには 2 つの方法

(1) g と Γ は独立な変数として扱っておいて、実はこれら 2 つの間の関係式が後からちゃんと出てくることを示す。

(2) g と Γ は独立な変数でないとして扱って、 R に含まれる g による変分は自動的に 0 になることを示す。

がある。まず第 1 の方法の計算を行おう。 R の中には $g_{\mu\nu}$ は常に $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ に含まれる形で入っている。そこで、 $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ の変分を取ると、

$$\begin{aligned} & \delta(\sqrt{-g}R) \\ &= \sqrt{-g} \left(g^{\lambda\nu} \partial_\rho \delta \Gamma^{\rho\nu}_\lambda - g^{\lambda\nu} \partial_\nu \delta \Gamma^{\rho\lambda}_\rho + g^{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\rho\lambda}_{\rho\tau} \Gamma^{\tau\nu}_\lambda + g^{\lambda\nu} \Gamma^{\rho\lambda}_{\rho\tau} \delta \Gamma^{\tau\nu}_\nu - g^{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\rho\lambda}_{\nu\tau} \Gamma^{\tau\rho}_\rho - g^{\lambda\nu} \Gamma^{\rho\lambda}_{\nu\tau} \delta \Gamma^{\tau\rho}_\rho \right) \end{aligned} \quad (3.2-34)$$

となる。ここで、 $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ はテンソルではないが、あたかも添字の示す形のテンソルであったような顔をして共変微分を行うと、

$$\nabla_\rho \delta \Gamma^\tau_{\nu\lambda} = \partial_\rho \delta \Gamma^\tau_{\nu\lambda} + \Gamma^\tau_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \delta \Gamma^\tau_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\tau_{\alpha\nu} \quad (3.2-35)$$

$$\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} = \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \delta \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \quad (3.2-36)$$

$$\nabla_\rho \delta \Gamma^\tau_{\tau\lambda} = \partial_\rho \delta \Gamma^\tau_{\tau\lambda} - \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\tau_{\alpha\tau} \quad (3.2-37)$$

という式を作ることができる^{†2}。これらの式を使うと、

$$\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \nabla_\rho \delta \Gamma^{\rho\nu}_\lambda - \sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^{\rho\lambda}_\rho \quad (3.2-38)$$

とまとまる。 $\delta \Gamma$ の添字を $\delta \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}$ に揃えると

$$\sqrt{-g} g^{\lambda\beta} \nabla_\alpha \delta \Gamma^{\alpha\beta}_\beta - \sqrt{-g} g^{\lambda\beta} \nabla_\beta \delta \Gamma^{\alpha\beta}_\alpha \quad (3.2-39)$$

となり、部分積分を行うことで

$$-\nabla_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\beta} \right) \delta \Gamma^{\alpha\beta}_\beta + \nabla_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\beta\lambda}_\alpha \right) \delta \Gamma^{\alpha\beta}_\beta \quad (3.2-40)$$

である。よって運動方程式は

$$-\nabla_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\beta} \right) + \frac{1}{2} \nabla_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \delta_\alpha^\beta \right) + \frac{1}{2} \nabla_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\beta\nu} \delta_\alpha^\lambda \right) = 0 \quad (3.2-41)$$

^{†2} 実は「 $\delta \Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ はテンソルとしてふるまう」ことがわかるので、これで正しい。また、ここではすぐ後で部分積分を使って共変微分を $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ の方に押し付けてしまうので、問題はない。

であり、この α, β を縮約すると $\nabla_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = 0$ がわかるので、

$$\nabla_\alpha (\sqrt{-g} g^{\lambda\beta}) = 0 \quad (3.2-42)$$

である。 \rightarrow p104 (3.2-32)を使うと

$$\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \nabla_\alpha g_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.2-43)$$

となるが、これは結局 $\nabla_\rho g_{\alpha\beta} = 0$ となる。これは「運動方程式から出てきた」ことに注意。

ここでは g と Γ を取り敢えずは独立な変数として扱ったが、そうでない場合は $\nabla_\rho g_{\alpha\beta} = 0$ が満たされるように g と Γ の関係が決まるので、作用の変分のうち $\delta\Gamma$ に比例する部分は消えてしまい、結局残るのは \rightarrow p?? (??) になる。

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu &= R^{\rho\mu}{}_{\rho\nu} - \frac{1}{2} g^\mu{}_\nu R^{\rho\lambda}{}_{\rho\lambda} \\ &= g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\nu R^{\rho\lambda}{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\lambda R^{\rho\lambda}{}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.2-44)$$

のように書き直すと、 $R^{\rho\lambda}{}_{\alpha\beta}$ に g 3つを掛けた量になる。リーマン曲率の添字の反対称性を使うと、

$$\begin{aligned} &g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\nu - \frac{1}{2} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\lambda \\ \xrightarrow{\alpha\beta\text{の反対称性}} \quad &\frac{1}{2} g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\nu - \frac{1}{2} g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\nu g^\beta{}_\rho - \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\lambda + \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\lambda g^\beta{}_\rho \\ \xrightarrow{\rho\lambda\text{の反対称性}} \quad &\frac{1}{4} g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\nu - \frac{1}{4} g^\mu{}_\rho g^\alpha{}_\lambda g^\beta{}_\nu - \frac{1}{4} g^\mu{}_\lambda g^\alpha{}_\nu g^\beta{}_\rho + \frac{1}{4} g^\mu{}_\rho g^\alpha{}_\nu g^\beta{}_\lambda - \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\lambda + \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\lambda g^\beta{}_\rho \\ &= \frac{1}{4} \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu, \alpha, \beta \\ \lambda, \rho, \nu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-45)$$

と置き換えることができる。

以上から

$$G^\mu{}_\lambda = \frac{1}{4} \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu, \alpha, \beta \\ \lambda, \rho, \nu \end{pmatrix} R^{\rho\nu}{}_{\alpha\beta} \quad (3.2-46)$$

である。これを使うと、たとえば $G^0{}_0$ にかかるのは $\text{sgn} \begin{pmatrix} 0, \alpha, \beta \\ 0, \rho, \nu \end{pmatrix}$ だから (α, β) と (ρ, ν) が $(1, 2), (2, 3), (1, 3)$ (および順番を変えたもの) の三つの組み合わせの和になる (順番を変えたものは 2×2 で 4 通りある)。つまり、

$$G^0{}_0 = R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{13}{}_{13} \quad (3.2-47)$$

である。 $G^0{}_1$ の場合、組み合わせは $\begin{cases} (\alpha, \beta) = (0, 2) \\ (\rho, \lambda) = (1, 2) \end{cases}$ と $\begin{cases} (\alpha, \beta) = (0, 3) \\ (\rho, \lambda) = (1, 3) \end{cases}$ になり、

$$G^0{}_1 = R^{20}{}_{12} + R^{30}{}_{13} \quad (3.2-48)$$

となる。

3.3 微分形式による曲がった時空の表現

3.3.1 多脚場 1-form

ここまでよく使われる一般相対論の計算だが、微分形式を使っての省力化を考えてみよう。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を多脚場 e_μ^M で表す方法がある。多脚場について説明しよう。

ある座標系 $\{x^\cdot\}$ から、ある点 x において計量テンソルの値が $\eta_{\mu\nu}$ に一致しているような座標系 $\{X_{(x)}^\cdot\}$ (局所 Lorentz 系^{†3}) への座標変換を行ったとする。 $\{X_{(x)}^\cdot\}$ 座標系の方の 4 次元テンソルの添字 (0, 1, 2, 3 を取る) は $A, B, C, D, M, N, P, Q, R$ のようなローマ字の大文字で表現することにする^{†4}。

変換前後の計量テンソルの関係は

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X_{(x)}^M}{\partial x^\mu} \frac{\partial X_{(x)}^N}{\partial x^\nu} \eta_{MN} \quad \text{ただし、考えている場所 } x \text{ でのみ。} \quad (3.3-1)$$

となる。ここで

$$e_\mu^M = \frac{\partial X_{(x)}^M}{\partial x^\mu} \quad (3.3-2)$$

と定義すれば、

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^M e_\nu^N \eta_{MN} \quad (3.3-3)$$

のように表される。つまり、 $\{x^\cdot\}$ 座標系から $\{X_{(x)}^\cdot\}$ 座標系への変換を表す行列が e_μ^M である。これを「多脚場」と呼ぶ。なお、多脚場の添字の付き方が違うものは、

$$e^{\mu M} = g^{\mu\nu} e_\nu^M, \quad e_{\mu M} = \eta_{MN} e_\mu^N, \quad e^\mu_M = g^{\mu\nu} \eta_{MN} e_\nu^N \quad (3.3-4)$$

のように μ, ν 足は g を使って、 M, N の足は η を使って上げ下げしたものと定義する。こう定義すると

$$e^{\mu M} e_\nu^M = \delta^\mu_\nu, \quad e^\mu_M e_{\mu N} = \delta^M_N \quad (3.3-5)$$

となる（この意味で上付き e と下付き e は互いの逆行列）。

多脚場 e_μ^A が時空の座標変換に対して

$$e_\mu^A \rightarrow \tilde{e}_{\tilde{\mu}}^A = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} e_\nu^A \quad (3.3-6)$$

^{†3} $X_{(x)}$ の (x) は「場所 x で（のみ）計量テンソルの値が $\eta_{\mu\nu}$ に一致するようにした座標系」を意味する。つまり各場所ごとに $X_{(x)}$ 座標系がある。

^{†4} 後で、やはり $X_{(x)}$ 座標系の空間成分 (1, 2, 3) を表す添字が出てくるが、それは I, J, K, L で表現することにする。

のように共変ベクトルの変換をなすことはすぐにわかる。

この多脚場の時空の添字を form の基底と縮約する（局所 Lorentz 系の添字は放っておく）ことで「多脚場 1-form」

$$e_{\cdot}^M = e_{\mu}^{\boxed{M}} |dx^{\mu}\rangle \quad (3.3-7)$$

という 1-form を作る。これを使うと線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \underbrace{\eta_{\textcolor{teal}{M}\textcolor{red}{N}} \underbrace{e_{\cdot}^M e_{\cdot}^N}_{|dx^{\mu}\rangle = dx^{\mu}}} \quad (3.3-8)$$

のように書くことができる。4 次元であれば

$$ds^2 = \underbrace{-e_{\cdot}^0 e_{\cdot}^0 + e_{\cdot}^1 e_{\cdot}^1 + e_{\cdot}^2 e_{\cdot}^2 + e_{\cdot}^3 e_{\cdot}^3}_{|dx^{\mu}\rangle = dx^{\mu}} \quad (3.3-9)$$

である^{†5}。この式を使うと、線素の式から e_{\cdot}^M を見出すことができる。たとえばシュワルツシユルト計量

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3-10)$$

が出てくるようにするには

$$e_{\cdot}^0 = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} |dt\rangle, \quad e_{\cdot}^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}} |dr\rangle, \quad e_{\cdot}^2 = r |d\theta\rangle, \quad e_{\cdot}^3 = r \sin \theta |d\phi\rangle \quad (3.3-11)$$

である。

3.3.2 局所ローレンツ座標系のベクトルの共変微分

$X_{(x)}$ 座標系を「局所ローレンツ座標系」などと呼ぶ。局所ローレンツ座標系内の反変ベクトルは、

$$A^M = e_{\mu}^{\boxed{M}} A^{\mu} \quad (3.3-12)$$

と定義されることになる。考えている系は「局所 Lorentz 変換」と呼ばれる変換

$$V^M \rightarrow \left(e^{\Lambda_{\cdot}}\right)^M_{\textcolor{teal}{N}} V^{\textcolor{blue}{N}} \quad (3.3-13)$$

に対して不变である。

A^M に対する共変微分は

$$\nabla_{\mu} A^M = \partial_{\mu} A^M + \omega_{\mu}^{\textcolor{teal}{M}} \underbrace{A^{\textcolor{blue}{N}}}_{\textcolor{teal}{N}} \quad (3.3-14)$$

^{†5} (3.3-9) における積（たとえば $e_{\cdot}^1 e_{\cdot}^1$ ）は単なる積であって内積でも外積でもくさび積でもないことに注意。

のように「ゲージ場」にあたる量 ω （「スピン接続」と呼ぶ）を加えて定義される。なぜならば、この量は局所ローレンツ変換に対して

$$\nabla_\mu A^M \rightarrow \left(e^{\Lambda^i} \right)^M_N \nabla_\mu A^N \quad (3.3-15)$$

と変換しなくてはいけないが、局所ローレンツ変換を表す演算 $e^{\Lambda^i(x)}$ は微分を（ ω の導入なしでは）通り抜けることができないからである。

$\omega_\mu^M{}_N$ が Yang-Mills 場のよう

$$\omega_\mu^M{}_N \rightarrow - \left(\partial_\mu e^{\Lambda^i} \right)^M_P \left(e^{-\Lambda^i} \right)_N^P + \left(e^{\Lambda^i} \right)^M_P \omega_\mu^P \left(e^{-\Lambda^i} \right)_N^Q \quad (3.3-16)$$

と変換されなくてはいけない。

この共変微分もライプニッツ則を満たすようにしよう。ならば、

$$\nabla_\mu (\eta_M^N A^M B^N) = \partial_\mu (\eta_M^N A^M B^N) \quad (3.3-17)$$

であるべきだ（スカラーの共変微分は普通の微分）。よって

$$\eta_M^N \omega_\mu^M \eta_P^N B^P + \eta_M^N A^M \omega_\mu^P \eta_P^N B^P = 0 \quad (3.3-18)$$

でなくてはいけない。任意の A^M, B^N に対してこれが成り立つことから、 $\omega_\mu^{MN} = -\omega_\mu^{NM}$ がわかる（ $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ の μ, ν は対称だが、 ω_μ^{MN} の M, N は反対称）。

この多脚場に対する共変微分を考えよう。

$$\nabla_\mu e_\nu^M \equiv \partial_\mu e_\nu^M - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^M + \omega_\mu^M \eta_N^N e_\nu^N \quad (3.3-19)$$

となる。これが 0 になることから、

$$- (\partial_\mu e_\nu^M) e_\nu^N + \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^M e_\nu^N = \omega_\mu^{MN} \quad (3.3-20)$$

がわかる。

Γ を e で表現すると

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\tau} \left(\partial_\mu (e_\nu^M e_\tau^M) + \partial_\nu (e_\mu^M e_\tau^M) - \partial_\tau (e_\mu^M e_\nu^M) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\partial_\mu e_\nu^M + \partial_\nu e_\mu^M) e_\mu^M + g^{\rho\tau} \left(\partial_\mu e_\tau^M - \partial_\tau e_\mu^M \right) e_\nu^M + g^{\rho\tau} \left(\partial_\nu e_\tau^M - \partial_\tau e_\nu^M \right) e_\mu^M \right) \end{aligned} \quad (3.3-21)$$

となり、この添字を e を使って上げ下げすることで、

$$e_\rho^M \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\nu^N = \frac{1}{2} (\partial_\mu e_\nu^M + \partial_\nu e_\mu^M) e_\nu^N + \frac{1}{2} e_\rho^M (\partial_\mu e_\rho^N - \partial_\rho e_\mu^N) + \frac{1}{2} e_\rho^M (\partial_\nu e_\rho^P - \partial_\rho e_\nu^P) e_\nu^N e_\mu^P \quad (3.3-22)$$

を得る。この結果を代入して、

$$\frac{1}{2}(-\partial_\mu e_\nu^M + \partial_\nu e_\mu^M)e_\nu^N + \frac{1}{2}e_\lambda^M(\partial_\mu e_\lambda^N - \partial_\lambda e_\mu^N) + \frac{1}{2}e_\lambda^M(\partial_\nu e_\lambda^P - \partial_\lambda e_\nu^P)e_\mu^N e_\mu^P = \omega_\mu^{MN} \quad (3.3-23)$$

のように ω を e で表現することができる。

多脚場 1-form の外微分である

$$\text{d}e_\cdot^M = \frac{1}{2}(\partial_\mu e_\nu^M - \partial_\nu e_\mu^M) |dx^\mu\rangle \wedge |dx^\nu\rangle \quad (3.3-24)$$

の成分を表現するものとして、

$$(\text{d}e_\cdot^M)_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu^M - \partial_\nu e_\mu^M \quad (3.3-25)$$

という記号を使うことにすれば、(3.3-23) を

結果 11: 多脚場からスピン接続を求める式

$$\omega_\mu^{MN} = \frac{1}{2}(-(\text{d}e_\cdot^M)_{\mu\nu} e_\nu^N + (\text{d}e_\cdot^N)_{\mu\nu} e_\mu^M + e_\mu^P (\text{d}e_\cdot^P)_{\nu\lambda} e_\lambda^M e_\nu^N) \quad (3.3-26)$$

のように書くことができる。form の言語で書くと

結果 12: 多脚場 1-form からスピン接続 1-form を求める式

$$\omega_\cdot^{MN} = \frac{1}{2}(-\text{d}(e_\cdot^M)\text{d}e_\cdot^N + \text{d}(e_\cdot^N)\text{d}e_\cdot^M + e_\cdot^P (\text{d}(e_\cdot^M)\text{d}(e_\cdot^N)\text{d}e_\cdot^P)) \quad (3.3-27)$$

である。

(3.3-26) を

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{MN} &= \frac{1}{2}e_\mu^P \left(-e_\nu^P (\text{d}e_\cdot^M)_{\mu\nu} e_\nu^N + e_\nu^P (\text{d}e_\cdot^N)_{\mu\nu} e_\nu^M + (\text{d}e_\cdot^P)_{\nu\lambda} e_\lambda^M e_\nu^N \right) \\ &= \frac{1}{2}e_\mu^P \left(-e_\nu^N e_\nu^P (\text{d}e_\cdot^M)_{\mu\nu} + e_\nu^M e_\nu^P (\text{d}e_\cdot^N)_{\mu\nu} + e_\lambda^M e_\nu^N (\text{d}e_\cdot^P)_{\mu\lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.3-28)$$

のように $e_{\mu P}$ を前に出す形に直すと、

$$\omega_\cdot^{MN} = \frac{1}{2}e_\cdot^P \left(-\text{d}(e_\cdot^N)\text{d}(e_\cdot^M) + \text{d}(e_\cdot^M)\text{d}(e_\cdot^N) + \text{d}(e_\cdot^M)\text{d}(e_\cdot^N) \right) \quad (3.3-29)$$

と書くこともできる。

$$\Omega^{PMN} = -\text{d}(e_\cdot^M)\text{d}(e_\cdot^N)\text{d}e_\cdot^P = e_\alpha^M e_\beta^N (\text{d}e_\cdot^P)_{\alpha\beta} \quad (3.3-30)$$

と書くことにすると、

$$\omega_{.MN} = \frac{1}{2} e_{.P} \left(\Omega^{MN}{}^P + \Omega^{NP}{}^M - \Omega^{PM}{}^N \right) \quad (3.3-31)$$

となる。

e と ω の関係としては別の式がよく知られているので導出しておく。(3.3-19)から $\mu \leftrightarrow \nu$ と交換した量を引いて → p109

$$\partial_\mu e_\nu^M - \partial_\nu e_\mu^M + \omega_\mu{}^M{}_{\textcolor{violet}{N}} e_\nu^{\textcolor{red}{N}} - \omega_\nu{}^M{}_{\textcolor{violet}{N}} e_\mu^{\textcolor{red}{N}} = 0 \quad (3.3-32)$$

とすることで

結果 13: 多脚場 1-form とスピン接続 1-form の関係

$$\text{d} e_{.}^M + \omega_{.N}{}^M e_{.}^{\textcolor{blue}{N}} = 0 \quad (3.3-33)$$

が得られる。

(3.3-33) は $\omega = \text{なんとか}$ の形をしていないので、この式だけから ω を求められるのか? — という点が不安になる。 ω を求めるには「 $\omega_{.N}{}^M e_{.}^{\textcolor{blue}{N}}$ から、 $\textcolor{brown}{e}_{.}^N$ を外す」作業が必要になる。まず、 $e_{.}^B$ との内部積を取ってみよう。

$$\mathcal{U}(e_{.}^B) \omega_{.N}{}^M e_{.}^{\textcolor{blue}{N}} = (\mathcal{U}(e_{.}^B) \omega_{.N}{}^M) e_{.}^{\textcolor{blue}{N}} - \omega_{.N}{}^M (\mathcal{U}(e_{.}^B) e_{.}^{\textcolor{blue}{N}}) = e_{.}^{\textcolor{brown}{B}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^M e_{.}^{\textcolor{red}{N}} - \omega_{.}^{MB} \quad (3.3-34)$$

となる^{†6}。さらに内部積をもう一度取ると

$$\eta^{BN}$$

$$\mathcal{U}(e_{.}^A) \mathcal{U}(e_{.}^B) \omega_{.N}{}^M e_{.}^{\textcolor{blue}{N}} = \mathcal{U}(e_{.}^A) (e_{.}^{\textcolor{brown}{B}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^M e_{.}^{\textcolor{red}{N}} - \omega_{.}^{MB}) = -e_{.}^{\textcolor{brown}{B}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{MA} + e_{.}^{\textcolor{brown}{A}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{MB} \quad (3.3-35)$$

という式も出せる。添字を適当に取り替えつつここで出てきた 3 式の線形結合を作れば $\omega_{.MN}$ を出すことができる。

すなわち、(3.3-34) の添え字を取り替えて作った式

$$\mathcal{U}(e_{.}^M) \omega_{.P}{}^N e_{.}^{\textcolor{blue}{P}} = e_{.}^{\textcolor{brown}{P}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^N e_{.}^{\textcolor{red}{P}} - \omega_{.}^{NM} \quad (3.3-36)$$

$$\mathcal{U}(e_{.}^N) \omega_{.P}{}^M e_{.}^{\textcolor{blue}{P}} = e_{.}^{\textcolor{brown}{P}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^M e_{.}^{\textcolor{red}{P}} - \omega_{.}^{MN} \quad (3.3-37)$$

と (3.3-35) の添字を付け替えて作った式

$$\mathcal{U}(e_{.}^M) \mathcal{U}(e_{.}^N) \omega_{.Q}{}^P e_{.}^{\textcolor{blue}{Q}} = -e_{.}^{\textcolor{brown}{P}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{PM} + e_{.}^{\textcolor{brown}{M}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{PN} = e_{.}^{\textcolor{brown}{P}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{MP} - e_{.}^{\textcolor{brown}{M}} \omega_{\textcolor{brown}{P}}{}^{NP} \quad (3.3-38)$$

から (3.3-36)–(3.3-37)+(3.3-38) と $e_{.}^P$ で P を縮約した式を計算することで、

$$\mathcal{U}(e_{.}^M) \omega_{.N}{}^P e_{.}^{\textcolor{blue}{P}} - \mathcal{U}(e_{.}^N) \omega_{.M}{}^P e_{.}^{\textcolor{blue}{P}} + e_{.}^{\textcolor{brown}{P}} \mathcal{U}(e_{.}^M) \mathcal{U}(e_{.}^N) \omega_{.Q}{}^P e_{.}^{\textcolor{blue}{Q}} = -2\omega_{.}^{NM} \quad (3.3-39)$$

^{†6} 1-form と 1-form のくさび積に対する内部積は(1.13-3)を参照。→ p50

を得る。これから

$$\omega_{\cdot}^{MN} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}(e^M) \omega_{\cdot}^N \overset{P}{\wedge} e_{\cdot}^P - \mathcal{U}(e^N) \omega_{\cdot}^M \overset{P}{\wedge} e_{\cdot}^P - \mathcal{U}(e^M) \mathcal{U}(e^N) \omega_{\cdot}^P \overset{Q}{\wedge} e_{\cdot}^Q e_{\cdot}^P) \quad (3.3-40)$$

となる。 $\mathbf{d} \cdot e_{\cdot}^M = -\omega_{\cdot}^M \overset{P}{\wedge} e_{\cdot}^P$ を使うと、

$$\omega_{\cdot}^{MN} = \frac{1}{2} (-\mathcal{U}(e^M) \mathbf{d} \cdot e_{\cdot}^N + \mathcal{U}(e^N) \mathbf{d} \cdot e_{\cdot}^M + e_{\cdot}^P \mathcal{U}(e^M) \mathcal{U}(e^N) \mathbf{d} \cdot e_{\cdot}^P) \quad (3.3-41)$$

がわかる。つまり (3.3-27) が出てきた。よって $\begin{array}{c} \text{結果 13} \\ \xrightarrow{\text{p110}} \end{array}$ だからスピン接続 1-form は完全に決定できる。

3.3.3 局所ローレンツ座標のベクトルで計算する曲率

さて、こうなると、局所ローレンツの添字を持った量に対しても、

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^M = R^M_{\text{N} \mu \nu} V^{\text{N}} \quad (3.3-42)$$

を定義したくなるところだ。計算してみよう。

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^M &= \partial_{\mu} \nabla_{\nu} V^M + \underbrace{\Gamma_{\mu \nu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} V^M}_{\mu \nu \text{対称}} + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} V^{\text{N}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \underbrace{\partial_{\mu} \partial_{\nu} V^M}_{\mu \nu \text{対称}} + \partial_{\mu} (\omega_{\nu}^M V^{\text{N}}) + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} V^{\text{N}} + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} \omega_{\nu}^P V^{\text{N}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_{\mu} \omega_{\nu}^M V^{\text{N}} + \underbrace{\omega_{\nu}^M \nabla_{\nu} V^{\text{N}}}_{\mu \nu \text{対称}} + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} V^{\text{N}} + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} \omega_{\nu}^P V^{\text{N}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_{\mu} \omega_{\nu}^M V^{\text{N}} + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} \omega_{\nu}^P V^{\text{N}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned} \quad (3.3-43)$$

よって、

$$R^M_{\text{N} \mu \nu} = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^M - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^M + \omega_{\mu}^M \nabla_{\nu} \omega_{\nu}^P - \omega_{\nu}^M \nabla_{\mu} \omega_{\mu}^P \quad (3.3-44)$$

である。この式を form で書くと

$$R^M_{\text{N} \mu \nu} = \mathbf{d} \cdot \omega_{\cdot}^M \nabla_{\mu} \omega_{\nu}^P + \omega_{\cdot}^M \overset{P}{\wedge} \omega_{\nu}^P \nabla_{\mu} \omega_{\nu}^P \quad (3.3-45)$$

となる。

2つのリーマン曲率は、

$$R^{\rho}_{\lambda \mu \nu} = e^{\rho} \overset{M}{\wedge} e_{\lambda} \overset{N}{\wedge} R^{\text{M}}_{\text{N} \mu \nu} \quad (3.3-46)$$

という関係にある。

この形で書くと、

$$V_M^{\square} R^M_{\square \mu \nu} V_N^{\square} = 0 \quad (3.3-47)$$

がすぐにわかる。足を上げ下げすると、

$$V_M^{\square} R^M_{\square \mu \nu} V_N^{\square} = 0 \quad (3.3-48)$$

となるが、 $\text{d}\omega^{MN}$ は M, N 反対称だし、第 2 項も

$$\omega^M_{\square P} \omega^P_{\square N} = -\omega^M_{\square P} \omega^N_{\square P} = \omega^N_{\square P} \omega^M_{\square P} = -\omega^N_{\square P} \omega^M_{\square P} = -\omega^N_{\square P} \omega^P_{\square M} \quad (3.3-49)$$

となって M, N 反対称となる。

このことから、

$$V_M^{\square} R^M_{\square \mu \nu} V_N^{\square} = V_\rho^{\square} R^{\rho \lambda}_{\square \mu \nu} V_\lambda^{\square} = 0 \quad (3.3-50)$$

がわかるが、これはリーマン曲率は前の 2 つの添字についても反対称であること、つまり

$$R_{\rho \lambda \mu \nu} = -R_{\lambda \rho \mu \nu} \quad (3.3-51)$$

を示している。

スカラー曲率は通常の $R = g^{\mu \nu} g^{\rho \lambda} R_{\mu \rho \nu \lambda}$ の添字の一部を局所 Lorentz 系の添字に変えて、

$$e^\mu_M e^\nu_N R^M_{\square \mu \nu} \quad (3.3-52)$$

のように縮約することで得られる。

Einstein テンソルを作る式(3.2-46) \rightarrow p106 $G^\mu_\nu = \frac{1}{4} \delta^\mu_{\nu} \delta^{\alpha \beta}_{\rho \lambda} R^{\rho \lambda}_{\alpha \beta}$ の添字を局所 Lorentz の足にすることで、

$$G^\mu_\nu = \frac{1}{4} \delta^\mu_{\nu} \delta^{\alpha \beta}_{\rho \lambda} e^\rho_M e^\lambda_N R^M_{\square \alpha \beta} \quad (3.3-53)$$

という式も作ることができる。この式は e, ω を独立な変数とみなしつつ、ラグランジアン密度 $\sqrt{-g}R$ の変分を取ることで得られる。

ラグランジアン密度は

$$\sqrt{-g} g^{\mu \alpha} g^{\nu \beta} R_{\mu \nu \alpha \beta} = \sqrt{-g} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \quad (3.3-54)$$

と書くことができるが、 μ, ν と α, β の反対称性と(1.17-22)の 4 次元のバージョンである \rightarrow p63

$$\epsilon_{\rho \lambda}^{(1)} \epsilon_{\mu \nu}^{\square \lambda \alpha \beta} = 2 \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu \right) \quad (3.3-55)$$

を使うと、

$$\frac{1}{4} \sqrt{-g} \epsilon_{\rho \lambda \mu \nu}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\rho \lambda \alpha \beta} R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \quad (3.3-56)$$

と書いててもよい。

スピン接続を使った作用に書き直すために、

$$\epsilon_{\rho \lambda \mu \nu}^{(-1)} = \frac{1}{\det(e)} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M e_{\lambda}^N e_{\mu}^P e_{\nu}^Q \quad (3.3-57)$$

を使う ($\sqrt{-g} = \det(e)$ に注意) と、

$$\frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\rho \lambda \alpha \beta} e_{\rho}^M e_{\lambda}^N e_{\mu}^P e_{\nu}^Q R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} = \frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\rho \lambda \alpha \beta} e_{\rho}^M e_{\lambda}^N e_{\mu}^P e_{\nu}^Q R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \quad (3.3-58)$$

のようにラグランジアン密度が計算できる。

(3.3-58) に $|dx^0\rangle \wedge |dx^1\rangle \wedge |dx^2\rangle \wedge |dx^3\rangle$ を掛けたものは、 $\frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N \wedge R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \wedge e_{\mu}^P e_{\nu}^Q$ のように書く

ことができる。作用として、

$$\int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{4} \int \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N \wedge \left(d\omega^P \wedge R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} + \omega^P \wedge R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \right) y \quad (3.3-59)$$

を考えることができる。

e_{ρ}^M で変分を取ると、

$$\frac{1}{2} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\rho \lambda \alpha \beta} e_{\lambda}^N R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} = 0 \quad (3.3-60)$$

という運動方程式が出る。これは

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\sigma \lambda \mu \nu}^{(-1)} \epsilon_{(1)}^{\rho \lambda \alpha \beta} R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} = 0 \quad (3.3-61)$$

と同じ式になっている。つまり $G_{\mu \nu} = 0$ ということである。

作用 (3.3-59) は、部分積分を行えば、

$$-\frac{1}{4} \int \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} d\omega^P \wedge (e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N) \wedge R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} + \frac{1}{4} \int \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N \wedge \omega^P \wedge R^{\mu \nu}_{\alpha \beta} \quad (3.3-62)$$

と書き直すことができて、これを出発点にすることもできる^{†7}。

これから ω^P で変分を取れば、

$$-\frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} d\omega^P \wedge (e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N) + \frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N \wedge \omega^P \wedge R_{PQ} - \frac{1}{4} \epsilon_{M N P Q}^{(-1)} e_{\rho}^M \wedge e_{\lambda}^N \wedge \omega^P \wedge R_{Q P} = 0 \quad (3.3-63)$$

が運動方程式である。両辺に $\epsilon_{(1)}^{ABPQ}$ を掛けて P, Q の和を取ると、Levi-Civita の縮約の式を使って、

$$\begin{aligned} & -d\omega^A \wedge e_{\rho}^B + e_{\rho}^A \wedge e_{\lambda}^B \wedge \omega^P \wedge R_{PQ} + e_{\rho}^B \wedge e_{\lambda}^A \wedge \omega^P \wedge R_{Q P} + e_{\rho}^P \wedge e_{\lambda}^A \wedge e_{\mu}^B \wedge \omega^P \wedge R_{Q P} = 0 \\ & - (d\omega^A \wedge e_{\rho}^B + e_{\rho}^A \wedge e_{\lambda}^B \wedge d\omega^P \wedge R_{PQ}) = 0 \end{aligned}$$

^{†7} ω は e の一階微分を含むので、 $d\omega$ は e の二階微分を含んでしまう。部分積分することで二階微分はいなくなる。

$$-\left(\text{d}_e e^A + \omega^A_{\text{P} \wedge} e^{\text{P}}\right) \wedge e^B + e^A \wedge \left(\text{d}_e e^B + \omega^B_{\text{P} \wedge} e^{\text{P}}\right) = 0 \quad (3.3-64)$$

となり、ここから運動方程式として多脚場 1-form とスピン接続 1-form の関係が出る。

3.3.4 球対称定常な 3+1 次元時空

微分形式を使った曲率の計算例として、球対称で定常的な計量

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.3-65)$$

を考える。この計量にお

$$e^T = f(r)|dt\rangle \quad e^T = \frac{1}{f(r)} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \right| \quad (3.3-66)$$

$$e^R = g(r)|dr\rangle \quad e^R = \frac{1}{g(r)} \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \right| \quad (3.3-67)$$

$$e^\Theta = r|d\theta\rangle \quad e^\Theta = \frac{1}{r} \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \right| \quad (3.3-68)$$

$$e^\Phi = r \sin \theta |d\phi\rangle \quad e^\Phi = \frac{1}{r \sin \theta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \right| \quad (3.3-69)$$

のように多脚場 1-form とそれに双対なベクトルを考えることができる (T, R, Θ, Φ が局所ローレンツ座標で、今考えている一点でのみ、 $ds^2 = -dT^2 + dR^2 + d\Theta^2 + d\Phi^2$ になる)。

$$\text{d}_e e^T = f'(r)|dr\rangle \wedge |dt\rangle \quad (3.3-70)$$

$$\text{d}_e e^R = 0 \quad (3.3-71)$$

$$\text{d}_e e^\Theta = |dr\rangle \wedge |d\theta\rangle \quad (3.3-72)$$

$$\text{d}_e e^\Phi = \sin \theta |dr\rangle \wedge |d\phi\rangle + r \cos \theta |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle \quad (3.3-73)$$

である。

$\text{d}_e e + \omega \wedge e = 0$ を使って ω を求めていこう。以下の 4 つの式が連立する。

$$f'(r)|dr\rangle \wedge |dt\rangle + \omega^{TR} \wedge g(r)|dr\rangle \wedge r|d\theta\rangle + \omega^{T\Phi} \wedge r \sin \theta |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-74)$$

$$\omega^{TR} \wedge f(r)|dt\rangle + \omega^{R\Theta} \wedge r|d\theta\rangle - \omega^{\Phi R} \wedge r \sin \theta |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-75)$$

$$|dr\rangle \wedge |d\theta\rangle + \omega^{T\Theta} \wedge f(r)|dt\rangle - \omega^{R\Theta} \wedge g(r)|dr\rangle + \omega^{\Theta\Phi} \wedge r \sin \theta |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-76)$$

$$\sin \theta |dr\rangle \wedge |d\phi\rangle + r \cos \theta |d\theta\rangle \wedge |d\phi\rangle + \omega^{T\Phi} \wedge f(r)|dt\rangle + \omega^{\Phi R} \wedge g(r)|dr\rangle - \omega^{\Theta\Phi} \wedge r|d\theta\rangle = 0 \quad (3.3-77)$$

まず第 1 式から、 $|dr\rangle \wedge |dt\rangle$ は第 1,2 項にしか存在しないから、 ω^{TR} は $\frac{f'(r)}{g(r)}|dt\rangle$ を含んでいくなくてはいけない。

$$\omega^{TR} = \frac{f'(r)}{g(r)}|dt\rangle + \underbrace{\omega^{TR}}_{dt=0} \quad (3.3-78)$$

とする。同様に第2式から ω_{\cdot}^{TR} は $|dr\rangle$ の項は含んではいけないから、

$$\omega_{\cdot}^{TR} = \frac{f'(r)}{g(r)} |dt\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{TR}}_{\substack{dt=0 \\ dr=0}} \quad (3.3-79)$$

としてよい。

同様に、

$$\omega_{\cdot}^{R\Theta} = -\frac{1}{g(r)} |d\theta\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{R\Theta}}_{\substack{d\theta=0}} \quad (3.3-80)$$

$$\omega_{\cdot}^{\Phi R} = \frac{\sin\theta}{g(r)} |d\phi\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Phi R}}_{\substack{d\phi=0}} \quad (3.3-81)$$

$$\omega_{\cdot}^{\Theta\Phi} = -\cos\theta |d\phi\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Theta\Phi}}_{\substack{d\phi=0}} \quad (3.3-82)$$

がわかるので、これらを代入することで、

$$\underbrace{\omega_{\cdot}^{TR} \wedge g(r)}_{\substack{dt=0 \\ dr=0}} |dr\rangle + \omega_{\cdot}^{T\Theta} \wedge r |d\theta\rangle + \omega_{\cdot}^{T\Phi} \wedge r \sin\theta |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-83)$$

$$\underbrace{\omega_{\cdot}^{TR} \wedge f(r)}_{\substack{dt=0 \\ dr=0}} |dt\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{R\Theta} \wedge r}_{\substack{d\theta=0}} |d\theta\rangle - \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Phi R} \wedge r \sin\theta}_{\substack{d\phi=0}} |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-84)$$

$$\omega_{\cdot}^{T\Theta} \wedge f(r) |dt\rangle - \underbrace{\omega_{\cdot}^{R\Theta} \wedge g(r)}_{\substack{d\theta=0}} |dr\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Theta\Phi} \wedge r \sin\theta}_{\substack{d\phi=0}} |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-85)$$

$$\omega_{\cdot}^{T\Phi} \wedge f(r) |dt\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Phi R} \wedge g(r)}_{\substack{d\theta=0}} |dr\rangle - \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Theta\Phi} \wedge r}_{\substack{d\phi=0}} |d\theta\rangle = 0 \quad (3.3-86)$$

となる。さらに

- (1) 第1の式から $\omega_{\cdot}^{T\Theta}$ に $|dt\rangle$ の項がないこと
- (2) 第1の式から $\omega_{\cdot}^{T\Phi}$ に $|dt\rangle$ の項がないこと
- (3) 第2の式から $\omega_{\cdot}^{R\Theta}$ に $|dr\rangle$ の項がないこと
- (4) 第2の式から $\omega_{\cdot}^{\Phi R}$ に $|dr\rangle$ の項がないこと
- (5) 第3の式から $\omega_{\cdot}^{T\Theta}$ に $|d\theta\rangle$ の項がないこと
- (6) 第3の式から $\omega_{\cdot}^{\Theta\Phi}$ に $|d\theta\rangle$ の項がないこと
- (7) 第4の式から $\omega_{\cdot}^{T\Phi}$ に $|d\phi\rangle$ の項がないこと

もわかるのでその情報もくわえると、

$$\underbrace{\omega_{\cdot}^{TR} \wedge g(r)}_{\substack{dt=0 \\ dr=0}} |dr\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{T\Theta} \wedge r}_{\substack{dt=0 \\ d\theta=0}} |d\theta\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{T\Phi} \wedge r \sin\theta}_{\substack{dt=0 \\ d\phi=0}} |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-87)$$

$$\underbrace{\omega_{\cdot}^{TR} \wedge f(r)}_{\substack{dt=0 \\ dr=0}} |dt\rangle + \underbrace{\omega_{\cdot}^{R\Theta} \wedge r}_{\substack{dr=0 \\ d\theta=0}} |d\theta\rangle - \underbrace{\omega_{\cdot}^{\Phi R} \wedge r \sin\theta}_{\substack{dr=0 \\ d\phi=0}} |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-88)$$

$$\omega_{\text{d}t=0}^{T\Theta} f(r) |dt\rangle - \omega_{\text{d}r=0}^{R\Theta} g(r) |dr\rangle + \omega_{\text{d}\theta=0}^{\Theta\Phi} r \sin \theta |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-89)$$

$$\omega_{\text{d}t=0}^{T\Phi} f(r) |dt\rangle + \omega_{\text{d}r=0}^{\Phi R} g(r) |dr\rangle - \omega_{\text{d}\phi=0}^{\Theta\Phi} r |d\phi\rangle = 0 \quad (3.3-90)$$

となる。これで残った式の各項はすべて ω の 1 次となり、残った変数の数は 12 である^{†8}が、上の式も 12 個の式になっている（4 本に見えるが、成分ごとに取り出すとそうなる）。12 個の変数の 1 次式が 12 個あるから、すべてが 0 であると結論するに十分である^{†9}。

結果をまとめると

$$\omega_{\cdot}^T R = \frac{f'(r)}{g(r)} |dt\rangle \quad \omega_{\cdot}^T \Theta = 0 \quad \omega_{\cdot}^T \Phi = 0 \quad (3.3-91)$$

$$\omega_{\cdot}^R \Theta = -\frac{1}{g(r)} |d\theta\rangle \quad \omega_{\cdot}^R \Phi = -\frac{\sin \theta}{g(r)} |d\phi\rangle \quad \omega_{\cdot}^{\Theta} \Phi = \cos \theta |d\phi\rangle \quad (3.3-92)$$

$$R^T_{R..} = \omega_{\cdot}^T R + \omega_{\cdot}^T \Theta \wedge \omega_{\cdot}^{\Theta} R + \omega_{\cdot}^T \Phi \wedge \omega_{\cdot}^{\Phi} R = \left(-\frac{f''(r)}{g(r)} + \frac{f'(r)g'(r)}{(g(r))^2} \right) dr \wedge dt \quad (3.3-93)$$

$$R^T_{\Theta..} = \omega_{\cdot}^T \Theta + \omega_{\cdot}^T R \wedge \omega_{\cdot}^R \Theta + \omega_{\cdot}^T \Phi \wedge \omega_{\cdot}^{\Phi} \Theta = -\frac{f'(r)}{(g(r))^2} dt \wedge d\theta \quad (3.3-94)$$

$$R^T_{\Phi..} = \omega_{\cdot}^T \Phi + \omega_{\cdot}^T R \wedge \omega_{\cdot}^R \Phi + \omega_{\cdot}^T \Theta \wedge \omega_{\cdot}^{\Theta} \Phi = -\frac{f'(r) \sin \theta}{(g(r))^2} dt \wedge d\phi \quad (3.3-95)$$

$$R^R_{\Theta..} = \omega_{\cdot}^R \Theta + \omega_{\cdot}^R T \wedge \omega_{\cdot}^T \Theta + \omega_{\cdot}^R \Phi \wedge \omega_{\cdot}^{\Phi} \Theta = -\frac{g'(r)}{(g(r))^2} dr \wedge d\theta \quad (3.3-96)$$

$$R^R_{\Phi..} = \omega_{\cdot}^R \Phi + \omega_{\cdot}^R T \wedge \omega_{\cdot}^T \Phi + \omega_{\cdot}^R \Theta \wedge \omega_{\cdot}^{\Theta} \Phi = -\frac{g'(r) \sin \theta}{(g(r))^2} dr \wedge d\phi \quad (3.3-97)$$

$$R^{\Theta}_{\Phi..} = \omega_{\cdot}^{\Theta} \Phi + \omega_{\cdot}^{\Theta} T \wedge \omega_{\cdot}^T \Phi + \omega_{\cdot}^{\Theta} R \wedge \omega_{\cdot}^R \Phi = -\sin \theta d\theta \wedge d\phi + \frac{\sin \theta}{(g(r))^2} d\theta \wedge d\phi \quad (3.3-98)$$

$$R^{01}_{01} = -\frac{1}{f(r)g(r)} \left(-\frac{f''(r)}{g(r)} + \frac{f'(r)g'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-99)$$

$$R^{02}_{02} = -\frac{1}{rf(r)} \left(-\frac{f'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-100)$$

$$R^{03}_{03} = -\frac{1}{rf(r)} \left(-\frac{f'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-101)$$

$$R^{12}_{12} = \frac{1}{rg(r)} \left(-\frac{g'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-102)$$

$$R^{13}_{13} = \frac{1}{rg(r)} \left(-\frac{g'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-103)$$

$$R^{23}_{23} = -\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-104)$$

^{†8} ω^{AB} で A, B が反対称なので 6 個あり、おのおのが 2 つずつのみ決定成分を持つ。

^{†9} 厳密には方程式がフルランクでないとそれは言えない。この場合では大丈夫であることは確認できるので、ここではそれでよしとしよう。

$$G^0_0 = R^{12}_{12} + R^{23}_{23} + R^{13}_{13} = \frac{2}{rg(r)} \left(-\frac{g'(r)}{(g(r))^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-105)$$

$$G^0_1 = R^{20}_{12} + R^{30}_{13} = 0 \quad (3.3-106)$$

$$G^0_2 = R^{01}_{12} + R^{30}_{23} = 0 \quad (3.3-107)$$

$$G^0_3 = R^{01}_{13} + R^{02}_{23} = 0 \quad (3.3-108)$$

$$G^1_0 = R^{12}_{20} + R^{13}_{30} = 0 \quad (3.3-109)$$

$$G^1_1 = R^{23}_{23} + R^{02}_{02} + R^{03}_{03} = -\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{(g(r))^2} \right) - \frac{2}{rf(r)} \left(-\frac{f'(r)}{(g(r))^2} \right) \quad (3.3-110)$$

(3.3-105) は微分方程式 $-2r \frac{dg}{dr} - g^3 + g = 0$ となる。変数分離すると $\frac{dg}{g^3 - g} = -\frac{dr}{2r}$ となるので積分することにより、

$$\frac{1}{2} (\log(g+1) + \log(g-1) - 2\log g) = -\frac{1}{2} \log r + C \quad (3.3-111)$$

となり、結果は

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}} \quad (3.3-112)$$

となる。

同様に (3.3-110) は微分方程式 $-(g^2 + 1) + \frac{2r \frac{df}{dr}}{f} = 0$ になるが、 g の形を代入すると、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} + 1\right) + \frac{2r \frac{df}{dr}}{f} &= 0 \\ \left(\frac{-\frac{\alpha}{r^2}}{1 - \frac{\alpha}{r}}\right) dr &= \frac{2df}{f} \\ \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) &= \log f + C \\ \beta \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} &= f \end{aligned} \quad (3.3-113)$$

となる。これは線素が

$$-\beta^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3-114)$$

であることを意味していて、これはシュワルツシユルト解である (β は、遠方においてミンコフスキー空間に一致すべし、という境界条件をつけることで 1 になる)。

 さて、微分形式の物理への応用のなかでも重要なのが解析力学である。次の章で解析力学（最後に少し熱力学もやろう）を、微分形式を利用しながら復習し、さらにその次の章で拘束系をどう記述するかを考えよう。

第4章 正準形式の力学

4.1 正準形式は何が嬉しい？

正準形式（ハミルトン形式）を使うと何が嬉しいのかについて述べていこう。

まず嬉しいことの一つは、「運動方程式が時間に関して一階微分方程式になること」である。この結果、問題は「初期状態を決めれば将来のすべてが決まる」形になる。

さらに位相空間（phase space）を考えると、位相空間の中では系の時間発展が「互いに交わることのない流線の集まり」で表現される（ここは後述）。

ここまででは一階微分方程式になっていれば^{†1}成り立つ話なのだが、さらに正準形式にしたことで「位相空間の体積が保存される量になる」おまけがつく。このあたりは次で考える「シンプレクティック形式」の理解が大事だ。

本講義の目的の一つは「拘束系」なのだが、位相空間を「拘束系の位相空間」に縮小するときも、微分形式を使った解析力学の手法が役に立つ。微分形式を使って解析力学（特に正準形式）を考えていこう。

4.1.1 よくある間違い：独立変数に関する教訓

解析力学で「ハミルトン形式に移行する」のはどんな意味があるのかを考えていこう。そのために一つ＜よくある間違い＞を紹介する。「ラグランジアンとハミルトニアンの関係式 $L = p\dot{x} - H$ を x を一定にして p で微分せよ」という問題に対し、

【これは間違います】

$L = p\dot{x} - H$ の左辺 L は x, \dot{x} の関数なので、 p は含んでないので、微分すると 0。よって

$$0 = \dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4.1-1)$$

となり、これから正準方程式 $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$ が出てくる。

とやってしまうという＜よくある間違い＞がある。これはいわゆる「結果オーライ」だが、正しい計算ではない。

何が間違いかというと、「 x を一定にして p で微分せよ」と言っているからには x, p を独立変数と

†1 より正確には「解が一意的に決まる微分方程式になっていれば」と言うべきだが、多くの場合は解の一意性は保証される。

して扱っているので、 \dot{x} は（自由度 2 の系の三つめの物理量だから）もはや独立ではなく、 $\dot{x}(x, p)$ のような「 x, p の関数」なのだ。よって、 \dot{x} の中にある p を微分しなくてはいけないのに、それをやってない。

正しい計算を行うために、独立変数を明記した式を書こう。 $L = p\dot{x} - H$ は、 x, p を独立変数として書くなら

$$\underbrace{L(x, \dot{x})}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} = p\dot{x}(x, p) - H(x, p) \quad (4.1-2)$$

であり^{†2}、 x, \dot{x} を独立変数として書くなら

$$L(x, \dot{x}) = p(x, \dot{x})\dot{x} - \underbrace{H(x, p)}_{p=p(x, \dot{x})} \quad (4.1-3)$$

と書かれる。

「 x を一定にして p で微分せよ」と頼まれたなら、(4.1-2) の方を使って微分を行う。微分すると

$$\underbrace{\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial p} = \dot{x}(x, p) + p \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial p} - \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \quad (4.1-4)$$

となるが、左辺の $\underbrace{\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)}$ は、「 x, \dot{x} の関数である $L(x, \dot{x})$ の、 \dot{x} による微分が終了した後で \dot{x} に $\dot{x}(x, p)$ を代入する」操作の結果を表している。この結果がまさに p であるから、

$$\begin{aligned} p \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial p} &= \dot{x}(x, p) + p \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial p} - \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \\ 0 &= \dot{x}(x, p) - \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \end{aligned} \quad (4.1-5)$$

となるわけである。つまり、「左辺は微分して 0」ではなく「左辺と右辺に同じ項が現れて消えるから 0」なのだ。「うまく消えるもんだなあ」と思うかもしれないが、これはむしろ「Legendre 変換」がそうなることを目指して作られているのだと思った方がよい。

これ以外の微分も計算しておくと以下のようになる。

$$\underbrace{\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} + \underbrace{\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial x} = p \frac{\partial \dot{x}(x, p)}{\partial x} - \frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \quad (4.1-6)$$

$$\underbrace{\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} = - \frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \quad (4.1-7)$$

^{†2} L は x, \dot{x} の関数であり、 \dot{x} が x, p の関数であるという状況は、多くの場合 $L(x, \dot{x}(x, p))$ と書かれるが、このあと微分を行うので、少し丁寧に「 $L(x, \dot{x})$ の \dot{x} に $\dot{x}(x, p)$ という x, p の関数を代入した」結果を $\underbrace{L(x, \dot{x})}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)}$ と書いておくことにする。

4.2 シンプレクティック形式への準備

というわけで、Lagrange 形式からハミルトン形式への移行は実は「独立変数を (\dot{x}, x) から (p, x) に変える」ところに大きな意味がある。前に述べたように、 $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ は x 座標変換に対して反変ベクトルである。一方、運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ は x 座標変換に対して共変ベクトルになる。

正準方程式 $\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$ を

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.2-1)$$

と書いてみる。時間に関して一階の微分方程式であるだけではなく、その微分方程式が常に上のような形で書けるのが正準形式の意味である。

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ のときのベクトル $\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{bmatrix}$ とベクトル $\begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}$ をグラフに表現したのが図 4-1

である。各々の運動の軌道は、位相空間内では交わらないことに注意しよう。位相空間内の経路が交わってしまうと、「同じ初期状態で二つの履歴」が存在してしまうのである。

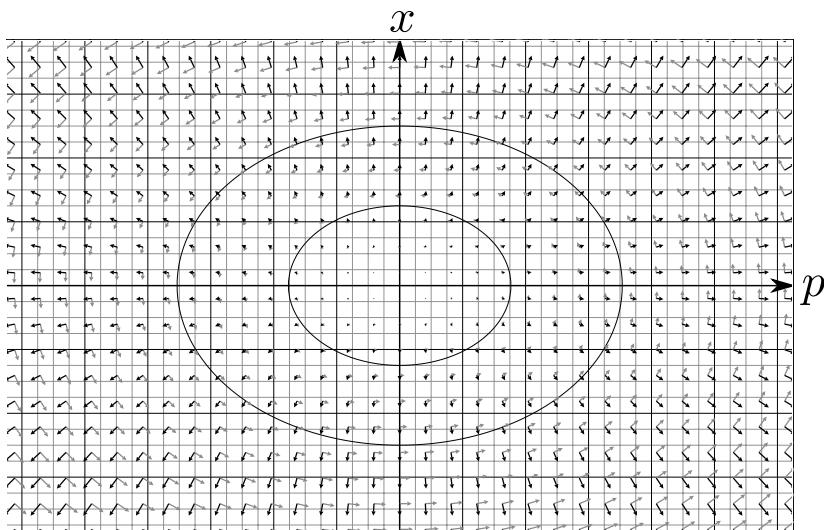


図 4-1 $\text{grad } H$ と H が変わらない方向

3 次元の空間の中で $\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$ というベクトルを $\text{grad } V$ と呼んでいたことを思い出そう。よって

ベクトル $\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{bmatrix}$ は「 $\text{grad } H$ 」(3 次元座標 x, y, z が 2 次元座標 p, x に置き換わっている) と呼ぶことができる。grad は H から

$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{bmatrix}$ というベクトルを作る写像である。

grad H は、 H という「山の高さ」が登る方向へのベクトルである^{†3}。

上で重要なのは grad H を 90 度倒したベクトルである $\begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}$ であった。これは「山の高さが変わらない方向へのベクトル」になっている。運動が起こるのはこちらの方向、つまり「エネルギーが保存する方向」なのである。そこで以下で「 H から $\begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}$ を作る写像」を考えていく

ことにする。

4.3 シンプレクティック形式と Poisson 括弧

位相空間内のベクトルを $z^M = \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}$ と表し^{†4}、

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \rightarrow \frac{dz^M}{dt} = \omega^{MN} \frac{\partial H}{\partial z^N} \quad (4.3-1)$$

のようにまとめて表現することにしよう。ここに現れた記号 ω^{MN} は

$$\omega^{MN} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega^{px} = -1, \omega^{xp} = 1, \omega^{xx} = \omega^{pp} = 0 \quad (4.3-2)$$

であり、正準方程式に現れる $\begin{cases} x \text{ の時間微分が } H \text{ の } p \text{ 微分} \\ p \text{ の時間微分が } H \text{ の } x \text{ 微分} \times (-1) \end{cases}$ の -1 の出現に対応する「ひねり」を表現する行列になっている。

†3 ポテンシャルを U としたとき、 $-\text{grad } U$ が力、すなわち「ポテンシャルを降りる向き」であることを思い出せ。

†4 位相空間 ($2N$ 次元) の添え字を大文字アルファベットで、座標空間 (N 次元) の添字を小文字アルファベットで表現することにする。今は $N = 1$ の場合を考えているので、 M は p, x を走る。

x, p のペアが複数個ある場合は、

$$\omega^{MN} = \begin{array}{c|cc|cc|c|cc} & p_1 & x^1 & p_2 & x_2 & \cdots & p_N & x^N \\ \hline p_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline p_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline p_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x^N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \quad (4.3-3)$$

のように同じブロックが繰り返されるものとしておく。この逆行列（つまり $\omega^M \omega_{NP} = \delta_P^M$ を満たす行列）は

$$\omega_{MN} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_{px} = 1, \omega_{xp} = -1, \omega_{xx} = \omega_{pp} = 0 \quad (4.3-4)$$

である^{†5}（足の付き方で区別する）。

「足の付き方」といえば、ここで記号に混乱を生じる部分があるので注意しておくと、 x^i, p_i の足が上付きになつたり下付きになつたりしているのは N 次元の座標の空間で考えると x を反変ベクトル、 p を共変ベクトルとするからである。一方、 z^A は（その中身は x^i や p_i のなたが）「位相空間」という $2N$ 次元の空間の中の反変ベクトル（より正確には、位相空間の反変ベクトルなのは z^A ではなくその微小変位 dz^A ）なので、上付きの足を持つ。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\omega_{MP}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\omega^{PQ}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\omega_{QN}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\omega_{MN}}$$

$$\omega_{MP} \omega^{PQ} \omega_{QN} = \omega_{MN} \quad (4.3-5)$$

が成り立つので、 ω_{MN} は ω^{MN} に ω_{MN} を前後から掛けることで「足を下げた」ものだと考えてもよい^{†6}。

この下付きの足の ω_{MN} を使って、

$$\omega_{..} = \frac{1}{2} \omega_{MN} \langle dz^M \rangle \wedge \langle dz^N \rangle \quad (4.3-6)$$

という 2-form を作る。これをシンプレクティック形式 (symplectic form)^{†7} と呼ぶ。今の場合なら、

$$\omega_{..} = \langle dp_i \rangle \wedge \langle dx^i \rangle \quad (4.3-7)$$

†5 $\omega_{..} = \frac{1}{2} \omega_{MN} \langle dz^M \rangle \wedge \langle dz^N \rangle = dp \wedge dx$ となるように決める。なお、 ω をもっと一般化して決めてよい。

†6 相対論に慣れている人向きの説明としては「この空間では ω_{MN} が計量テンソルっぽい働きをする」となる。

†7 canonical symplectic form, Poincare 2-form などの呼び方もある。

という簡単な量になる。この symplectic form は、symplectic potential^{†8}と呼ばれる 1-form

$$\theta_i = p_i \langle dx^i \rangle \quad (4.3-8)$$

の外微分になっている ($\omega_{..} = d\theta_{..}$)。symplectic potential の $|dx\rangle$ を基底から微小変位 dx に置き換えると、その結果は正準形式での作用 $\int \left(p \frac{dx}{dt} - H \right) dt$ の第 1 項 $\int p \frac{dx}{dt} dt = \int pdx$ になっている。

z^i の関数である $A(z^i)$ の時間微分を考えると、

$$\frac{d}{dt} A(z^i(t)) = \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{dz^M}{dt} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M \underbrace{\frac{\partial H}{\partial z^M}}_{(4.3-9)}$$

のようにまとめられる。ここで新しい微分演算子を以下のように定義しよう。

定義 14: ハミルトニアンベクトル場

「 B に対するハミルトニアンベクトル場」とは、

$$X_B = \frac{\partial}{\partial z^M} \omega^M \underbrace{\frac{\partial B}{\partial z^N}}_{(4.3-10)} = \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

で表される微分演算子である。

今定義した演算子 X_B は^{†9}、後で出てくる Poisson 括弧という記号を使うと「後ろから B と Poisson 括弧を取る ($X_B^* = \{*, B\}_{PB}$)」を意味する。

これを使って

$$\frac{dA(x, p)}{dt} = X_B A(x, p) \quad (4.3-11)$$

と書くことができるわけである。 X_H は「時間をすすめる演算子」と考えることもできるし、「 H が保存する方向へ進む演算子」を考えることもできる。

ただし、 A が時間に陽に依存する場合は、

$$Z_H = \frac{\partial}{\partial z^M} \omega^M \underbrace{\frac{\partial H}{\partial z^N}}_{(4.3-12)} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t}$$

という演算子 Z_H を定義して、

$$\frac{dA(x, p, t)}{dt} = Z_H A(x, p, t) \quad (4.3-13)$$

とする必要がある。

^{†8} 正準 1-form (canonical 1-form)、Liouville 1-form、Poincare 1-form などの呼び名もある。symplectic potential という名前は「微分すると symplectic form になる」ことを表現した命名。 A がベクトルポテンシャルで F が電磁場になったのとパラレル。実際この後で「 F が物理で、 A には物理に現れない情報が入っている」という状況も出てくる。

^{†9} 多くの本では X_B と書いているのだが、単なる X とは違うのでフォントを変えてみた。

2個めの式は、微分（ベクトルの基底）を後ろに持つていっただけである。 $A^M = \omega^M \underbrace{\frac{\partial H}{\partial z^N}}$ と

書くことすれば、 $\mathbb{X}_H = A^M \underbrace{\frac{\partial}{\partial z^M}}$ という「演算子の形で書いたベクトル」で、これは微分形式の言葉では z^M 空間の接ベクトルである。この形のベクトル場（演算子）を「ハミルトニアンベクトル場」と呼ぶ。

ここで、わざわざ \mathbb{X}_H と添字に H をつけたのは、ここに H じゃないものを代入することにも意味があるからである。たとえばここに運動量 p を入れて \mathbb{X}_p を作ってみると、

$$\mathbb{X}_p = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial p}}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_0 \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.3-14)$$

であり、これは並進の演算子となる。

一般の A, B に対し

$$\mathbb{X}_A B = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x} \right) = \{A, B\}_{\text{PB}} \quad (4.3-15)$$

となるが、この $\{A, B\}_{\text{PB}}$ を「 A, B の Poisson 括弧」と呼ぶ。 ω を使って書くと、

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M \underbrace{\frac{\partial B}{\partial z^N}}$$

である。

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_A B &= \{B, A\}_{\text{PB}}, \\ \mathbb{X}_B A &= \{A, B\}_{\text{PB}} \end{aligned}$$

であるから、一般に $\mathbb{X}_A B = -\mathbb{X}_B A$ が成り立つ。 A, B を運動量とハミルトニ

アン運動量にすると

$$\mathbb{X}_p H = -\mathbb{X}_H p \quad (4.3-17)$$

という式が出てくるが、この式の左辺が 0 になるのは「ハミルトニアンが x を含まないとき」であり、右辺が 0 になるのは「運動量が保存する（時間変化しない）とき」である。つまりハミルトニアンの不变性と運動量保存則が関係している。

実は運動量に限らず、任意の物理量に関して

$$\mathbb{X}_\mathcal{O} H = -\mathbb{X}_H \mathcal{O} \quad (4.3-18)$$

は成り立つから「ハミルトニアンがある変換に対して不变であるとき、その変換の母関数は時間変化しない」という定理（Noether の定理）が導かれる。

例として、角運動量

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x \quad (4.3-19)$$

は、球対称なハミルトニアン ($x^2 + y^2 + z^2$ と $(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2$ の関数になっているハミルトニアン) とは Poisson 括弧の意味で交換し、保存量である。

各々の正準座標と角運動量との Poisson 括弧を計算してみると、

$$\begin{aligned} \{x, L_x\}_{\text{PB}} &= 0, & \{x, L_y\}_{\text{PB}} &= z, & \{x, L_z\}_{\text{PB}} &= -y, \\ \{y, L_x\}_{\text{PB}} &= -z, & \{y, L_y\}_{\text{PB}} &= 0, & \{y, L_z\}_{\text{PB}} &= x, \\ \{z, L_x\}_{\text{PB}} &= y, & \{z, L_y\}_{\text{PB}} &= -x, & \{z, L_z\}_{\text{PB}} &= -0 \end{aligned} \quad (4.3-20)$$

$$\begin{aligned} \{P_x, L_x\}_{\text{PB}} &= 0, & \{P_x, L_y\}_{\text{PB}} &= P_z, & \{P_x, L_z\}_{\text{PB}} &= -P_y, \\ \{P_y, L_x\}_{\text{PB}} &= -P_z, & \{P_y, L_y\}_{\text{PB}} &= 0, & \{P_y, L_z\}_{\text{PB}} &= P_x, \\ \{P_z, L_x\}_{\text{PB}} &= P_y, & \{P_z, L_y\}_{\text{PB}} &= -P_x, & \{P_z, L_z\}_{\text{PB}} &= -0 \end{aligned} \quad (4.3-21)$$

となるが、

$$\begin{aligned} \{x^2 + y^2 + z^2, L_x\}_{\text{PB}} &= 2x \underbrace{\{x, L_x\}_{\text{PB}}}_0 + 2y \underbrace{\{y, L_x\}_{\text{PB}}}_{-z} + 2z \underbrace{\{z, L_x\}_{\text{PB}}}_y \\ &= -2yz + 2yz = 0 \end{aligned} \quad (4.3-22)$$

のように $x^2 + y^2 + z^2$ との Poisson 括弧は 0 になる (L_y, L_z も同様)。ほぼ同様の計算で $(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2$ との Poisson 括弧も 0 である。ゆえに $H = \frac{(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2}{2m} + f(x^2 + y^2 + z^2)$ のようなハミルトニアンと角運動量は交換する。ゆえに角運動量はこの系では保存する。

4.3.1 ヤコビ恒等式

この形を使って「ヤコビ恒等式」を証明しておこう。

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} &= \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^{MN} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z^N} \left(\frac{\partial B}{\partial z^P} \omega^{PQ} \frac{\partial C}{\partial z^Q} \right) \right)}_{\{B, C\}_{\text{PB}}} \\ &= \omega^{MN} \omega^{PQ} \left(\frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} + \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial B}{\partial z^P} \frac{\partial^2 C}{\partial z^N \partial z^Q} \right) \end{aligned} \quad (4.3-23)$$

なので、これを A, B, C をサイクリックに回してたすと

$$\begin{aligned} & \{A, \{B, C\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} + \{B, \{C, A\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} + \{C, \{A, B\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} \\ &= \omega^{MN} \omega^{PQ} \left(\frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} + \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial B}{\partial z^P} \frac{\partial^2 C}{\partial z^N \partial z^Q} \right) \\ &+ \omega^{MN} \omega^{PQ} \left(\frac{\partial B}{\partial z^M} \frac{\partial^2 C}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial A}{\partial z^Q} + \frac{\partial B}{\partial z^M} \frac{\partial C}{\partial z^P} \frac{\partial^2 A}{\partial z^N \partial z^Q} \right) \end{aligned}$$

$$+ \omega^{MN} \omega^{PQ} \left(\frac{\partial C}{\partial z^M} \frac{\partial^2 A}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial B}{\partial z^Q} + \frac{\partial C}{\partial z^M} \frac{\partial A}{\partial z^P} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^Q} \right) \quad (4.3-24)$$

となるが、ここで B の二階微分の項を取り出すと

$$\begin{aligned} & \omega^{MN} \omega^{PQ} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} + \omega^{MN} \omega^{PQ} \frac{\partial C}{\partial z^M} \frac{\partial A}{\partial z^P} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^Q} \\ & \quad \text{MN} \leftrightarrow PQ \text{ を取替える。} \\ & = \omega^{MN} \omega^{PQ} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} + \omega^{MN} \omega^{PQ} \frac{\partial C}{\partial z^P} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^Q \partial z^N} \\ & \quad P \leftrightarrow Q \text{ を取替える。} \\ & = \omega^{MN} \omega^{PQ} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^N \partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} + \omega^{MN} \omega^{QP} \frac{\partial C}{\partial z^Q} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial^2 B}{\partial z^P \partial z^N} \end{aligned} \quad (4.3-25)$$

となり、最後に B に対する偏微分が交換することと、 ω^{PQ} の反対称性を使うとこれが 0 であることがわかる。逆に言うと、ヤコビ恒等式を成り立たせるためには、 ω^{PQ} は反対称でありさえすればよく、 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の形にこだわる必要はない。

 より一般的には、係数 ω^{PQ} が定数ではなく、位相空間座標 z^M に依存する場合もある。その場合、(4.3-23)には
→ p126

$$\omega^{MN} \frac{\partial \omega^{PQ}}{\partial z^N} \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial B}{\partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} \quad (4.3-26)$$

という項が付け加わる。 A, B, C をサイクリックに回したもの足すと

$$\left(\omega^{MN} \frac{\partial \omega^{PQ}}{\partial z^N} + \omega^{PN} \frac{\partial \omega^{MQ}}{\partial z^N} + \omega^{QN} \frac{\partial \omega^{MP}}{\partial z^N} \right) \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial B}{\partial z^P} \frac{\partial C}{\partial z^Q} \quad (4.3-27)$$

である。これも 0 でないとヤコビ恒等式は成り立たない。実はこれは、symplectic form が closed だという条件

$$\partial_A \omega_{BC} + \partial_B \omega_{CA} + \partial_C \omega_{AB} = 0 \quad (4.3-28)$$

と同じである。というのは

$$\omega^E \omega_D \omega_{DB} = \delta^E_B \quad (4.3-29)$$

を z^C で微分することで、

$$\frac{\partial \omega^{ED}}{\partial z^C} \omega_{DB} + \omega^{ED} \frac{\partial \omega_{DB}}{\partial z^C} = 0 \quad (4.3-30)$$

がわかる。この式の前から ω_{AE} を掛けて「足を上げる」操作をすると、

$$\omega_A \frac{\partial \omega^{ED}}{\partial z^C} \omega_{DB} + \frac{\partial \omega_{AB}}{\partial z^C} = 0 \quad (4.3-31)$$

A, B, C をサイクリックに回しながら足せば第 2 項が消え去るので、

$$\omega_A \frac{\partial \omega^{ED}}{\partial z^C} \omega_{DB} + \omega_B \frac{\partial \omega^{ED}}{\partial z^A} \omega_{DC} + \omega_C \frac{\partial \omega^{ED}}{\partial z^B} \omega_{DA} = 0 \quad (4.3-32)$$

となる。これに $\omega^M \omega^P \omega^Q$ を掛けて縮約すると、 $\omega^{\cdot \cdot} \omega_{\cdot \cdot}$ の形でクロネッカーデルタになったところでは $A \rightarrow M, B \rightarrow P, C \rightarrow Q$ の置き換えが行われ、そうでないところ（微分と $\omega^{\cdot \cdot}$ が掛かること）だけはそのまま残る。結果は

$$\omega^Q \frac{\partial \omega^{MP}}{\partial z^C} + \omega^M \frac{\partial \omega^{PQ}}{\partial z^A} + \omega^P \frac{\partial \omega^{QM}}{\partial z^B} = 0 \quad (4.3-33)$$

となり、これで (4.3-27) が成り立つ。

A の二階微分、 C の二階微分の項についても同様の計算ができるので、これからめでたく、

$$\{A, \{B, C\}_{PB}\}_{PB} + \{B, \{C, A\}_{PB}\}_{PB} + \{C, \{A, B\}_{PB}\}_{PB} = 0 \quad (4.3-34)$$

が確認された。この式をちょこちょこと順番を変えると

$$\{\{C, B\}_{PB}, A\}_{PB} - \{\{C, A\}_{PB}, B\}_{PB} = \{C, \{A, B\}_{PB}\}_{PB} \quad (4.3-35)$$

となるが、これは（たとえば第 1 項は「 B と Poisson 括弧を取って、次に A と Poisson 括弧を取る」という計算になっているので順番に注意して）ハミルトニアベクトル場を使って書くと

$$\mathbb{X}_A(\mathbb{X}_B C) - \mathbb{X}_B(\mathbb{X}_A C) = \mathbb{X}_{\{A, B\}_{PB}} C \quad (4.3-36)$$

すなわち

$$\mathbb{X}_A \mathbb{X}_B - \mathbb{X}_B \mathbb{X}_A = \mathbb{X}_{\{A, B\}_{PB}} C \quad (4.3-37)$$

を意味する。 A のハミルトニアベクトル場と B のハミルトニアベクトル場の交換関係は、 $\{A, B\}_{PB}$ のハミルトニアベクトル場となる。ゆえに、Poisson 括弧が 0 になる^{†10}場合、その二つの物理量によるハミルトニアベクトル場は交換する。

量子力学を習うとよく「古典力学では『数』だった物理量が量子力学では『演算子』になる」という言葉を聞く。しかし古典力学でも解析力学の正準形式まで踏み込めば、古典力学の物理量は立

^{†10} $\{A, B\}_{PB} = 0$ を「 A と B は Poisson 括弧の意味で交換する」と表現することがよくある。「 A と B はハミルトニアベクトル場が交換する」と表現してもいい。

派な演算子であると言ってもいい（言い過ぎだと思うなら「Poisson 括弧の意味で」を補足してもいい）。

4.4 正準変換

$2N$ 次元位相空間における Poisson 括弧は

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M_N \frac{\partial B}{\partial z^N} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial x^i}}_{\substack{\text{Poisson} \\ \text{括弧}} \text{の}} \underbrace{\frac{\partial B}{\partial p_i}}_{\text{意味}} - \underbrace{\frac{\partial A}{\partial p_i}}_{\text{Poisson} \text{括弧}} \underbrace{\frac{\partial B}{\partial x^i}}_{\text{の意味}} \quad (4.4-1)$$

と書くことができる。さて、位相空間の座標変換 $\{z^i\} \rightarrow \{Z^P\}$ を考えよう。Poisson 括弧は

$$\frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M_N \frac{\partial B}{\partial z^N} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial Z^M} \omega^M_N \frac{\partial B}{\partial Z^N} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \frac{\partial z^M}{\partial Z^P} \omega^P_Q \frac{\partial z^N}{\partial Z^Q} \frac{\partial B}{\partial z^N} \quad (4.4-2)$$

と変換されるから、係数 ω^{PQ} は

$$\Omega^{MN} = \frac{\partial z^M}{\partial Z^P} \omega^P_Q \frac{\partial z^N}{\partial Z^Q} \quad (4.4-3)$$

のように変換されるが、 $\Omega^{MN} = \omega^{MN}$ となるような座標変換ならば Poisson 括弧は変化しない。

座標変換の行列を

$$\mathbf{J}^M_N \equiv \frac{\partial z^M}{\partial Z^N} = (\mathbf{J}^\top)_N^M \quad (4.4-4)$$

と書くことにする（ \mathbf{J} と \mathbf{J}^\top は添字の前後を入れ替えた関係になっている）と、

$$\Omega^{MN} = \mathbf{J}^M_P \omega^P_Q (\mathbf{J}^\top)_Q^N \quad (4.4-5)$$

と表現できる。

このとき逆行列である ω_{MN} の方は

$$\Omega_{MN} = \frac{\partial Z^P}{\partial z^M} \omega^M_Q \frac{\partial Z^Q}{\partial z^N} = ((\mathbf{J}^{-1})^\top)_M^P \omega^P_Q ((\mathbf{J}^{-1})_Q^N) \quad (4.4-6)$$

と変換される。 \mathbf{J}^{-1} の定義は

$$(\mathbf{J}^{-1})_N^M \equiv \frac{\partial Z^N}{\partial z^M} = ((\mathbf{J}^{-1})^\top)_M^N \quad (4.4-7)$$

であり、

$$\mathbf{J}^P_N (\mathbf{J}^{-1})_Q^N = \frac{\partial z^P}{\partial Z^N} \frac{\partial Z^N}{\partial z^Q} = \delta^P_Q \quad (4.4-8)$$

が成り立つ（ \mathbf{J}^{-1} は \mathbf{J} の逆行列である）。

ω_{MN} が正準変換で不变（ $\Omega_{MN} = \omega_{MN}$ ）であれば、symplectic form が不变

$$\frac{1}{2} \omega_{MN} \langle dZ^M \rangle \wedge \langle dZ^N \rangle = \frac{1}{2} \omega_{MN} \langle dz^M \rangle \wedge \langle dz^N \rangle \quad (4.4-9)$$

(左辺と右辺で、 ω_{MN} は同じ成分のテンソル) あるいは、

$$|dP_i\rangle \wedge |dQ^i\rangle = |dp_i\rangle \wedge |dq^i\rangle \quad (4.4-10)$$

であることと同じである。

変換が正準変換であるためには、symplectic potential は不变でなくとも、

$$P_i |dQ^i\rangle = p_i |dq^i\rangle + \text{d}G \quad (4.4-11)$$

が成り立つればよい。ここで $\text{d}G$ は、任意のスカラー関数 G の外微分である。

(4.4-11) の $|dG\rangle$ の部分は symplectic form を作る外微分によって消えるので、(4.4-10) が導かれる。

(4.4-11) は電磁場のゲージ変換 $A' = A + \text{d}G$ と形は同じである。要は、我々が大事だと思っているのが「2-form が closed であること」なら、その 2-form に「1-form の外微分」を付け加えても大丈夫なのだ。

4.5 正準変換の例

4.5.1 点変換

座標を $Q^i = Q^i(\{q^j\})$ のように「新しい座標 $\{Q^i\}$ が古い座標 $\{q^j\}$ の関数（古い座標のみの関数で、古い運動量の関数ではない）」となるように変換すると同時に、古い運動量（ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ で定義されている）から新しい運動量（ $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}$ で定義されている）に変換すると、

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{bmatrix} \quad (4.5-1)$$

$\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}$

という変換になる。ここで、 q の変換と Q の変換の行列が逆であることから $\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}$ が成り立つことに注意。

要は $\{dq^j\}$ と $\{dp_j\}$ が互いに逆行列で変換されるという式になるので、

$$|dp_i\rangle \wedge |dq^i\rangle = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} |dP_j\rangle \wedge \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} |dQ^k\rangle$$

$\frac{\partial Q^k}{\partial q^i}$

$$= \underbrace{\frac{\partial Q^i}{\partial q^i} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j}}_{\delta^j_k} |dP_j\rangle \wedge |dQ^k\rangle = |dP_i\rangle \wedge |dQ^i\rangle \quad (4.5-2)$$

となって、symplectic form が不变である。実はこの場合は以下に示す通り、symplectic potential も不变である。

$$\underbrace{\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} P_j}_{p_i} |dq^i\rangle = \underbrace{\frac{\partial Q^i}{\partial q^i} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j}}_{\delta^j_k} P_j |dQ^k\rangle = P_i |dQ^i\rangle \quad (4.5-3)$$

点変換で symplectic potential が不变なのは、 $\{dq^i\} \rightarrow \{dQ^i\}$ が反変ベクトルの変換、 $\{p_i\} \rightarrow \{P_i\}$ が共変ベクトルの変換だからである。

例として、2次元の直交座標から極座標への変換を考えよう。

$$dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy, \quad d\theta = -\frac{y}{r^2} dx + \frac{x}{r^2} dy \quad (4.5-4)$$

と変わることはすでに述べた通り。極座標での運動量は

$$p_r = m\dot{r} = m \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{xp_x + yp_y}{r} \quad (4.5-5)$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = mr^2 \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = xp_y - yp_x \quad (4.5-6)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \underbrace{p_r}_{\left(\frac{x}{r}p_x + \frac{y}{r}p_y\right)} \underbrace{|dr\rangle}_{\left(\frac{x}{r}|dx\rangle + \frac{y}{r}|dy\rangle\right)} + \underbrace{p_\theta}_{(xp_y - yp_x)} \times \underbrace{\frac{1}{r^2} \times (-y|dx\rangle + x|dy\rangle)}_{|d\theta\rangle} \\ &= \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right) p_x |dx\rangle + \left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}\right) p_y |dy\rangle = p_x |dx\rangle + p_y |dy\rangle \end{aligned} \quad (4.5-7)$$

となるので、

$$p_r |dr\rangle + p_\theta |d\theta\rangle = p_x |dx\rangle + p_y |dy\rangle \quad (4.5-8)$$

が成り立つわけである。symplectic potential が不变なら symplectic form も不变で、これは Poisson 括弧が不变であることも意味する。

4.5.2 座標と運動量の交換

1次元で、新しい座標 Q は実は古い運動量 p で、新しい運動量 P は古い座標 $\times (-1)$ 、つまり $-q$ であったとする。これでも symplectic form が不变なのは、

$$|dP\rangle \wedge |dQ\rangle = -|dq\rangle \wedge |dp\rangle = |dp\rangle \wedge |dq\rangle \quad (4.5-9)$$

と確認できる。

symplectic potential の方は、新しい座標では $P|dQ\rangle$ となるがこれは $-q|dp\rangle$ に等しく、古い座標での $p|dq\rangle$ と一致しない。しかし新旧の差は

$$p|dq\rangle - P|dQ\rangle = p|dq\rangle + q|dp\rangle = \text{d.}(pq) \quad (4.5-10)$$

となって^{†11}、symplectic potential の変化は 0-form の外微分（全微分）の形となる。

4.5.3 調和振動子の角変数

1 次元調和振動子（簡単のため質量とばね定数を 1 にしよう）は

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} \quad (4.5-11)$$

で、その位相空間は円軌道

$$p = \sqrt{2E} \cos \theta, q = \sqrt{2E} \sin \theta \quad (4.5-12)$$

で埋め尽くされる。ここで、 E は H すなわちエネルギーの初期値（今エネルギーは保存するので、各軌道ごとに一定値）である（シンプルに $E = H$ と思ってもかまわない）。 θ は時間とともに増大するパラメータ（角変数）である。 E, θ は元の位相空間での座標 p, q の複雑な関数であるが、これらが新しい位相空間座標において運動量と座標になるようにしよう。そこで $E|d\theta\rangle$ を計算したい。

(4.5-12) から

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2E}} \cos \theta dE - \sqrt{2E} \sin \theta d\theta, \quad (4.5-13)$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{2E}} \sin \theta dE + \sqrt{2E} \cos \theta d\theta \quad (4.5-14)$$

なので、

$$\sqrt{2E} d\theta = \cos \theta dq - \sin \theta dp \quad (4.5-15)$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} E|d\theta\rangle &= E \left(\frac{\cos \theta|dq\rangle - \sin \theta|dp\rangle}{\sqrt{2E}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2E} (\cos \theta|dq\rangle - \sin \theta|dp\rangle) = \frac{1}{2} (p|dq\rangle - q|dp\rangle) = p|dq\rangle - \frac{1}{2} \text{d.}(pq) \end{aligned} \quad (4.5-16)$$

となり、この新旧の symplectic potential の違いは全微分となる。

正準変換の醍醐味は上のような「座標と運動量の複雑な関数を新しい（座標 or 運動量）に選べる」ことにある。

上では $|dp\rangle$ と $|dq\rangle$ を基底に選んで話をしたが、我々は自由度 2 の位相空間の中で四つの 1-form $|dp\rangle, |dq\rangle, |dE\rangle, |d\theta\rangle$ を持っているので、基底の選び方は変えてよい。たとえば $|dq\rangle, |d\theta\rangle$ を基底に選ぼう。つまり独立変数を (q, θ) というペアに選んだから、 p, E は従属変数である。

$$p = q \cot \theta, E = \frac{q^2}{2} (\cot^2 \theta + 1) = \frac{q^2}{2 \sin^2 \theta} \quad (4.5-17)$$

^{†11} $|\text{d}(pq)\rangle$ は pq の全微分 $pdq + qdp$ の微小変位を基底に置き換えたもの。つまり $p|dq\rangle + q|dp\rangle$ 。

のように表現しておく。

この場合の新旧の symplectic potential の差は

$$q \cot \theta |dq\rangle - \frac{q^2}{2 \sin^2 \theta} |d\theta\rangle = \textcolor{brown}{d} \left(\frac{q^2}{2} \cot \theta \right) \quad (4.5-18)$$

となって全微分になる。

独立変数を (p, θ) に選ぶと、

$$q = p \tan \theta, E = \frac{p^2}{2 \cos^2 \theta} \quad (4.5-19)$$

となり、

$$dq = \tan \theta dp + \frac{p}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.5-20)$$

になるので、

$$\begin{aligned} & p \left(\tan \theta |dp\rangle + \frac{p}{\cos^2 \theta} |d\theta\rangle \right) - \frac{p^2}{2 \cos^2 \theta} |d\theta\rangle \\ &= p \tan \theta |dp\rangle + \frac{p^2}{2 \cos^2 \theta} |d\theta\rangle = \left| d \left(\frac{p^2}{2} \tan \theta \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.5-21)$$

となり、やはり新旧の差は全微分。 pdq と $E d\theta$ は $\textcolor{brown}{d} (?)$ だけ違うので、

$$\textcolor{brown}{d} (pdq) = \textcolor{brown}{d} (E d\theta) \quad (4.5-22)$$

が成り立つ。つまり

$$dp \wedge dq = dE \wedge d\theta \quad (4.5-23)$$

が成り立つ。「外微分の結果の 2-form を見ると同じに見えるが、外微分する前の 1-form には $<0\text{-form の外微分}>$ で表現される違いがある」という状況（電磁場のゲージ理論と同じ）がここに見えてる。

4.6 調和振動子のエネルギーを上げる演算子

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$$

に対して、

$$\frac{d}{dt} (q \pm ip) = \{q, H\}_{\text{PB}} + i \{p, H\}_{\text{PB}} = p \mp iq = \mp i(q \pm ip) \quad (4.6-1)$$

が成り立つ。つまり $q \pm ip$ の時間発展は自分自身 $\times i$ である。ここで

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - ip) \quad (4.6-2)$$

なる複素座標 a を導入すると、ハミルトニアンは

$$H = a^* a \quad (4.6-3)$$

Poisson 括弧は

$$\{a^*, a\}_{\text{PB}} = i \quad (4.6-4)$$

運動方程式は

$$\frac{da}{dt} = \{a, H\}_{\text{PB}} = -ia, \quad \frac{da^*}{dt} = \{a^*, H\}_{\text{PB}} = ia^* \quad (4.6-5)$$

とまとまる。2次元位相空間 (q, p) が 1 次元複素数 a になる。量子論に行くと、この a と a^* が「エネルギーを上げ下げする演算子」という意味を持つようになる。

4.7 正準変換の母関数

上では「こういう正準変換をする」→「そのとき G はこういう形」と求めていった。だが実は G を先に決めて、それに対応する正準変換を行うことも可能である。まず 1 次元（2 次元の位相空間）の場合で考えることにして、

$$pdq = PdQ + dG \quad (4.7-1)$$

が成り立つように、古い位相空間座標 p, q と新しい位相空間座標 P, Q の関係を決めていく。4つの位相空間座標のうちどの二つを独立変数とするかでいろいろな計算方法がある。

4.7.1 q, Q を独立変数とする

$$p(q, Q) dq = P(q, Q) dQ + \frac{\partial G(q, Q)}{\partial q} dq + \frac{\partial G(q, Q)}{\partial Q} dQ \quad (4.7-2)$$

より、

$$p(q, Q) = \frac{\partial G(q, Q)}{\partial q}, \quad P(q, Q) = -\frac{\partial G(q, Q)}{\partial Q} \quad (4.7-3)$$

が新旧座標系の関係である。

4.7.2 p, Q を独立変数とする

$$p \underbrace{\left(\frac{\partial q(p, Q)}{\partial p} dp + \frac{\partial q(p, Q)}{\partial Q} dQ \right)}_{dq(p, Q)} = P(p, Q) dQ + \underbrace{\frac{\partial G(p, Q)}{\partial p} dp + \frac{\partial G(p, Q)}{\partial Q} dQ}_{dG} \quad (4.7-4)$$

となり、これから新旧座標系の関係を求めてもいいのだが、ちょっとややこしい。しかしここで新しく $G(p, Q) = W(p, Q) + p q(p, Q)$ で決まる関数 $W(p, Q)$ を導入すると、

$$dG = \frac{\partial W(p, Q)}{\partial p} dp + \frac{\partial W(p, Q)}{\partial Q} dQ + q(p, Q) dp + p \left(\frac{\partial q(p, Q)}{\partial p} dp + \frac{\partial q(p, Q)}{\partial Q} dQ \right) \quad (4.7-5)$$

となる。この最後の項が左辺にもあるので相殺して^{†12}、

$$0 = P(p, Q) \mathrm{d}Q + \frac{\partial W(p, Q)}{\partial p} \mathrm{d}p + \frac{\partial W(p, Q)}{\partial Q} \mathrm{d}Q + q(p, Q) \mathrm{d}p \quad (4.7-6)$$

となる。よって新旧の座標系の関係は

$$q(p, Q) = -\frac{\partial W(p, Q)}{\partial p}, \quad P(p, Q) = -\frac{\partial W(p, Q)}{\partial Q} \quad (4.7-7)$$

となる。

このできあがった関係を見ると、実は $G = W + pq$ は $-\underbrace{q(p, Q)}_{-q(p, Q)}$

$$G(p, Q) = W(p, Q) - p \underbrace{\frac{\partial W(p, Q)}{\partial p}}_{\partial W(q, Q)} \quad (4.7-8)$$

であったことがわかる。つまり、 G と W はルジャンドル変換でつながっている。

このタイプの変換の自明な例は $W = -p_x X - p_y Y$ で、結果は $x = X, y = Y$ で $p_x = p_X, p_y = p_Y$ というつまらないものになる。

少し自明でない例として、 $W = -p_x r \cos \theta - p_y r \sin \theta$ と選ぶと直交座標から極座標への変換になる。このとき

$$x = -\frac{\partial W}{\partial p_x} = r \cos \theta, \quad y = -\frac{\partial W}{\partial p_y} = r \sin \theta \quad (4.7-9)$$

により新旧座標の関係が、

$$P_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = p_x \cos \theta + p_y \sin \theta, \quad P_\theta = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -p_x r \sin \theta + p_y r \cos \theta \quad (4.7-10)$$

で新旧運動量の関係が出てくる。

4.7.3 q, P を独立変数とする

今度は最初から G を $G(q, P) = W(q, P) - P Q(q, P)$ としよう ($W(q, P)$ と $W(p, Q)$ は同じ関数ではない！)。すると

$$p(q, P) \mathrm{d}q = P \mathrm{d}Q(q, P) + \mathrm{d}W(q, P) - P \mathrm{d}Q(q, P) - Q(q, P) \mathrm{d}P$$

$$p(q, P) \mathrm{d}q = \underbrace{\frac{\partial W(q, P)}{\partial q} \mathrm{d}q}_{\mathrm{d}W(q, P)} + \underbrace{\frac{\partial W(q, P)}{\partial P} \mathrm{d}P}_{\mathrm{d}P} - Q(q, P) \mathrm{d}P \quad (4.7-11)$$

より、

$$p(q, P) = \frac{\partial W(q, P)}{\partial q}, \quad Q(q, P) = \frac{\partial W(q, P)}{\partial P} \quad (4.7-12)$$

^{†12} $\mathrm{d}G = \mathrm{d}W + q \mathrm{d}p + p \mathrm{d}q$ として最後の項を左辺と相殺させている。実は $G \rightarrow W$ の変換はルジャンドル変換である。

となる。例としてまた直交座標から極座標への変換を考えると、母関数を

$$W = P_r \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{r \text{ になるもの}} + P_\theta \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{\theta \text{ になるもの}} \quad (4.7-13)$$

とすることで、新旧座標の関係が

$$r = \frac{\partial W}{\partial P_r} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial P_\theta} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.7-14)$$

と

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = P_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + P_\theta \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = P_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - P_\theta \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (4.7-15)$$

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = P_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + P_\theta \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = P_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + P_\theta \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.7-16)$$

に定まる。

点変換は、 $W = P_i f^i(\{q\})$ で実現する^{†13}。この場合、

$$Q^i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = f^i(\{q\}) \quad (4.7-17)$$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i} = P_i \frac{\partial f^i(\{q\})}{\partial q^i} \quad (4.7-18)$$

となる。運動量の変換 $p_i \rightarrow P_i$ が、座標の微小変位の変換 $dq^i \rightarrow dQ^i$

$$dQ^i = \frac{\partial f^i(\{q\})}{\partial q^j} dq^j \quad (4.7-19)$$

と逆であることが確認できる。

4.7.4 p, P を独立変数とする

G を $G(p, P) = W(p, P) + p q(p, P) - P Q(p, P)$ とすれば、

$$\begin{aligned} p dq(p, P) &= P dQ(p, P) + dW(p, P) + p dq(p, P) + q(p, P) dp \\ &\quad - P(p, P) dQ(p, P) - Q(p, P) dP \\ 0 &= \underbrace{\frac{\partial W(p, P)}{\partial p} dp + \frac{\partial W(p, P)}{\partial P} dP}_{dW(p, P)} + q(p, P) dp - Q(p, P) dP \end{aligned} \quad (4.7-20)$$

より、

$$q(p, P) = -\frac{\partial W(p, P)}{\partial p}, \quad Q(p, P) = \frac{\partial W(p, P)}{\partial P} \quad (4.7-21)$$

^{†13} これは、 $G = W - PQ = P_i (f^i(\{q\}) - Q^i)$ と書くこともできる。この項が作用に付け加わるところは、あたかも「 P_i という Lagrange 未定乗数が、 $f^i - Q^i = 0$ という拘束を課す」かのように見える。

4.8 热力学

 この章は解析力学の章なのだが、ここまで「微分形式の心」が整理されてくると、熱力学にも使いたくなる、ということでこの章の最後に熱力学との関係を述べよう^{†14}。

4.8.1 完全な熱力学関数の全微分

熱力学では、完全な熱力学関数である、内部エネルギー $U[S, V, N]$ 、エンタルピー $H[P; S, N]$ 、Helmholtz の自由エネルギー $F[T; V, N]$ 、Gibbs の自由エネルギー $G[T, P; N]$ などが重要な役割を果たす。これらはスカラーであるが、その全微分はそれぞれ、

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \quad (4.8-1)$$

$$dH = TdS + VdP + \mu dN \quad (4.8-2)$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad (4.8-3)$$

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad (4.8-4)$$

という量になっている。

 全微分できるためには微分が連続でなくてはいけないが、熱力学で相転移が起こるときに微分は連続ではなくなるので、その場合は注意が必要。

4.8.2 热力学的状態空間における 2-form

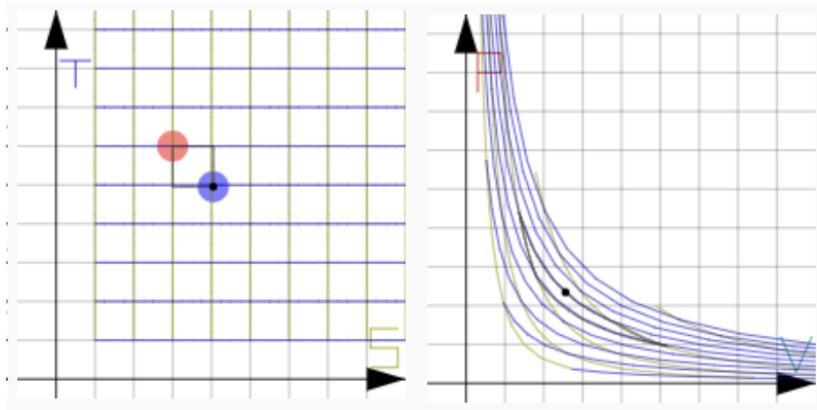
上の式のどれでも、外微分 d を掛けると

$$0 = dT \wedge dS + dV \wedge dP + d\mu \wedge dN \quad (4.8-5)$$

という式が出る^{†15}。これは系が (2-form として表現される微小面積を周回するような) 「サイクル」を回るときに、 T - S 空間、 P - V 空間、 μ - N 空間でそれぞれが描く面積の間に関係があるという式である。特に物質量が変化しないとき、 $0 = dT \wedge dS + dV \wedge dP$ は $dT \wedge dS = dP \wedge dV$ と書き直すことができて、系が吸収する熱と系が外部に対してする仕事の間の関係を表現している (サイクルなのだからこの二つは等しい)。

^{†14} なお、熱力学の空間は解析力学の symplectic geometry ではなく、contact geometry の方で記述すべきである (らしい)。著者は詳しいことは知らないので [10] を参照。

^{†15} 解析力学との対応を考えると、 dU や dF の式は symplectic potential に、(4.8-5) が symplectic form に対応する。 U, F などは同じ物理的内容を表現していて Legendre 変換でつながるので、その外微分 (2-form) は同じである。これは正準変換しても symplectic form が変わらない状況に対応する。



参照：<http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrTD/sim/PVST.html>

図 4-2 Carnot サイクルの P-V 図と T-S 図

つまり我々が「熱」とか「仕事」とか呼ぶものは、この「熱力学的状態空間」のなかの 2-form の積分量—電磁気での対応物は磁束や電束—なのである。磁束が積分により「面積を通り抜ける」^{†16} 量が計算されるのに対し、熱は積分により「一周すると系が吸収する」量が計算される。

 热力学をよくわかっている人には不要の補足： T, S, P, V, N, μ などの変数で表現できる熱力学的状態とは、熱力学が扱う「状態」のうち、平衡状態だけである。ここで考えている「熱」や「仕事」も、その平衡状態を通過しての状態変化（いわゆる「準静的過程」）である。熱力学の状態変化の中には、「平衡状態から準静的でない操作をして（平衡状態を経由せずに）、最後はまた別の平衡状態に落ち着く」ものもある。そのときの熱や仕事は、上で述べた 2-form の積分という量では表しきれない。微分形式を使って美しく（？）書くことができるのは準静的操作のみである。さらに、ここで述べた内容は熱力学第 2 法則を含んでいない。つまりは「微分形式で表すと幸せな部分」は熱力学の一部に過ぎない（それでも幸せなところはありがたく使う）。熱力学第 2 法則と微分形式での表現との関係については、この後で述べよう。

→ p139

熱力学の Maxwell の関係式は、(4.8-5) $0 = dT \wedge dS + dV \wedge dP + d\mu \wedge dN$ の中に入っている。この式は 6 個の物理量の式になっているが、独立なのは三つの変数で、互いに共役なペアである $T \leftrightarrow S, P \leftrightarrow V, \mu \leftrightarrow N$ の片方ずつしか独立変数としては選べない。それはつまり「form の基底としてはこの六つから三つ選ばなくてはいけない」ことである^{†17}。

たとえば T, V, N を独立変数とするならば、 $dS, dP, d\mu$ は dT, dV, dN で表現しなくてはいけない。それを実行すると、

$$0 = dT \wedge \left(\underbrace{\frac{\partial S(T; V, N)}{\partial T} dT + \frac{\partial S(T; V, N)}{\partial V} dV + \frac{\partial S(T; V, N)}{\partial N} dN}_{dS} \right)$$

†16 とはいって、磁束が「通り抜ける」ときは、磁束密度を 1-form で考えているのである。

†17 Maxwell の関係式は完全な熱力学関数の積分可能条件として導くことが多いが、微分形式に慣れているとこの導出の方がシンプルかもしれない。

$$\begin{aligned}
& + dV \wedge \left(\overbrace{\frac{\partial P(T; V, N)}{\partial T} dT + \frac{\partial P(T; V, N)}{\partial V} dV}^{\text{d}P} + \frac{\partial P(T; V, N)}{\partial N} dN \right) \\
& + \left(\overbrace{\frac{\partial \mu(T; V, N)}{\partial T} dT + \frac{\partial S(T; V, N)}{\partial V} dV}^{\text{d}\mu} + \frac{\partial \mu(T; V, N)}{\partial N} dN \right) \wedge dN
\end{aligned} \tag{4.8-6}$$

となり、これからたとえば $dT \wedge dV$ の係数を取り出すと $\frac{\partial S(T; V, N)}{\partial V} - \frac{\partial P(T; V, N)}{\partial T} = 0$ が導かれる。

熱力学における「共役な変数のペア」は

$$\frac{\partial F(T; V, N)}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial F(T; V, N)}{\partial V} = -P, \quad \frac{\partial F(T; V, N)}{\partial N} = \mu \tag{4.8-7}$$

のように「熱力学関数を微分すると共役な変数が現れる」ようになっている。解析力学での共役は

$$p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \tag{4.8-8}$$

だから、この式を見ると「 x ではなく \dot{x} で微分している点で、解析力学の共役と熱力学の共役は違う」と思うかもしれない。しかし、ハミルトンの主関数と呼ばれる $S(t_0; x_0, t_1; x_1)$ を考えると、

$$p = \frac{\partial S(t_0; x_0, t_1; x_1)}{\partial \dot{x}} \tag{4.8-9}$$

となって、完全な対応関係になっている。

4.8.3 热力学第2法則は何をする？

さて、ここまで話では熱力学第2法則は使ってないように思えるかもしれない。実は第2法則は「状態が $T, P, \mu; S, V, N$ で表現できる」という前提を成り立たせるために使われている。つまりエントロピー S が状態量として定義できるために第2法則が必要だったのである。たとえば T, V, N で表現された「熱力学的状態空間」の中で「断熱操作では決して減らない量がある」という仮定（これは熱力学でいうとカラテオドリの原理^{†18}からの帰結）により S が導入され、熱力学的状態関数を作ることができるようになる。

図 1-5 のあたりで、 X という量の「地図」が書けるとその微小変化である dX を「坂道」の方向の ^{→ p23}ような形で考えることができた。熱力学の「状態空間」の中に S という量を「地図に書き込んで」、そこに dS という方向を考えることができるのは、熱力学第2法則が熱力学の状態空間の中に「こっちには行けるがこっちには行けない」という一方通行性の「方向」を定めてくれるからである。つまり第2法則はこの節でした話ができるための舞台設定を作るところに役立っているのだ。

†18 カラテオドリは数学者なので、これよりさらに抽象的な段階に原理を置く。

第5章 拘束系の古典力学



では、本講義の目的である「拘束系」の話に入ろう。

5.1 古典力学の拘束系の単純な例—定滑車

5.1.1 初等力学で

まずはウォーミングアップで、高校物理でも出てくるような系から始める。図5-1のような定滑車を考えよう。

初等力学では、図にも描いたように、「糸の張力が働いた」として連立方程式

$$m\ddot{x} = mg - T \quad (5.1-1)$$

$$M\ddot{X} = Mg - T \quad (5.1-2)$$

として解くことが多いだろう。

さらに実は運動を考えると $x + X = \text{一定}$ だから $\ddot{X} = -\ddot{x}$ として

$$m\ddot{x} = mg - T \quad (5.1-3)$$

$$-M\ddot{x} = Mg - T \quad (5.1-4)$$

$$(M+m)\ddot{x} = (m-M)g \quad (5.1-5)$$

となって加速度が $\ddot{x} = \frac{m-M}{M+m}g$ であることがわかる。当然、

$\ddot{X} = \frac{M-m}{M+m}g$ (逆符号) である。

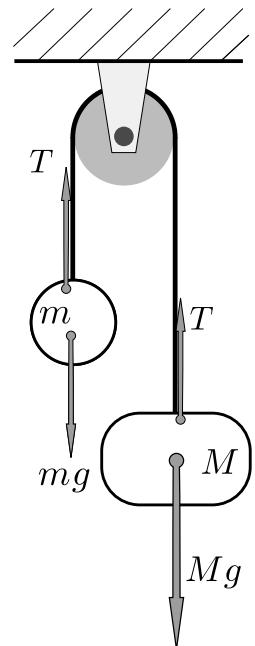


図5-1
定滑車

5.1.2 初等力学で少し小賢しいことを考えると

上で行った計算では、張力 T という新しい変数を導入しておきながら、すぐに消去している。どうせすぐに消すものなら、最初から登場しないような手段はないだろうか、と「小賢しい怠け者」が考えたとしよう。彼または彼女は図5-2のような絵を描く。

→ p141

質量 m の物体は仮想的に回転して、上向きに重力 mg が働く。そして二つの物体は一体となって運動する (よって張力 T は内力として扱ってよい)。以上のように考えればこの図からいっきに $(M+m)\ddot{X} = (M-m)g$ が出てくるわけである。

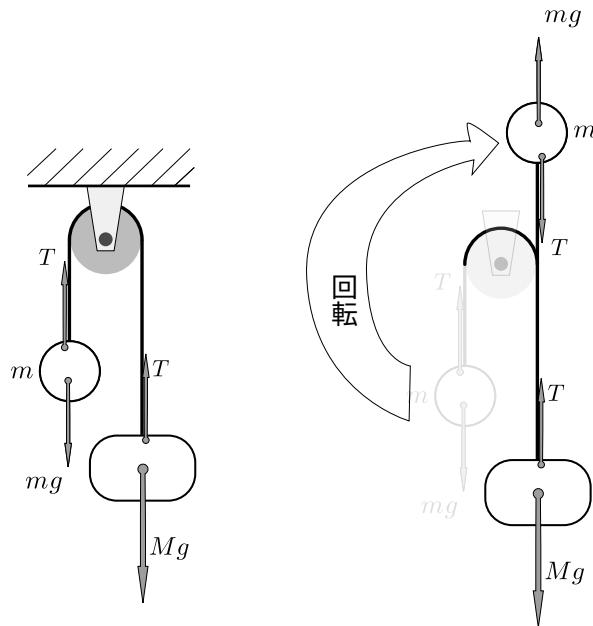


図 5-2 仮想的に回転した滑車

この考え方から教訓として欲しいのは、実はこの系の自由度は 1 だということである。自由度 1 しかないので (x と X は連動しているのに)、二つの変数 x, X を使ったものだから、不必要に複雑な計算になってしまっている。しかし、最初の（図を描き直す前の）状況から見れば、このように二つの変数が出てくることは自然ではある。つまり、冗長に見える 2 変数 x, X での表現も、役に立つ部分がちゃんとある。

こういう「本来系が持っている自由度より、力学変数として現れる物理量の自由度の方が多い」状況になっている系がこれから扱っていく「拘束系」である。

5.1.3 ラグランジュ形式で

系の力学を表現するには作用を記述する方が簡潔でよい。作用またはラグランジアンを使ってこの系を考えていこう。

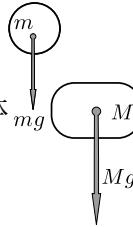
質量 m, M の二つの物体が定滑車に掛かっている状況のラグランジアンは拘束条件を考慮しないならば

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X})^2 + mgx + MgX \quad (5.1-6)$$

であるが、これからオイラー・ラグランジュの運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = mg \quad (5.1-7)$$

$$M\ddot{X} = Mg \quad (5.1-8)$$



となる。これらは相互に関係ない二つの落体 mg の運動方程式となってしまって、もちろん意図したものとは違う。

意図した系では（初等力学で）運動方程式
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - T \\ M\ddot{X} &= Mg - T \end{aligned}$$
 が出てくるのを知っているのだから、

そうなるようにラグランジアンを変形する。以下の二つの方法を考えてみよう。

5.1.3.1 張力が出てくるようにラグランジアンを変更する

定滑車に架かった物体の場合、実は拘束条件 $x + X = \text{一定}$ がついている。運動方程式を出すときの手順に戻って、ラグランジアン(5.1-6)の積分である作用の変分を考えよう。それは
 $\rightarrow p141$

$$\int \left(\underbrace{\delta x \left(-\frac{d}{dt} m(\dot{x}) + mg \right)}_{=0 \text{ が式 (5.1-7)}} + \underbrace{\delta X \left(-\frac{d}{dt} M(\dot{X}) + Mg \right)}_{=0 \text{ が式 (5.1-8)}} \right) dt \quad (5.1-9)$$

である。もし $\delta x, \delta X$ が独立な量であれば、運動方程式(5.1-7)(5.1-8)が出てきてしまう。

しかし、条件 $x + X - \ell = 0$ からくる関係 $\delta x + \delta X = 0$ があるので、 δx の係数と δX の係数が別々に 0 になるのではなく、 $\delta X = -\delta x$ と代入してまとめた結果である

$$\int \delta x \left(-\frac{d}{dt} m(\dot{x}) + mg + \underbrace{\frac{d}{dt} M(\dot{X}) - Mg}_{=0 \text{ になる}} \right) dt \quad (5.1-10)$$

の係数が 0 になると解釈せねばならない。これで、正しい運動方程式が出てきた。

ここで我々は 2 つの変分が各々 0 になるのではなく、引くと 0 になる（そうなった理由は δx と δX が独立じゃなかった）条件を課したが、それは作用の変分が

$$\int \left(\delta x \left(-\frac{d}{dt} m(\dot{x}) + mg - T \right) + \delta X \left(-\frac{d}{dt} M(\dot{X}) + Mg - T \right) \right) dt \quad (5.1-11)$$

に変わるので、とみてもよい。

変分がこう変更されたことを、作用が

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} M(\dot{X})^2 + mgx + MgX - T(x + X) \quad (5.1-12)$$

と変更されたからだと解釈することも可能である。

5.1.3.2 拘束条件が加わるようにする

うまくいってなかったのは、条件 $x + X - \ell = 0$ を入れてないのが問題だから、入れる。具体的には

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X})^2 + mgx + MgX - T(x + X - \ell) \quad (5.1-13)$$

のように作用を変更し、 T を変数としたときの運動方程式が拘束条件

$$\frac{\partial L}{\partial T} = x + X - \ell = 0 \quad (5.1-14)$$

になるようになる。

(5.1-13) は最後の $T\ell$ が足されている分だけ(5.1-12)と違う。この違いは運動方程式には関係ない。
→ p142

これでこの系は解けるが、本来自由度 1 の系を x, X, T と三つの変数を使って表現している。 T がある意味「負の自由度」とカウントされている。

「変なラグランジアンから出発するから悪いのだが、 $x + X - \ell = 0$ になるんなら、最初からそうなるようにしておけ」と考えてラグランジアンに $X = -x + \ell$ を代入すると、

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{M}{2}(-\dot{x})^2 + mgx + Mg(-x + \ell) \\ &= \frac{m+M}{2}(\dot{x})^2 + (m-M)gx + Mg\ell \end{aligned} \quad (5.1-15)$$

となる。これから得られる運動方程式は

$$(m+M)\ddot{x} = (m-M)g \quad (5.1-16)$$

となって、確かに同じ運動方程式が出た。だがこの「最初からそうなるようにしておけ」が実行できるのは、拘束が比較的簡単なときに限るのである。

5.1.4 ハミルトン形式

ラグランジュ未定乗数つきの作用 (5.1-13) からハミルトン形式に移行するとどうなるか。 T も変数のうちである点に注意しよう。ハミルトニアン形式に移行するときは、まず座標変数に対する運動量を定義する。

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X}, \quad P_T = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 0 \quad (5.1-17)$$

となる。問題は $P_T = 0$ となることである。このようにラグランジアン形式からハミルトン形式に移ろうとしたときに運動量が独立な量にならないという形で出現する拘束条件を「最初に出てくる拘束」という意味で「primary constraint」と呼ぶ。

ハミルトニアンは

$$H = \frac{(P_x)^2}{2m} + \frac{(P_X)^2}{2M} - mgx - MgX + T(x + X - \ell) \quad (5.1-18)$$

のように計算できて、それから導かれる正準方程式は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m}, & \dot{P}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = mg - T, \\ \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{M}, & \dot{P}_x &= -\frac{\partial H}{\partial X} = Mg - T, \\ \dot{T} &= \frac{\partial H}{\partial P_T} = 0, & \dot{P}_T &= -\frac{\partial H}{\partial T} = -x - X + \ell\end{aligned}\quad (5.1-19)$$

である。

$P_T = 0$ (primary constraint) のだからその時間微分である \dot{P}_T も 0 (つまり $-x - X + \ell = 0$) である。この「2番目に現れる拘束条件」は「secondary constraint」と言う。

さらにはこの時間発展

$$\{-x - X + \ell, H\}_{\text{PB}} = -\frac{P_x}{m} - \frac{P_x}{M} \quad (5.1-20)$$

も 0 である。この名前は「tertiary constraint」^{†1} となる。

さらに時間発展を考えると

$$\left\{ -\frac{P_x}{m} - \frac{P_x}{M}, H \right\}_{\text{PB}} = -2g + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) T \quad (5.1-21)$$

も 0 であり (quaternary constraint)、これが張力 T を決める式になる。この時間発展は 0 になるので、手続きはこれで終わる。ここで出てきた $\frac{1}{m} + \frac{1}{M}$ は換算質量 $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ の逆数なので以後は μ を使って書くことにする。こうすると、 $T = 2\mu g$ となる。

上の正準方程式から

$$\ddot{x} = \frac{\dot{P}_x}{m} = g - \frac{1}{m} T = \left(1 - \frac{2\mu}{m} \right) g = \frac{m - M}{M + m} g \quad (5.1-22)$$

$$\ddot{X} = \frac{\dot{P}_x}{M} = g - \frac{1}{M} T = \left(1 - \frac{2\mu}{M} \right) g = \frac{M - m}{M + m} g \quad (5.1-23)$$

となり、正しい結果になっている。

正準理論として考えたとき、この系には x, X, T, P_x, P_x, P_T の 6 自由度があった。今四つの条件が付け加わったので、これで自由度が 4 落ちる。つまり系の本来の力学的自由度である 2 (座標 1+運動量 1 と数える) になった。つまりこの系の「位相空間 (phase space)」(座標と運動量を変数として持つ空間) は、今の場合 (x, X, T, P_x, P_x, P_T) の自由度 6 があるように見えて、実は 2 しかない。このような系が拘束系であり、拘束系のハミルトン形式を考えるときには、以下に述べる注意が必要である。

†1 tertiary はあんまり使わない言葉だが、「3 次」の意味。

ぐぐってみると、この後は quaternary, quinary, senary, septenary, octonary, nonary, denary… と続くのだそう。

5.1.5 拘束系のハミルトン形式に関する注意

ラグランジアンのときそうだったように、ここまで来たら拘束をいっさに代入してしまっていいだろうか？—とりあえずやってみると結果は

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(P_x)^2}{2m} + \frac{\left(-\frac{M}{m}P_x\right)^2}{2M} - mgx - Mg(-x + \ell) \\
 &= \frac{1}{2}(P_x)^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{M}{m^2}\right) - mgx - Mg(-x + \ell) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(m+M)(P_x)^2}{m^2} - (m-M)gx - Mg\ell
 \end{aligned} \tag{5.1-24}$$

となる。これから、残った正準変数である x, P_x の正準方程式を書いてみると

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}_{\text{PB}} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{(m+M)P_x}{m^2} \tag{5.1-25}$$

$$\frac{dP_x}{dt} = \{P_x, H\}_{\text{PB}} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m-M)g \tag{5.1-26}$$

となる。つまり

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \{\{x, H\}_{\text{PB}}, H\}_{\text{PB}} = \frac{m+M}{m^2} \{P_x, H\}_{\text{PB}} = \frac{(m-M)(m+M)}{m^2} g \tag{5.1-27}$$

となって、 $\frac{(m+M)^2}{m^2}$ 倍、合わない。

合わない理由はシンプルで、上では「 X を消去する前のラグランジアン」から定義した「 x の運動量 P_x 」を使って書いたハミルトニアンから X を消去したわけだが、この運動量 P_x は、 X が消去されたラグランジアンから求められる P_x とは一致しないのである。

ハミルトン形式での計算には「運動量を定義する（というより、座標と運動量のペアを設定する）」部分を注意深くやらないと間違える。

5.1.6 位相空間を縮小する

ここで、前に考えた symplectic form を使って位相空間がどう縮小されるかを考えてみよう。もし今考えている 6 次元の位相空間 (x, X, T, P_x, P_X, P_T) が「普通の（拘束系でない）」系なら、

$$|dP_x\rangle \wedge |dx\rangle + |dP_X\rangle \wedge |dX\rangle + |dP_T\rangle \wedge |dT\rangle \tag{5.1-28}$$

という 2-form になるが、実は今 4 つの拘束条件がついている。拘束条件から

$$|dP_X\rangle = -\frac{M}{m}|dP_x\rangle, \quad |dX\rangle = -|dx\rangle, \quad |dP_T\rangle = 0, \quad |dT\rangle = 0 \tag{5.1-29}$$

が出るからこれを代入すると

$$\begin{aligned}
 &|dP_x\rangle \wedge |dx\rangle + \underbrace{\frac{M}{m}|dP_x\rangle \wedge |dx\rangle}_{0} + \underbrace{0}_{|dP_T\rangle \wedge |dT\rangle} = \frac{M+m}{m}|dP_x\rangle \wedge |dx\rangle
 \end{aligned} \tag{5.1-30}$$

つまり、拘束された位相空間の symplectic form は、 $\frac{M+m}{m}$ 倍違う。symplectic form の係数 ω_{MN} と Poisson 括弧の係数行列 ω^{MN} は互いに逆行列であったから、この「拘束された位相空間」の中の Poisson 括弧（ここではいったん、 $\{\cdot, \cdot\}_{PB}$ と書くことにしよう^{†2}）は、通常の Poisson 括弧の $\frac{m}{M+m}$ 倍にすればいいのでは？—という気分になってくる（ここでの説明はあくまで「気分」なので一般的にこれでいいのかは後でチェックする）。すると、正準方程式は $\{\cdot, \cdot\}_{PB}$ の方が使って書かれて、

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}_{PB} = \frac{m}{M+m} \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{m}{M+m} \frac{(m+M)P_x}{m^2} = \frac{P_x}{m} \quad (5.1-31)$$

$$\frac{dP_x}{dt} = \{P_x, H\}_{PB} = -\frac{m}{M+m} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{m(m-M)}{M+m} g \quad (5.1-32)$$

であり、運動方程式が

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \{\{x, H\}_{PB}, H\}_{PB} = \frac{1}{m} \{P_x, H\}_{PB} = \frac{m-M}{M+m} g \quad (5.1-33)$$

となる。この運動方程式は正しい。

ここで T, P_T のペアは現れたかと思ったら消えるだけなので最初から考えないことにして、 (x, P_x, X, P_X) をどのように「拘束系に持っていく」かを考えよう。四つの正準座標 x, P_x, X, P_X は

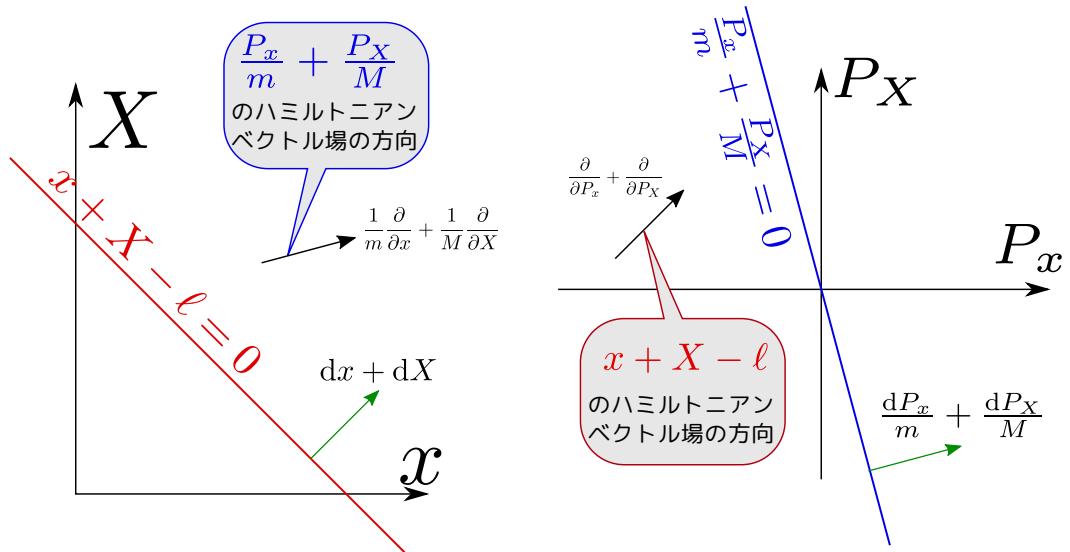


図 5-3

拘束の掛かった空間内では 0 になる $x + X - \ell$ と $\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M}$ と (Poisson 括弧の意味で) 交換しない。そこでこれら座標を「拘束と交換する」ように改良（？）する。具体的には

$$x^\perp = x + \lambda_x (x + X - \ell), \quad X^\perp = X + \lambda_X (x + X - \ell), \quad (5.1-34)$$

$$(P_x)^\perp = P_x + \lambda_{P_x} \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right), \quad (P_X)^\perp = P_X + \lambda_{P_X} \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right) \quad (5.1-35)$$

†2 一般的な記号ではなく、この場限り。

のように後で決める係数 $\lambda_x, \lambda_X, \lambda_{P_x}, \lambda_{P_X}$ を掛けて、「どうせ 0 になるパート」を付け加える。

ここで記号 \perp の意味は「拘束 Φ^α と Poisson 括弧の意味で交換する」ということを意味する（文字通りの意味で「直交」ではないので注意）。 $\{*, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}}$ が 0 になるという意味では、ハミルトニアンベクトル場 X_{Φ^α} と交換する、というイメージの方がよいかもしない。つまり、図 5-4 と図 5-5 のように、「拘束条件によるハミルトニアンベクトル場と直交する方向」^{†3}を取り出すのである。

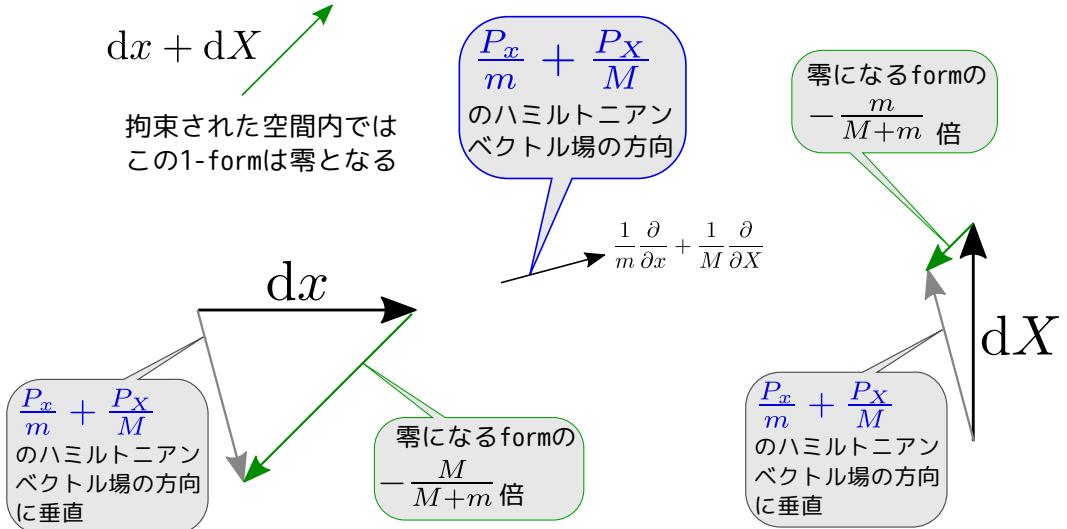


図 5-4

実際に Poisson 括弧を取ってみると、

$$\begin{aligned} \left\{ x^\perp, \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right\}_{\text{PB}} &= \left\{ x, \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right\}_{\text{PB}} + \lambda_x \left\{ x + X - \ell, \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right\}_{\text{PB}} \\ &= \frac{1}{m} + \lambda_x \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.1-36)$$

となるためには、 $\lambda_x = -\frac{1}{m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)} = -\frac{M}{M+m}$ である。つまり、

$$x^\perp = \frac{m}{M+m}x - \frac{M}{M+m}(X - \ell) \quad (5.1-37)$$

$$X^\perp = \frac{M}{M+m}X - \frac{m}{M+m}(x - \ell) \quad (5.1-38)$$

となる。 X^\perp の方は、 x, X の立場を入れ替えた（同時に m, M も入れ替える）。よく見ると、 $dx^\perp = -dX^\perp$ である。

一方、

$$\{(P_x)^\perp, x + X - \ell\}_{\text{PB}} = \{P_x, x + X - \ell\}_{\text{PB}} + \lambda_{P_x} \left\{ \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M}, x + X - \ell \right\}_{\text{PB}}$$

^{†3} 念の為注。微分形式の世界では「直交する」とか「しない」とか言えるのは 1-form とベクトルのペア。ベクトルどうしの直交性や 1-form どうしの直交は出てこない。

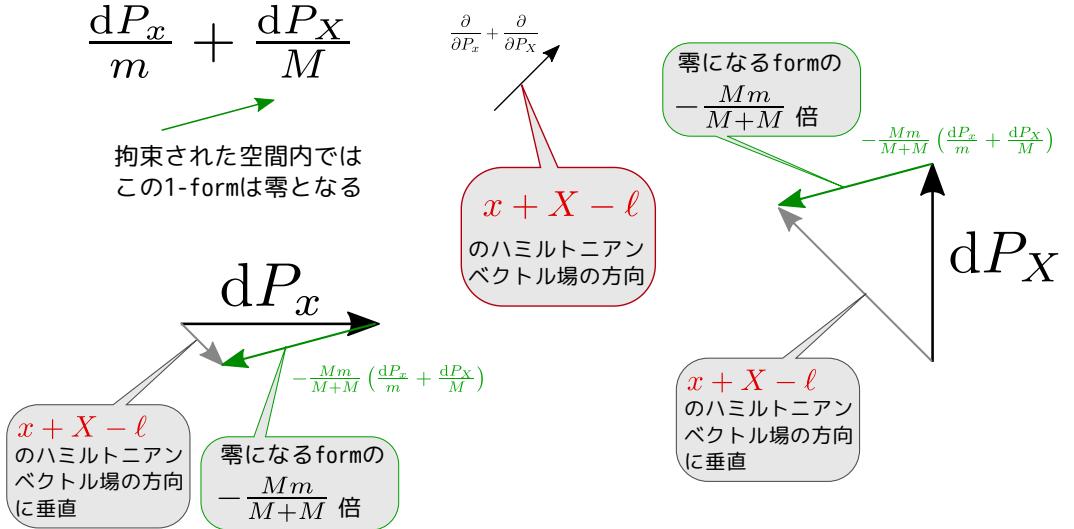


図 5-5

$$= -1 - \lambda_{P_x} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = 0 \quad (5.1-39)$$

となるためには、 $\lambda_{P_x} = -\frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M}} = -\frac{Mm}{M+m}$ であればよい。よって

$$(P_x)^\perp = \frac{m}{M+m} P_x - \frac{m}{M+m} P_X \quad (5.1-40)$$

$$(P_X)^\perp = \frac{M}{M+m} P_X - \frac{M}{M+m} P_x \quad (5.1-41)$$

となる。よく見ると、 $\frac{(P_x)^\perp}{m} = -\frac{(P_X)^\perp}{M}$ である。

以上から、 \perp つき座標による symplectic form を計算すると、

$$\begin{aligned} & |d(P_x)^\perp\rangle \wedge |dx^\perp\rangle + |d(P_X)^\perp\rangle \wedge |dX^\perp\rangle \\ &= (|d(P_x)^\perp\rangle - |d(P_X)^\perp\rangle) \wedge |dx^\perp\rangle \\ &= \frac{1}{(M+m)^2} (m|dP_x\rangle - m|dP_X\rangle - (M|dP_X\rangle - M|dP_x\rangle)) \wedge (m|dx\rangle - M|dX\rangle) \\ &= \frac{1}{M+m} (|dP_x\rangle - |dP_X\rangle) \wedge (m|dx\rangle - M|dX\rangle) \end{aligned} \quad (5.1-42)$$

となる。 $\begin{cases} |dP_x\rangle \wedge |dx\rangle \text{ の係数は } \frac{m}{M+m} \text{ 倍に} \\ |dP_X\rangle \wedge |dX\rangle \text{ の係数は } \frac{M}{M+m} \text{ 倍に} \end{cases}$ なっている。

それだけに限らず、 $\begin{cases} |dP_x\rangle \wedge |dX\rangle \text{ の係数は } -\frac{M}{M+m} \text{ 倍に} \\ |dP_X\rangle \wedge |dx\rangle \text{ の係数は } -\frac{m}{M+m} \text{ 倍に} \end{cases}$ なっていること（通常はこれらの係数は 0）にも注意しよう。つまり「拘束された空間の中」では、 x と P_X (X と P_x) は Poisson 括弧

の意味で交換しない。それは当たり前で、 x と X には関係があるので、普通なら成り立つ「 x は交換するが X とは交換しない」は不合理なのだ。

以上のことでもう少しシステムチックにやる方法を、次の節で考えよう。

5.2 Dirac 括弧

拘束系での正準形式を作るための一般論を作っていく。

5.2.1 拘束された空間への射影

位相空間座標を z^I ($I = 1, 2, \dots, 2N$) とし、この空間内の拘束条件を $\Phi^\alpha(\{z^i\}) = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, M$) と書くこととする。

すべての物理量 A を $\{\Phi^\cdot\}$ に Poisson 括弧の意味で交換する」という意味で重要な部分とそれ以外に分ける。

この重要な部分を、 A^\perp という記号で表現しよう（「直交成分」である）。 A^\perp はすべての $\{\Phi^\cdot\}$ と Poisson 括弧の意味で交換する。つまり、 \mathbf{X}_Φ を掛けると 0 であり、結果として「 Φ が一定の面内で動いたときに変化しない量」である。逆に、この量 A のハミルトニアンベクトル場 \mathbf{X}_A を Φ に掛けると 0 だと言ってもよい。

$$A^\perp = A + \lambda_\alpha^\perp \Phi^\alpha \quad (5.2-1)$$

とすると、条件より

$$\{A^\perp, \Phi^\beta\}_{\text{PB}} = \{A, \Phi^\beta\}_{\text{PB}} + \underbrace{\{\lambda_\alpha^\perp, \Phi^\beta\}_{\text{PB}} \Phi^\alpha}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\lambda_\alpha^\perp \{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{\text{PB}}}_{\Delta^{\alpha\beta}} = 0 \quad (5.2-2)$$

となるようにすればよい（第 2 項は Poisson 括弧を取った後では $\Phi^\cdot = 0$ にしていいから効かない）。

ここで、

$$\Delta^{\alpha\beta} \equiv \{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{\text{PB}} \quad (5.2-3)$$

で行列 Δ を定義して、逆行列 $\Delta^{-1}_{\alpha\beta} \Delta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ で定義される逆行列をつかって、

$$\lambda_\alpha = - \{A, \Phi^\beta\}_{\text{PB}} \Delta^{-1}_{\beta\alpha} \quad (5.2-4)$$

と決まる。つまり、

$$A^\perp = A - \{A, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}} \Delta^{-1}_{\alpha\beta} \Phi^\beta \quad (5.2-5)$$

が拘束を引き抜いた物理量である。

$$(z^A)^\perp = z^A - \{z^A, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}} \Delta^{-1}_{\alpha\beta} \Phi^\beta \quad (5.2-6)$$

の微小変化を考えよう。 $\{\Phi^\cdot\}$ に比例する項は考えなくていいので、

$$\begin{aligned} d(z^A)^\perp &= dz^A - \left\{ z^A, \Phi^\alpha \right\}_{\text{PB}} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^B} dz^B \right)}_{\text{d}\Phi} \\ &= dz^A - \omega^{A\textcolor{red}{D}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^D} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^B} dz^B \right)}_{\text{d}\Phi} \end{aligned} \quad (5.2-7)$$

となる。

$$\mathcal{P}^M_Q = \delta^M_Q - \omega^{M\textcolor{red}{P}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \right)}_{\mathcal{P}^Q_N} \quad (5.2-8)$$

のように射影演算子 \mathcal{P}^M_Q を定義すると、

$$d(z^A)^\perp = \mathcal{P}^A_B dz^B \quad (5.2-9)$$

となる。

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^M_Q \quad \mathcal{P}^Q_N \\ &\left(\delta^M_Q - \omega^{M\textcolor{red}{P}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \right)}_{\mathcal{P}^Q_N} \right) \left(\delta^Q_N - \omega^{Q\textcolor{red}{R}} \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial z^R} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial z^N} \right)}_{\mathcal{P}^R_N} \right) \\ &= \delta^M_N - \omega^{M\textcolor{red}{P}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^N} \right)}_{\mathcal{P}^M_N} - \omega^{M\textcolor{red}{R}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^R} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^N} \right)}_{\mathcal{P}^M_N} + \omega^{M\textcolor{red}{P}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \right)}_{\mathcal{P}^M_N} \omega^{Q\textcolor{red}{R}} \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial z^R} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial z^N} \right)}_{\mathcal{P}^M_N} \\ &= \delta^M_N - \omega^{M\textcolor{red}{P}} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^N} \right)}_{\mathcal{P}^M_N} = \mathcal{P}^M_N \end{aligned} \quad (5.2-10)$$

となって、射影演算子の自乗は射影演算子である（これは射影演算子の定義から当然）。

5.2.2 Dirac 括弧の定義

この「拘束を引き抜いた量 A 」と別の物理量 B との Poisson 括弧を取ると、

$$\begin{aligned} \{A^\perp, B\}_{\text{PB}} &= \{A, B\}_{\text{PB}} - \underbrace{\left\{ \{A, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\Phi^\beta, B \right)_{\text{PB}}}_{\text{拘束上で } 0} \right\}}_{\text{拘束上で } 0} \\ &\quad - \{A, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\{\Phi^\beta, B\}_{\text{PB}} \right)}_{\text{拘束上で } 0} \end{aligned} \quad (5.2-11)$$

となる。この式の右辺を「 A と B の Dirac 括弧」と定義し、 $\{\ast, \ast\}_{\text{DB}}$ という記号で表すことにする。すなわち、

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} - \{A, \Phi^\alpha\}_{\text{PB}} \Delta^{-1} \underbrace{\left(\{\Phi^\beta, B\}_{\text{PB}} \right)}_{\text{拘束上で } 0} \quad (5.2-12)$$

である。

この Dirac 括弧の、 A, B のどちらに Φ^α を入れても結果は（反対側に何が入っていようと）0 である。つまりは Dirac 括弧は「 Φ^i が消された空間の中での Poisson 括弧」なのである。

別の言い方をすると、Dirac 括弧によって作られる流れ（ハミルトニアンベクトル場）は、拘束条件によって指定された「面 $\{\Phi^* = 0\}$ 」からはみ出さないよう流れになっている。

Poisson 括弧が $\{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M_N \frac{\partial B}{\partial z^N}$ であったことを思い出して

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M_N \frac{\partial B}{\partial z^N} - \frac{\partial A}{\partial z^M} \omega^M_P \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \omega^Q_N \frac{\partial B}{\partial z^N} \quad (5.2-13)$$

と書けば、

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \frac{\partial A}{\partial z^M} \Omega^M_N \frac{\partial B}{\partial z^N} \quad (5.2-14)$$

と定義したときの Ω^{MN} は

$$\begin{aligned} \Omega^{MN} &= \omega^{MN} - \omega^M_P \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \omega^Q_N \\ &= \omega^M_P \left(\delta_P^N - \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \omega^Q_N \right) = \left(\delta_Q^M - \omega^M_P \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial z^P} \Delta^{-1} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial z^Q} \right) \omega^Q_N \end{aligned} \quad (5.2-15)$$

である^{†4}。

$$\Omega^{MN} = \omega^M_P \mathcal{P}^N_P = \mathcal{P}^M_Q \omega^Q_N \quad (5.2-16)$$

に注意しよう。つまり、射影演算子が ω と交換すると転置になる。前に射影演算子が挟まるときは \mathcal{P} の後ろの脚が縮約され、後ろに射影演算子が挟まるときは \mathcal{P} の前の脚が縮約される—ということで、理屈にあってる。

5.2.3 symplectic form

射影演算子がはさまつたことからわかるように、 ω^{MN} には逆行列 ω_{MN} があるが、 Ω^{MN} には逆行列はない。 Ω_{MN} に対応するものは、symplectic form $\frac{1}{2} \omega_{AB} |dz^A \rangle \wedge |dz^B \rangle$ の $|dz^A \rangle$ の部分を $|d(z^A)^\perp \rangle = \mathcal{P}^A_B |dz^B \rangle$ に置き換えることで求めることができる。

$$\frac{1}{2} \omega_{CD} \mathcal{P}^C_A \mathcal{P}^D_B |dz^A \rangle \wedge |dz^B \rangle \quad (5.2-17)$$

となるが、(5.2-16) から出る

$$\begin{aligned} \omega_{AM} \omega^M_P \mathcal{P}^N_P \omega_N^B &= \omega_{AM} \mathcal{P}^M_Q \omega^Q_N \omega_N^B \\ \mathcal{P}^N_A \omega_N^B &= \omega_{AM} \mathcal{P}^M_B \end{aligned} \quad (5.2-18)$$

^{†4} (5.2-15) の 2 行目の \mathcal{P}^N_P と 3 行目の \mathcal{P}^M_Q は一見違うように見えるかもしれないが、 ω と Δ^{-1} の添字の反対称性を使うと同じものであることがわかる。

を使って $\omega_{CD} \overbrace{\mathcal{P}^C}_A = \omega_{AC} \overbrace{\mathcal{P}^C}_D$ として、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \omega_{CD} \overbrace{\mathcal{P}^C}_A \overbrace{\mathcal{P}^D}_B |dz^A \rangle \wedge |dz^B \rangle &= \frac{1}{2} \omega_{AC} \overbrace{\mathcal{P}^C}_D \overbrace{\mathcal{P}^D}_B |dz^A \rangle \wedge |dz^B \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\omega_{AC} \mathcal{P}^C_B}_{\Omega_{AB}} |dz^A \rangle \wedge |dz^B \rangle
 \end{aligned} \tag{5.2-19}$$

となる。symplectic form と Poisson 括弧がどちらも係数行列が単なる ω ではなく射影演算子が掛かったものに変更する必要がある。

Ω^{PQ} と Ω_{AB} の関係は

$$\omega_{AP} \Omega^{PQ} \omega_Q = \omega_{AP} \mathcal{P}^P_M \omega^{MQ} \omega_Q = \omega_{AP} \mathcal{P}^P_B = \Omega_{AB} \tag{5.2-20}$$

である (ω で上げ下げされる)。



このあたりの話は、 $\text{d}H = j$ の微分演算の逆を作ったときに似ている。拘束系の「行列が 0 でない（逆が取れない）」 ω に対しても「縮小された空間内の逆」は作れるのである。

5.3 古典力学を Dirac 括弧を使って解く例

5.3.1 定滑車

5.1.4 節で考えた定滑車の問題を Dirac 括弧を使って考えよう。行列 Δ_{ij} つまり、 $\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}_{\text{PB}}$ をまず計算する。
→ p143

Φ_β	P_T	$x + X - \ell$	$\frac{P_x}{m} + \frac{P_x}{M}$	$2g - \frac{1}{\mu}T$
Φ_α				
P_T	0	0	0	$-\frac{1}{\mu}$
$x + X - \ell$	0	0	$\frac{1}{\mu}$	0
$\frac{P_x}{m} + \frac{P_x}{M}$	0	$-\frac{1}{\mu}$	0	0
$2g - \frac{1}{\mu}T$	$\frac{1}{\mu}$	0	0	0

なので、この逆行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3-1}$$

となり、

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} + \mu \left(\begin{array}{l} \{A, \Phi_4\}_{\text{PB}} \{B, \Phi_1\}_{\text{PB}} - \{A, \Phi_3\}_{\text{PB}} \{B, \Phi_2\}_{\text{PB}} \\ + \{A, \Phi_2\}_{\text{PB}} \{B, \Phi_3\}_{\text{PB}} - \{A, \Phi_1\}_{\text{PB}} \{B, \Phi_4\}_{\text{PB}} \end{array} \right) \quad (5.3-2)$$

である。0 にならない Dirac 括弧を列挙すると、

$$\begin{aligned} \{x, P_x\}_{\text{DB}} &= \{x, P_x\}_{\text{PB}} - \mu \left\{ x, \underbrace{\frac{P_x}{m} + \frac{P_x}{M}}_{\frac{1}{m}} \right\}_{\text{PB}} \underbrace{\{x + X - \ell, P_x\}_{\text{PB}}}_1 \\ &= 1 - \frac{M\mu}{M+m} \times \frac{1}{m} = \frac{m}{M+m} \end{aligned} \quad (5.3-3)$$

$$\{x, P_x\}_{\text{DB}} = \{x, P_x\}_{\text{PB}} - \mu \left\{ x, \frac{P_x}{m} \right\}_{\text{PB}} \{X, P_x\}_{\text{PB}} = -\frac{M}{M+m} \quad (5.3-4)$$

$$\{X, P_x\}_{\text{DB}} = \{X, P_x\}_{\text{PB}} - \mu \left\{ X, \frac{P_x}{M} \right\}_{\text{PB}} \{x, P_x\}_{\text{PB}} = -\frac{m}{M+m} \quad (5.3-5)$$

$$\{X, P_x\}_{\text{DB}} = \{X, P_x\}_{\text{PB}} - \mu \left\{ X, \frac{P_x}{M} \right\}_{\text{PB}} \{X, P_x\}_{\text{PB}} = 1 - \frac{m}{M+m} = \frac{M}{M+m} \quad (5.3-6)$$

となる。 Ω^{AB} を行列で表現すると、

$$\begin{array}{ccccc} & x & X & P_x & P_X \\ x & 0 & 0 & \frac{m}{M+m} & -\frac{M}{M+m} \\ X & 0 & 0 & -\frac{m}{M+m} & \frac{M}{M+m} \\ P_x & -\frac{m}{M+m} & \frac{m}{M+m} & 0 & 0 \\ P_X & \frac{M}{M+m} & -\frac{M}{M+m} & 0 & 0 \end{array} \quad (5.3-7)$$

である。

Dirac 括弧を使って $\boxed{\frac{dz^A}{dt} = \{z^A, H\}_{\text{DB}}}$ と書くことすれば、以下のように正準方程式が出てくる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left\{ x, \frac{(P_x)^2}{2m} + \frac{(P_X)^2}{2M} \right\}_{\text{DB}} = \frac{P_x}{m} \{x, P_x\}_{\text{DB}} + \frac{P_X}{M} \{x, P_X\}_{\text{DB}} \\ &= \frac{m}{M+m} \frac{P_x}{m} - \frac{M}{M+m} \frac{P_X}{M} = \frac{1}{M+m} (P_x - P_X), \end{aligned} \quad (5.3-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \left\{ X, \frac{(P_x)^2}{2m} + \frac{(P_X)^2}{2M} \right\}_{\text{DB}} = \frac{P_x}{m} \{X, P_x\}_{\text{DB}} + \frac{P_X}{M} \{X, P_X\}_{\text{DB}} \\ &= -\frac{m}{M+m} \frac{P_x}{m} + \frac{M}{M+m} \frac{P_X}{M} = \frac{1}{M+m} (P_X - P_x), \end{aligned} \quad (5.3-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= \{P_x, -mgx - MgX\}_{\text{DB}} = -mg \{P_x, x\}_{\text{DB}} - Mg \{P_x, X\}_{\text{DB}} \\ &= \frac{m}{M+m} mg - \frac{m}{M+m} Mg = \frac{m(m-M)}{M+m} g \end{aligned} \quad (5.3-10)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_x}{dt} &= \{P_x, -mgx - MgX\}_{\text{DB}} = -mg \{P_x, x\}_{\text{DB}} - Mg \{P_x, X\}_{\text{DB}} \\
 &= -\frac{M}{M+m}mg + \frac{M}{M+m}Mg = \frac{M(M-m)}{M+m}g
 \end{aligned} \tag{5.3-11}$$

これから

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M+m}(P_x - P_x) \right) = \frac{1}{M+m} \left(\frac{m(m-M)}{M+m}g - \frac{M(M-m)}{M+m}g \right) \\
 &= \frac{M-m}{M+m} \left(-\frac{m}{M+m}g - \frac{M}{M+m}g \right) = \frac{m-M}{M+m}g
 \end{aligned} \tag{5.3-12}$$

という、正しい運動方程式 ((5.1-5)に一致) が出てくる。X の運動方程式の方は、
 \rightarrow p140

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M+m}(P_x - P_x) \right) \tag{5.3-13}$$

まで計算したところで、「 $\frac{d^2x}{dt^2}$ の反対符号」になっている（正しい）ことがわかる。

ここで、symplectic form がどうなるかを計算しておこう。T と P_T は重要でないので見ないことにすると、もともとの symplectic form は

$$|\mathrm{d}P_x\rangle \wedge |\mathrm{d}x\rangle + |\mathrm{d}P_X\rangle \wedge |\mathrm{d}X\rangle \tag{5.3-14}$$

であるが、拘束条件を使って変数をすべて \perp つきのものに置き換える。

$$\begin{aligned}
 x^\perp &= x - \left\{ x, \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right\}_{\text{PB}} \mu(x + X - \ell) \\
 &= x - \frac{\mu}{m}(x + X - \ell) = \frac{m}{M+m}x - \frac{M}{M+m}X + \frac{M}{M+m}\ell
 \end{aligned} \tag{5.3-15}$$

$$\begin{aligned}
 X^\perp &= X - \left\{ X, \frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right\}_{\text{PB}} \mu(x + X - \ell) \\
 &= X - \frac{\mu}{M}(x + X - \ell) = \frac{M}{M+m}X - \frac{m}{M+m}x + \frac{m}{M+m}\ell
 \end{aligned} \tag{5.3-16}$$

$$\begin{aligned}
 (P_x)^\perp &= P_x + \{P_x, x + X - \ell\}_{\text{PB}} \mu \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right) \\
 &= P_x - \mu \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right) = \frac{m}{M+m}(P_x - P_X)
 \end{aligned} \tag{5.3-17}$$

$$\begin{aligned}
 (P_X)^\perp &= P_X + \{P_X, x + X - \ell\}_{\text{PB}} \mu \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right) \\
 &= P_X - \mu \left(\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M} \right) = \frac{M}{M+m}(P_X - P_x)
 \end{aligned} \tag{5.3-18}$$

となる。



この式を作る時の気持ちは、

- x, X については $\frac{P_x}{m} + \frac{P_X}{M}$ と (Poisson 括弧の意味で) 交換するように $x : X$ を $m : -M$ でブレンドする。

- P_x, P_X については、 $x + X - \ell$ と (Poisson 括弧の意味で) 交換するように、 $P_x : P_X$ を $1 : -1$ でブレンドする。

と思えばよい。

これで「拘束と直交する位相空間座標 $(z^A)^\perp$ 」が作れたので、 $(z^A)^\perp$ による symplectic form を作ってみよう。

$$\begin{aligned}
 & |\mathrm{d}(P_x)^\perp\rangle \wedge |\mathrm{d}x^\perp\rangle + |\mathrm{d}(P_X)^\perp\rangle \wedge |\mathrm{d}X^\perp\rangle \\
 &= \left(\frac{m(|\mathrm{d}P_x\rangle - |\mathrm{d}P_X\rangle)}{M+m} \right) \wedge \left(\frac{m|\mathrm{d}x\rangle - M|\mathrm{d}X\rangle}{M+m} \right) \\
 &+ \left(\frac{M(|\mathrm{d}P_X\rangle - |\mathrm{d}P_x\rangle)}{M+m} \right) \wedge \left(\frac{M|\mathrm{d}X\rangle - m|\mathrm{d}x\rangle}{M+m} \right) \\
 &= \frac{1}{(M+m)^2} (m(|\mathrm{d}P_x\rangle - |\mathrm{d}P_X\rangle) \wedge (m|\mathrm{d}x\rangle - M|\mathrm{d}X\rangle)) \\
 &+ \frac{1}{(M+m)^2} (M(|\mathrm{d}P_X\rangle - |\mathrm{d}P_x\rangle) \wedge (M|\mathrm{d}X\rangle - m|\mathrm{d}x\rangle)) \\
 &= \frac{1}{(M+m)^2} \left(\begin{array}{l} (m^2 + Mm)|\mathrm{d}P_x\rangle \wedge |\mathrm{d}x\rangle + (-Mm - M^2)|\mathrm{d}P_x\rangle \wedge |\mathrm{d}X\rangle \\ + (-m^2 - Mm)|\mathrm{d}P_X\rangle \wedge |\mathrm{d}x\rangle + (Mm + M^2)|\mathrm{d}P_X\rangle \wedge |\mathrm{d}X\rangle \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{M+m} (m|\mathrm{d}P_x\rangle \wedge |\mathrm{d}x\rangle - M|\mathrm{d}P_x\rangle \wedge |\mathrm{d}X\rangle - m|\mathrm{d}P_X\rangle \wedge |\mathrm{d}x\rangle + M|\mathrm{d}P_X\rangle \wedge |\mathrm{d}X\rangle) \tag{5.3-19}
 \end{aligned}$$

これで行列 $\Omega_{AB} = \omega_{AC} \overset{\text{C}}{P} \overset{\text{B}}{B}$ を求める ことができる ので、 ω^{**} を前後から挟んで $\Omega^{AB} = P^A \overset{\text{C}}{\omega} \overset{\text{B}}{B}$ を計算することで Poisson 括弧がわかる。ちなみにこの場合の行列 Ω_{AB} は

$$\begin{array}{ccccc}
 & x & X & P_x & P_X \\
 \begin{matrix} x \\ X \\ P_x \\ P_X \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -\frac{m}{M+m} & \frac{m}{M+m} \\ 0 & 0 & \frac{M}{M+m} & -\frac{M}{M+m} \\ \frac{m}{M+m} & -\frac{M}{M+m} & 0 & 0 \\ -\frac{m}{M+m} & \frac{M}{M+m} & 0 & 0 \end{array} \right) & & & \tag{5.3-20}
 \end{array}$$

である。^{→ p153} (5.3-7)と位置関係が違うのだが、これは上に書いた Ω^{AB} と Ω_{AB} の違いのためである。上の式の Ω_{AB} の前後に ω^{**} 挾んで計算すれば

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix} \tag{5.3-21}$$

のように変換され(5.3-7)に一致する (今のは $a = d = 0$)。要は「Dirac 括弧を作る」という計算と「縮小された symplectic form を作る」という計算は同じことをやっているのである。^{→ p153}



【問い合わせ】ここでやった「定滑車」の系と同様の計算を「動滑車」の系で行え（設定は適宜自由に決めてよい）。

5.3.2 円周上に拘束された質点

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \lambda (x^2 + y^2 - R^2) \quad (5.3-22)$$

からハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} ((P_x)^2 + (P_y)^2) + \lambda (x^2 + y^2 - R^2) + \Lambda P_\lambda \quad (5.3-23)$$

として、拘束が

$$P_\lambda = 0 \quad (5.3-24)$$

$$-x^2 - y^2 + R^2 = 0 \quad (5.3-25)$$

$$-2 \frac{xP_x + yP_y}{m} = 0 \quad (5.3-26)$$

$$-2 \frac{(P_x)^2 + (P_y)^2}{m^2} - 4 \frac{\lambda(x^2 + y^2)}{m} = 0 \quad (5.3-27)$$

のようになってくるので、

$$\Phi^1 = P_\lambda, \quad \Phi^2 = x^2 + y^2 - R^2, \quad \Phi^3 = xP_x + yP_y, \quad \Phi^4 = (P_x)^2 + (P_y)^2 + 2m\lambda R^2 \quad (5.3-28)$$

と組み直す。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 & \Phi^4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -2mR^2 \\ 0 & 0 & 2R^2 & 0 \\ 0 & -2R^2 & 0 & 0 \\ 2mR^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad (5.3-29)$$

この逆行列は

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2mR^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2R^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2mR^2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.3-30)$$

となる。 $x^1 = x, x^2 = y, P_1 = P_x, P_2 = P_y$ として (λ, P_λ に関する部分は無視して) Dirac 括弧を書くと、

$$\begin{aligned}\{A, B\}_{\text{DB}} &= \{A, B\}_{\text{PB}} + \{A, x^2 + y^2\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{xP_x + yP_y, B\}_{\text{PB}} \\ &\quad - \{A, xP_x + yP_y\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{x^2 + y^2, B\}_{\text{PB}}\end{aligned}\quad (5.3-31)$$

となる (Poisson 括弧の中の R^2 は関係ないので省略した)。 A, B が x, P である場合を計算しておこうと、

$$\{x^i, x^j\}_{\text{DB}} = 0 \quad (5.3-32)$$

$$\{x^i, P_j\}_{\text{DB}} = \delta^i_j - x^i \frac{1}{2R^2} \times 2x_j = \delta^i_j - \frac{x^i x_j}{R^2} \quad (5.3-33)$$

$$\{P_i, P_j\}_{\text{DB}} = -2x_i \frac{1}{2R^2} P_j + P_i \frac{1}{2R^2} \times 2x_j = \frac{-x_i P_j + x_j P_i}{R^2} \quad (5.3-34)$$

である。

拘束との Dirac 括弧が 0 になることを確認しておこう。

$$\{x^i \overset{\text{blue}}{\cancel{x^i}} - R^2, P_j\}_{\text{DB}} = 2x^i \left(\delta^i_j - \frac{x^i x_j}{R^2} \right) = 2x_j - 2 \frac{x^i x^i x_j}{R^2} = 0 \quad (5.3-35)$$

$$\{x^i \overset{\text{blue}}{\cancel{P_i}}, x^j\}_{\text{DB}} = -x^i \left(\delta^i_j - \frac{x^i x_j}{R^2} \right) = 0 \quad (5.3-36)$$

$$\{x^i \overset{\text{blue}}{\cancel{P_i}}, P_j\}_{\text{DB}} = \left(\delta^i_j - \frac{x^i x_j}{R^2} \right) P_i + x^i \left(\frac{-x^i P_j + x^j P_i}{R^2} \right) = P_j - \frac{x^i x^i}{R^2} P_j = 0 \quad (5.3-37)$$

となって、確かに 0 になっている。

正準方程式は

$$\dot{x}^i = \left\{ x^i, \frac{P_i P^i}{2m} \right\}_{\text{DB}} = \frac{P_i}{m} - \frac{x^i x^j P_j}{R^2} = \frac{P_i}{m} \quad (5.3-38)$$

$$\dot{P}_i = \left\{ P_i, \frac{P_j P^j}{2m} \right\}_{\text{DB}} = \frac{1}{m} \frac{-x^i P_j + x^j P_i}{R^2} = -\frac{P_i P^i}{m R^2} x^i \quad (5.3-39)$$

となり、

$$m \ddot{x}^i = -\frac{mv^2}{R} \frac{x^i}{R} \quad (5.3-40)$$

という円運動の運動方程式が出る。後ろについている $\frac{x^i}{R}$ が「動径方向の単位ベクトル」で、 $\frac{mv^2}{R}$ が「遠心力の大きさ」を表している (ごもっともな結果だ)。

symplectic form は (λ 部分は省略して) $\langle dP_i \rangle \wedge \langle dx^i \rangle$ であるが、拘束により射影された空間内では、(5.2-7) $\rightarrow p_{150}$ $d(z^A)^\perp = dz^A - \omega^A \frac{\partial \Phi^i}{\partial z^B} \Delta^{-1} \frac{\partial \Phi^j}{\partial z^B} dz^B$ によって置き換えられる。

$$d(x^i)^\perp = dx^i - \frac{\partial(xP_x + yP_y)}{\partial P_i} \frac{1}{2R^2} \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x^j} dx^j$$

$$= dx^i - \frac{x_i x_j}{R^2} dx^j = \mathcal{P}^i_j dx^j \quad (5.3-41)$$

$$\begin{aligned} d(P_i)^\perp &= dP_i + \frac{\partial(xP_x + yP_y)}{\partial x_i} \frac{1}{2R^2} \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x^j} dx^j \\ &\quad - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x_i} \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial(xP_x + yP_y)}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial(xP_x + yP_y)}{\partial P_j} dP_j \right) \\ &= dP_i + \frac{P_i x_j}{R^2} dx^j - \frac{x_i}{R^2} (P_j dx^j + x^j dP_j) \\ &= \mathcal{P}_i^j dP_j + \frac{x_j P_i - x_i P_j}{R^2} dx^j \end{aligned} \quad (5.3-42)$$

と計算できる ($\mathcal{P}^i_j = \delta^i_j - \frac{x^i x_j}{R^2}$ という射影演算子を定義した)。

この射影演算子の自乗が射影演算子に戻ることを考慮して計算すると、

$$|d(P_i)^\perp \rangle \langle d(x^i)^\perp| = \mathcal{P}^i_j |dP_j \rangle \langle dx^j| - \frac{x_j P_i - x_i P_j}{R^2} |dx^i \rangle \langle dx^j| \quad (5.3-43)$$

となる^{†5}。

(5.3-21)で計算したように $\omega \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}$ なので、(5.3-43) の symplectic form から、
 $\{x^i, P_j\}_{\text{DB}} = \mathcal{P}^i_j$ と $\{P_i, P_j\}_{\text{DB}} = \frac{x_j P_i - x_i P_j}{R^2}$ がわかる。

5.4 光円錐時間の場の理論と拘束系

 少し非自明な「拘束のある理論」として「光円錐時間での Klein-Gordon 場」を考えておこう。

Klein-Gordon 場は通常の時間座標を使う場合は全く拘束系ではない（シンプルに、調和振動子の集団である）。しかし、光円錐時間 $x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1)$ を使う^{†6}と拘束系になる。光円錐座標は

座標を（空間座標の一つとして $x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1)$ も使って） x^+, x^-, x^2, x^3 と考える。この座標で Minkowski 空間の 4 元ベクトルの長さの自乗を考えると

$$V^2 = \underbrace{-(V^0)^2 + (V^1)^2}_{-(V^0 + V^1)(V^0 - V^1)} + (V^2)^2 + (V^3)^2 = -2V^+V^- + \underbrace{(V^2)^2 + (V^3)^2}_{(V^\perp)^2} \quad (5.4-1)$$

となる。土成分の計量が非対角になるところが面白い。この非対角性のため、 $V^\pm = -V_\mp$ である。ゆえに Klein-Gordon 場のラグランジアン密度は

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \partial_+ \phi \partial_- \phi - \frac{1}{2} \partial_{\mu_\perp} \phi \partial^{\mu_\perp} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.4-2)$$

^{†5} 第 2 項に射影演算子がかかるのは、係数 $\frac{x_j P_i - x_i P_j}{R^2}$ が「 x^i を掛けると 0」という性質をすでに持っている（射影演算子を内包している）からである。

^{†6} light-cone quantization または light-front quantization と呼ばれる。Review は、たとえば [11] を見よ。

となる。添字 μ^\perp は \pm 成分以外の和を示す。

通常の時間では

$$((\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2) \phi + m^2 \phi = 0 \quad (5.4-3)$$

である Klein-Gordon 方程式は

$$2\partial_+\partial_-\phi - \partial_\perp\partial_\perp\phi + m^2\phi = 0 \quad (5.4-4)$$

となる（これが時間 x^+ に関して一階微分方程式なのが味噌である）。



なお、これは $-i\partial_i$ が運動量 p_i に翻訳されるというルールによれば、on-shell 条件が

$$-2p^+p^- + (p_\perp)^2 + m^2 = 0 \quad (5.4-5)$$

になるということで、つまりは

$$p^- = \frac{(p_\perp)^2 + m^2}{2p^+} \quad (5.4-6)$$

になる。通常の on-shell 条件

$$-(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 + m^2 \quad (5.4-7)$$

から出るエネルギーの式は

$$p^0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (5.4-8)$$

となる。光円錐時間では複号が出ないという点が大きく違う。通常の場合、運動量 \vec{p} を決めてもエネルギーは正負の二つがある（これは量子場の理論にいくと生成／消滅演算子があるということ）。光円錐時間では、運動量 p^+, p_\perp を決めればエネルギーは一つに決まる。これは

$\begin{cases} p^+ \text{ が負なら消滅演算子} \\ p^+ \text{ が正なら生成演算子} \end{cases}$ と「役割分担」されているということ（この意味で光円錐時間の

Klein-Gordon はシュレーディンガー場の近い）。光円錐時間を使うとこの点が非常に問題を簡単にしてくれる。

今、 $\partial_+\phi$ が「時間微分」なので、場に対する運動量は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi)} = \partial_-\phi \quad (5.4-9)$$

となる。これで、「光円錐時間での Klein-Gordon 場」が拘束系になる。拘束は

$$\Phi = \pi - \partial_-\phi = 0 \quad (5.4-10)$$

である。微分はうざいので

$$\phi(p^+, p^\perp) = \frac{1}{L^{3/2}} \int_0^L dx^- \int_0^L dx^2 \int_0^L dx^3 \phi(x^-, x^\perp) e^{-i(-p^+ x^- + p^\perp x^\perp)} \quad (5.4-11)$$

$$\phi(x^-, x^\perp) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{p^+, p^\perp} \phi(p^+, p^\perp) e^{i(-p^+ x^- + p^\perp x^\perp)} \quad (5.4-12)$$

とフーリエ変換して考えよう。 x^-, x^\perp に関しては周期 L の箱に閉じ込めて周期境界条件を置いたものとして考える。 π も同様にフーリエ変換して、

$$\Phi(p^+, p^\perp) = \pi(p^+, p^\perp) + i p^+ \phi(p^+, p^\perp) \quad (5.4-13)$$

を拘束と考える。

Poisson 括弧は

$$\{\phi(p^+, p^\perp), \pi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} = \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp} \quad \text{それ以外は } 0 \quad (5.4-14)$$

となる（ここから、時刻 x^+ は同一にそろえてある）。

拘束同士の Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} & \{\Phi(p^+, p^\perp), \Phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} \\ &= \{\pi(p^+, p^\perp), i q^+ \phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} + \{i p^+ \phi(p^+, p^\perp), \pi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} \\ &= i(p^+ - q^+) \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp} = 2 i p^+ \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp} \end{aligned} \quad (5.4-15)$$

となる。 $p^+ = 0$ の部分（0-mode と呼ぶ）を除くとこの「Poisson 括弧の行列」に Dirac 括弧にはこの「逆」である $\frac{1}{i p^+}$ が入る（これは non-local な量になる）。

とりあえず $p^+ = 0$ のことは忘れておいて Dirac 括弧を計算すると

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} + \sum_{r^+, r^\perp} \{A, \Phi(r^+, r^\perp)\}_{\text{PB}} \frac{1}{2i r^+} \{\Phi(-r^+, -r^\perp), B\}_{\text{PB}} \quad (5.4-16)$$

となる。確認しておくと、 B に $\Phi(q^+, q^\perp)$ を代入した結果が

$$\begin{aligned} & \{A, \Phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{DB}} \\ &= \{A, \Phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} + \sum_{r^+, r^\perp} \{A, \Phi(r^+, r^\perp)\}_{\text{PB}} \frac{1}{2i r^+} \underbrace{\{\Phi(-r^+, -r^\perp), \Phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}}}_{-2i r^+ \delta_{-r^+ + q^+} \delta_{-r^\perp + q^\perp}} \\ &= \{A, \Phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}} - \sum_{r^+, r^\perp} \{A, \Phi(r^+, r^\perp)\}_{\text{PB}} \delta_{-r^+ + q^+} \delta_{-r^\perp + q^\perp} = 0 \end{aligned} \quad (5.4-17)$$

となり、うまく拘束が取り除けていることがわかる。これで ϕ どうしの Dirac 括弧は

$$\begin{aligned} & \{\phi(p^+, p^\perp), \phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{DB}} \\ &= \underbrace{\{\phi(p^+, p^\perp), \phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{PB}}}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r^+, r^\perp} \underbrace{\{\phi(p^+, p^\perp), \Phi(r^+, r^\perp)\}}_{\delta_{p^+ + r^+} \delta_{p^\perp + r^\perp}} \frac{1}{2i r^+} \underbrace{\{\Phi(-r^+, -r^\perp), \phi(q^+, q^\perp)\}}_{-\delta_{-r^+ + q^+} \delta_{-r^\perp + q^\perp}}_{\text{PB}} \\
& = \frac{1}{2ip^+} \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp}
\end{aligned} \tag{5.4-18}$$

となる。

$$\begin{aligned}
& \{\phi(p^+, p^\perp), \pi(q^+, q^\perp)\}_{\text{DB}} = \{\phi(p^+, p^\perp), -iq^+ \phi(q^+, q^\perp)\}_{\text{DB}} \\
& = -iq^+ \times \left(\frac{1}{2ip^+} \right) \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp} = \frac{1}{2} \delta_{p^+ + q^+} \delta_{p^\perp + q^\perp}
\end{aligned} \tag{5.4-19}$$

となって、Poisson 括弧の半分になっている。

p -表示で書いたラグランジアンは

$$\sum_{p^+, p^\perp} \left(ip^+ \partial_+ \phi(p^+, p^\perp) \phi(-p^+, -p^\perp) - \frac{1}{2} ((p^\perp)^2 + m^2) \phi(p^+, p^\perp) \phi(-p^+, -p^\perp) \right) \tag{5.4-20}$$

となり、ハミルトニアンは

$$\sum_{p^+, p^\perp} \left(\frac{1}{2} ((p^\perp)^2 + m^2) \phi(p^+, p^\perp) \phi(-p^+, -p^\perp) \right) \tag{5.4-21}$$

である。これから時間発展を考えると

$$\begin{aligned}
\partial_+ \phi(p^+, p^\perp) &= \{\phi(p^+, p^\perp), H\}_{\text{DB}} \\
&= \left\{ \phi(p^+, p^\perp), \frac{1}{2} \sum_{r^+, r^\perp} ((r^\perp)^2 + m^2) \phi(r^+, r^\perp) \phi(-r^+, -r^\perp) \right\}_{\text{DB}} \\
&= \sum_{r^+, r^\perp} ((r^\perp)^2 + m^2) \{\phi(p^+, p^\perp), \phi(r^+, r^\perp)\}_{\text{DB}} \phi(-r^+, -r^\perp) \\
&= \frac{(p^\perp)^2 + m^2}{2ip^+} \phi(p^+, p^\perp)
\end{aligned} \tag{5.4-22}$$

つまり $2ip^+ \partial_+ \phi(p^+, p^\perp) = ((p^\perp)^2 + m^2) \phi(p^+, p^\perp)$ であり、これは x -表示に持っていくと (5.4-4) に → p159 なる。

光円錐時間による Klein-Gordon 場は、運動量に時間微分が含まれないことと運動方程式が時間微分の一階である点でフェルミオンに似ていて、結果も「場の Dirac 括弧が Poisson 括弧の $\frac{1}{2}$ になる」あたりも似ている。

あえて忘れていた 0-mode に戻ろう。0-mode はハミルトニアンの中に、

$$\sum_{p^\perp} \left(\frac{1}{2} ((p^\perp)^2 + m^2) \phi(0, p^\perp) \phi(0, -p^\perp) \right) \tag{5.4-23}$$

という形で入っている（作用の第1項の部分は p^+ に比例しているので効かない）。0-mode に対する primary constraint は $\pi(0, p^\perp) = 0$ なので、これに対する secondary は $((p^\perp)^2 + m^2) \phi(0, p^\perp) = 0$ つ

まりは $\phi(0, p^\perp) = 0$ であって、primary と secondary が交換しないので 2nd-class となり、これで消える。

相互作用が入っているところはいかない。ハミルトニアンが $V(\phi)$ (たとえば $\frac{g}{3!}\phi^3$ のような形など) を含んでいると、secondary は

$$((p^\perp)^2 + m^2) \phi(0, p^\perp) + \frac{\partial V}{\partial \phi(0, -p^\perp)} = 0 \quad (5.4-24)$$

になる。これが含まれた場合の Dirac 括弧は少々複雑になる (何より、括弧の中に定数ではなく ϕ が含まれる上に、その「逆行列」が要る)、ここでは上の式を使って

$$\phi(0, p^\perp) = -\frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2} \frac{\partial V}{\partial \phi(0, -p^\perp)} \quad (5.4-25)$$

と 0-mode を消去してしまうとどうなるかについてだけ述べよう。ハミルトニアンには(5.4-23)の他に、
→ p161

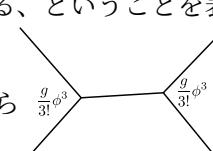
$$V(\phi) = \underbrace{V(\phi)}_{\substack{\text{no 0-mode}}} + \sum_{p^\perp} \phi(0, p^\perp) \frac{\partial V}{\partial \phi(0, p^\perp)} + \dots \quad (5.4-26)$$

のように 0-mode が含まれている (2 次以上は無視)。これも含めてハミルトニアンへの 0-mode の寄与を計算すると、

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\frac{1}{2} ((p^\perp)^2 + m^2) \left(-\frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2} \frac{\partial V}{\partial \phi(0, -p^\perp)} \right) \left(-\frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2} \frac{\partial V}{\partial \phi(0, p^\perp)} \right) \right)}_{\substack{\text{運動項から} \\ \text{相互作用項から}}} \\ & + \underbrace{\left(-\frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2} \frac{\partial V}{\partial \phi(0, -p^\perp)} \right) \frac{\partial V}{\partial \phi(0, p^\perp)} + \dots} \\ & = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi(0, -p^\perp)} \right) \frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi(0, p^\perp)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.4-27)$$

となる。

ここで 0-mode は消去された \dots のだが、よく見るとここに現れている $\frac{1}{(p^\perp)^2 + m^2}$ は、0-mode に対するグリーン関数 (プロパゲータ) である。つまり、2つの相互作用項の 0-mode 微分 $\frac{\partial V}{\partial \phi_0}$ の間を、0-mode が伝播している、ということを表現しているのが上の相互作用ハミルトニアンなの

である。たとえば ϕ^3 理論なら  のようなファインマン図を書いて相互作用を記述

することがあるが、この「内線」が 0-mode である場合を表しているのが (5.4-27) なのである。

こうして、拘束条件で消え去ったと思われた 0-mode はちゃんと内線として生きている (完全に死んでしまうと Lorentz 不変性がやばい)。なお、この 0-mode の、 ϕ^3 の場合の量子論については [12] 参照。

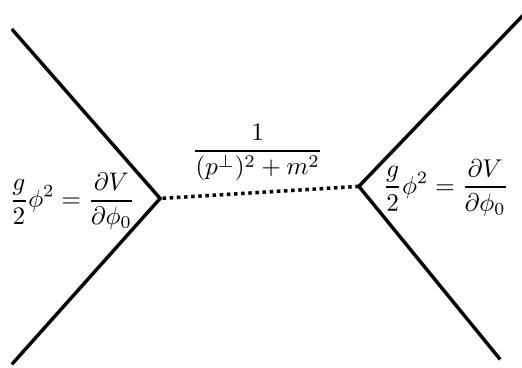


図 5-6 0-mode が「伝播」しているファインマン図
 $V = \frac{g}{3!} \phi^3$ の場合

第6章 グラスマン奇座標の正準形式

6.1 グラスマン偶奇性

場の理論に入ると我々は必然的にフェルミ粒子に出会い、「グラスマン奇 (Grassmann odd)」な量を扱う。そのときのためにここでグラスマン奇な量を使った解析力学を（自由度の小さい系で）考えておこう。

以下で「グラスマン奇な量」を考える。グラスマン奇な量は、二つの互いに独立な量を交換すると符号が反転する。つまり、 $AB = -BA$ が成り立つという、非常識な数である。これに対して通常の $AB = BA$ が成り立つ量は「グラスマン偶 (Grassmann even)」であるという。ある量がグラスマン奇かグラスマン偶かを「グラスマン偶奇性」と呼ぶ。

グラスマン奇な量 A は $A^2 = 0$ となるので、 A の関数 $f(A)$ をテイラー展開すると $f(A) = f_0 + f_1 A$ で終わる。ここで f 全体がグラスマン偶なら、 f_0 は偶で f_1 は奇である (f がグラスマン奇ならこの逆)。

以下で「この量 A がグラスマン偶かグラスマン奇か」で式の符号が変わることがある。そのことを表現する記号として $(-)^A$ を使う。 $(-)$ の上に乗っている A は

物理量 A がグラスマン偶なら $A = 0$ である。 $(-)^{AB}$ という量は、
物理量 A がグラスマン奇なら $A = 1$
物理量 A, B がともにグラスマン奇なら $(-)^{AB} = -1$ となる (A, B のどちらかが
物理量 A, B のどちらかまたは両方がグラスマン偶なら $(-)^{AB} = 1$
グラスマン偶なら、 $(-)^{AB}$ の肩の A, B はどちらかが 0)。この記号を使えば

$$AB = (-)^{AB} BA \quad (6.1-1)$$

となる。

なお、 $(-)^{x^i}$ や $(-)^{p^j}$ はそれぞれ $(-)^i, (-)^j$ と略記することにする。座標 $\{x^i, p^i\}$ があるとき、

$$x^i x^j = (-)^{ij} x^j x^i, \quad x^i p^j = (-)^{ij} p^j x^i, \quad p^i p^j = (-)^{ij} p^j p^i \quad (6.1-2)$$

である。

$(-)$ の肩に現れる A は 0 か 1 かのどちらかしかないので、 $(-)^{2A} = 1$ で $(-)^{-A} = (-)^A$ だし $(-)^{A^2} = (-)^A$ である。

6.2 左微分と右微分

グラスマン奇な座標を使って正準形式をつくるとき、実は運動量の定義の時点で悩みが発生する。 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ を計算する時「微分は左からか右からか」という問題が出てくるのである。グラスマン奇な量 A と B の積を A で微分するとき、

$$\frac{\vec{\partial}(AB)}{\partial A} = B \quad \frac{\vec{\partial}(AB)}{\partial B} = -A \quad (6.2-1)$$

$$\frac{(AB)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial A} = -B \quad \frac{(AB)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial B} = A \quad (6.2-2)$$

の 2 通りの微分が考えられる。



微分というのは $x \rightarrow x + \delta x$ と変化したときの変化量である $f(x + \delta x) - f(x)$ の「 δx の係数（微係数）」だが、

$\left\{ \begin{array}{l} f(x + \delta x) - f(x) = (\text{右微分微係数})\delta x \\ f(x + \delta x) - f(x) = \delta x (\text{左微分微係数}) \end{array} \right.$ としてから係数を考えると右微分 が得られる。
 $\left\{ \begin{array}{l} f(x + \delta x) - f(x) = (\text{右微分微係数})\delta x \\ f(x + \delta x) - f(x) = (\text{左微分微係数})\delta x \end{array} \right.$ としてから係数を考えると左微分

$\frac{\vec{\partial}(\ast)}{\partial x}$ は左微分の記号、 $\frac{(\ast)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}$ は右微分の（本講義のみの）記号である。

$$\frac{\vec{\partial}(ABC)}{\partial B} = (-)^{AB} AC, \quad \frac{(ABC)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial B} = (-)^{BC} AC \quad (6.2-3)$$

なので、

$$\frac{\vec{\partial}(ABC)}{\partial B} = (-)^{B(A+C)} \frac{(ABC)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial B} \quad (6.2-4)$$

が成り立つ。微分される量を $\phi = ABC$ と置くと

$$\frac{\vec{\partial}(\phi)}{\partial B} = (-)^{B(\phi-B)} \frac{(\phi)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial B} = (-)^{B(\phi+1)} \frac{(\phi)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial B} \quad (6.2-5)$$

となる（ $(-)^{B^2} = (-)^B$ を使った）。つまり、左微分と右微分が逆符号になるのは、微分する量 B がグラスマン奇で、微分される量 ϕ がグラスマン偶であるときに限る。この後「微分される量」になるラグランジアンやハミルトニアンはグラスマン偶なので、この点に注意が必要である。

$p = \frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}}$ をもって定義としたとしよう。そのとき、ラグランジアンとハミルトニアンの関係を $L = p\dot{x} - H$ としておくと、運動方程式の形を変えずにする。

ラグランジアンとハミルトニアンの関係式 $L = p\dot{x} - H$ は、 x, p を独立変数として書くなら

$$\underbrace{L(x, \dot{x})}_{\dot{x} = \dot{x}(x, p)} = p\dot{x}(x, p) - H(x, p) \quad (6.2-6)$$

であり^{†1}、 x, \dot{x} を独立変数として書くなら

$$L(x, \dot{x}) = p(x, \dot{x})\dot{x} - \underbrace{H(x, p)}_{p=p(x, \dot{x})} \quad (6.2-7)$$

と書かれる。それぞれの微分を考える。 \rightarrow p165 (6.2-6)を p を一定にして x で右微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{(L(x, \dot{x}(x, p)))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} &= p \frac{(\dot{x}(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} - \frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} \\ \underbrace{\frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} + \underbrace{\frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} \frac{(\dot{x}(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} &= p \frac{(\dot{x}(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} - \frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} \\ \underbrace{\frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} &= - \frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.2-8)$$

となる。 $\underbrace{\frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)}$ は、「 x, \dot{x} の関数である $L(x, \dot{x})$ の、 x による微分が終了した後で \dot{x} に $\dot{x}(x, p)$ を代入する」操作の結果を表している。この微分は、 $L(x, \dot{x}(x, p))$ の「 $\dot{x}(x, p)$ の中の x 」を微分しない。

(6.2-6)を x を一定にして p で左微分すると、
 \rightarrow p165

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\vec{\partial}(L(x, \dot{x}))}{\partial \dot{x}} \frac{\vec{\partial}(\dot{x}(x, p))}{\partial p}}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)} &= \dot{x}(x, p) - p \frac{\vec{\partial}(\dot{x}(x, p))}{\partial p} - \frac{\vec{\partial}(H(x, p))}{\partial p} \\ 0 &= \dot{x}(x, p) - \frac{\vec{\partial}(H(x, p))}{\partial p} \end{aligned} \quad (6.2-9)$$

(6.2-7)を x を一定にして \dot{x} で右微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} &= p(x, \dot{x}) - \frac{(p(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \underbrace{\frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p} \frac{(p(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}}}_{p=p(x, \dot{x})} \\ 0 &= - \frac{(p(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} \left(\dot{x} + \underbrace{\frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p}}_{p=p(x, \dot{x})} \right) \\ 0 &= \dot{x} - \underbrace{\frac{\vec{\partial}(H(x, p))}{\partial p}}_{p=p(x, \dot{x})} \end{aligned} \quad (6.2-10)$$

^{†1} L は x, \dot{x} の関数であり、 \dot{x} が x, p の関数であるという状況は、多くの場合 $L(x, \dot{x}(x, p))$ と書かれるが、このあと微分を行うので、少し丁寧に「 $L(x, \dot{x})$ の \dot{x} に $\dot{x}(x, p)$ という x, p の関数を代入した」結果を $\underbrace{L(x, \dot{x})}_{\dot{x}=\dot{x}(x, p)}$ と書いておくことにする。

(6.2-7) を \dot{x} を一定にして x で右微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} &= -\frac{(p(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} \dot{x} - \frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} - \underbrace{\frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p} \frac{(p(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}}_{p=p(x, \dot{x})} \\ \frac{(L(x, \dot{x}))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} &= -\frac{(H(x, p))\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x}\end{aligned}\quad (6.2-11)$$

となり、正しい式が出る^{†2}。よって以下も「 x, \dot{x} 微分は右から、 p 微分は左から」という順序で微分を行っていくことにする。

6.3 グラスマン奇座標の調和振動子の例

x, y という座標がグラスマン奇な座標だとして、

$$L = ix\dot{x} + iy\dot{y} - 2i\omega xy \quad (6.3-1)$$

という系を考えよう。ここで $x\dot{x}$ は $\frac{1}{2}x^2$ を微分したものではないことに注意。 $\frac{1}{2}x^2$ を微分したなら結果は $\frac{1}{2}(\dot{x}x + x\dot{x})$ になるが、これは x と \dot{x} が反交換することを考えると 0 なのである（というより、 x^2 の時点では 0 である）。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} \right) = -i\dot{x} + 2i\omega y - \frac{d}{dt} (ix) = 0 \quad (6.3-2)$$

$$\frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{y}} \right) = -i\dot{y} - 2i\omega x - \frac{d}{dt} (iy) = 0 \quad (6.3-3)$$

より、

$$\dot{x} = \omega y \quad (6.3-4)$$

$$\dot{y} = -\omega x \quad (6.3-5)$$

という連立方程式となり、これは

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (6.3-6)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (6.3-7)$$

となって調和振動子が 2 個あるのと同じになる。

正準形式に移行しようとすると、

$$P_x = \frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{x}} = ix, \quad P_y = \frac{(L)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial \dot{y}} = iy \quad (6.3-8)$$

^{†2} このようにしない場合は符号が違う。

となって運動量は座標の時間微分で表せず、拘束条件となる（必然的に Dirac 括弧の出番となる）。

Dirac 括弧で量子化するためにまず Poisson 括弧の行列を計算すると

$$\begin{bmatrix} \{P_x - ix, P_x - ix\}_{\text{PB}} & \{P_x - ix, P_y - iy\}_{\text{PB}} \\ \{P_y - iy, P_x - ix\}_{\text{PB}} & \{P_y - iy, P_y - iy\}_{\text{PB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \quad (6.3-9)$$

となる^{†3}ので、この逆行列は $\begin{bmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$ であり、

$$\{x, x\}_{\text{DB}} = \{x, x\}_{\text{PB}} - \{x, P_x - ix\}_{\text{PB}} \times \left(\frac{i}{2}\right) \{P_x - ix, x\}_{\text{PB}} = -\frac{i}{2} \quad (6.3-10)$$

となる。因子 $\frac{1}{2}$ がつくことに注意。拘束の存在により $x = -iP_x$ なので、これは

$$\{x, P_x\}_{\text{DB}} = \{P_x, x\}_{\text{DB}} = \frac{1}{2} \quad (6.3-11)$$

をも意味する。同様に、 $\{P_x, P_x\}_{\text{DB}} = \frac{1}{2}$ となる。 y, P_y についても同様である。ハミルトニアンは

$$H = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} - i(x \dot{x} + y \dot{y} - 2\omega xy) = 2i\omega xy \quad (6.3-12)$$

であり、

$$\dot{x} = \{x, H\}_{\text{DB}} = -2i\omega \{x, x\}_{\text{DB}} y = \omega y \quad (6.3-13)$$

$$\dot{y} = \{y, H\}_{\text{DB}} = 2ix\omega \{y, y\}_{\text{DB}} = -\omega x \quad (6.3-14)$$

となり、運動方程式が再現される。拘束があるため、一件自由度 4 にみえる位相空間は、自由度 2 の空間である。この運動方程式の解は、

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (6.3-15)$$

$$y = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.3-16)$$

となる (\dot{y} が ωx に等しくならなくてはいけないことから、一方が \sin ならもう一方は \cos)。ここで A がグラスマン奇な係数であることに注意。

この方程式を組み合わせると、

$$\frac{d}{dt} (x \pm iy) = \mp i\omega (x \pm iy) \quad (6.3-17)$$

ができる。 $\psi = x + iy$ と定義しておくことにすると、

$$\psi^\dagger \psi = (x - iy)(x + iy) = -i y x + i x y = 2i x y \quad (6.3-18)$$

$$\psi^\dagger \dot{\psi} = (x - iy)(\dot{x} + iy) = x \dot{x} + y \dot{y} - i y \dot{x} + i x \dot{y} \quad (6.3-19)$$

^{†3} グラスマン奇な座標の場合、Poisson 括弧は反対称ではなく対称になる。

$$\dot{\psi}^\dagger \psi = (\dot{x} - i\dot{y})(x + iy) = \dot{x}x + \dot{y}y - i\dot{y}x + i\dot{x}y \quad (6.3-20)$$

$$\frac{1}{2} (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi) = x\dot{x} + y\dot{y} \quad (6.3-21)$$

となるので、ラグランジアンは

$$L = \frac{i}{2} (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi) - \omega \psi^\dagger \psi \quad (6.3-22)$$

となる。

この二つから、

$$\{x \pm iy, H\}_{\text{DB}} = \pm i\omega(x \pm iy) \quad (6.3-23)$$

という関係が出る。この式はグラスマン偶な調和振動子と同じである。

AB という二つの量の積は、 A, B がともにグラスマン奇であるときは $-BA$ と等しく、そうでないときは BA に等しい。これを

$$AB = (-)^{AB} BA \quad (6.3-24)$$

と書くことにする。 $(-)$ は (-1) の略記であるが、この $(-)$ の肩に現れる A, B は物理量 A, B そのものではなく、「 A がグラスマン偶なら 0、グラスマン奇なら 1」と決めた数字だとする。上の例では両方がグラスマン奇であったときのみ $(-)^{AB} = (-)^{1 \times 1} = -1$ となる。 A, B どちらかがグラスマン偶なら $(-)^{AB} = 1$ である。

6.4 グラスマン偶奇が混ざっているときの Poisson 括弧

グラスマン奇な場が入る場合の Poisson 括弧は

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \underbrace{\frac{(A)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial p_i}} - (-)^{AB} \underbrace{\frac{(B)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(A)}{\partial p_i}} \quad (6.4-1)$$

のように定義される。この式は x 微分が左にあって右微分、 p 微分が右にあって左微分、という順番で書かれている。つまり微分の方向を尊重している。

順番を変えて、Poisson 括弧の中にはいる A, B の順番を尊重する書き方にしてみよう。まず、後ろの項の順番を変えると、因子 $(-)^{(A+i)(B+i)}$ が出る。 $(-)$ の肩は $AB + Ai + Bi + i^2$ となるが、 i が 0 か 1 であるから $i^2 = i$ とすることができます、

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \underbrace{\frac{(A)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial p_i}} - (-)^{i(A+B+1)} \underbrace{\frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(A)}{\partial p_i} \frac{(B)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i}} \quad (6.4-2)$$

が順番を変えた結果である。

ここでさらに右微分と左微分の符号の違い（微分されるものがグラスマン偶で微分がグラスマン奇のときのみ、 -1 が出る）を考慮して

$$\frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(A)}{\partial p_i} = (-)^{i(A+1)} \frac{(A)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p_i}, \quad \frac{(B)\overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} = (-)^{i(B+1)} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial x^i} \quad (6.4-3)$$

を使うと

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial p_i} - (-)^i \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p_i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial x^i} \quad (6.4-4)$$

となる。これはつまり、

$$x^i, p_i \text{ がグラスマン奇なら } \{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial p_i} + \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial p_i} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial x^i} \quad (6.4-5)$$

ということである（グラスマン偶なら真ん中の符号は $-$ ）

この式は「 x は右から、 p は左から微分」のルールから外れるが、 A, B の順番が固定されているので、こちらの方が計算しやすい場合もある。特に、

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial z^N} \quad (6.4-6)$$

の形にまとめることができるので楽である。この行列 ω^{MN} はグラスマン偶の領域ではこれまでと同じだが、グラスマン奇の領域では $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の形になる。

この括弧はもちろん、

$$\{A, B\}_{\text{PB}} = -(-)^{AB} \{B, A\}_{\text{PB}} \quad (6.4-7)$$

を満たす（これは(6.4-1)を見ると理解しやすい）。すなわち、 A, B がともにグラスマン奇であるときを除き、交換すると -1 がつく。

ライプニッツ則は、

$$\{A, BC\}_{\text{PB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} C + (-)^{AB} B \{A, C\}_{\text{PB}} \quad (6.4-8)$$

のようになる（ B が A より前に出るときに符号因子 $(-)^{AB}$ が出る）。

この式は、(6.4-6) を使うと、

$$\begin{aligned} \{A, BC\}_{\text{PB}} &= \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \left((-)^{B\text{N}} B \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(C)}{\partial z^N} + \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial z^N} C \right) \\ &= (-)^{B\text{N}} \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} B \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(C)}{\partial z^N} + \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial z^N} C \\ &= (-)^{(A+\text{M})B} B \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \\ &= (-)^{AB} B \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(C)}{\partial z^N} + \frac{(A) \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z^M} \omega^{\text{MN}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial}(B)}{\partial z^N} C \end{aligned} \quad (6.4-9)$$

と確認できる。

ヤコビ恒等式は

$$\{\{A, B\}_{\text{PB}}, C\}_{\text{PB}} + (-)^{C(A+B)} \{\{C, A\}_{\text{PB}}, B\}_{\text{PB}} + (-)^{A(B+C)} \{\{B, C\}_{\text{PB}}, A\}_{\text{PB}} = 0 \quad (6.4-10)$$

のように A, B, C の順番の変更による符号を考慮した式となる。確認するために、まず

$$\begin{aligned}
 & \{\{A, B\}_{PB}, C\}_{PB} \\
 &= \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^M} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q} \\
 &= (-)^{(B+N)P} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^M} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q} + \frac{(A)\partial}{\partial z^M} \omega^{MN} \frac{\left(\frac{\partial(B)}{\partial z^N} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q}
 \end{aligned} \tag{6.4-11}$$

を考えよう。ここには A の二階微分と B の二階微分が一回ずつ現れた。

最終的に計算すべきは(6.4-10)なので、符号因子 $((-)^{C(A+B)}$ など) をつけつつ 3 つの項を足す。そのとき現れる A の二階微分の項は、(6.4-10)の第 1 項と、(6.4-10)の第 2 項を $A \rightarrow C, B \rightarrow A, C \rightarrow B$ とサイクリック置換したもの（第 2 項から来るので $((-)^{C(A+B)}$ がつく）になるので、

$$(-)^{(B+N)P} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^M} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q} + (-)^{C(A+B)} \frac{(C)\partial}{\partial z^M} \omega^{MN} \frac{\left(\frac{\partial(A)}{\partial z^N} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{PQ} \frac{\partial(B)}{\partial z^Q} \tag{6.4-12}$$

となる。第 2 項の $\frac{(C)\partial}{\partial z^M}$ を左微分に変えて $((-)^{(C+1)M} \frac{\partial(C)}{\partial z^M})$ にしてから後ろに持っていく。このとき、 $\boxed{(-)^{(C+M)(A+B+N+P+Q)} = (-)^{(C+M)(A+B+N)}}$ という符号因子が出る^{†4}。

全体として $((-)^{(C+1)M+(C+M)(A+B+N)})$ という符号因子が出る。

ω^{MN} の定義からして z^M と z^N のグラスマン偶奇性は同じだから、 $(-)$ の上では $\boxed{N = M}$ として、符号因子は $\boxed{(-)^{(C+1)M+(C+M)(A+B+M)} = (-)^{C(A+B)+M(A+B+2C)+M+M^2}}$ となる。

$\boxed{M^2 = M}$ と置き換えて偶数を消すと、 $((-)^{C(A+B)+M(A+B)})$ が残る。

もうひとつ、 $\frac{\partial(A)}{\partial z^N}$ を右微分になおして $((-)^{(A+1)N} \frac{(A)\partial}{\partial z^N})$ にすると、

$$\begin{aligned}
 & (-)^{(B+N)P} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^M} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q} \\
 & + \underbrace{(-)^{M(A+B)+(A+1)M} \omega^{MN}}_{(-)^{M B+M}} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^N} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{PQ} \frac{\partial(B)}{\partial z^Q} \frac{\partial(C)}{\partial z^M}
 \end{aligned} \tag{6.4-13}$$

$(-)$ の肩では、 $\boxed{M = N, P = Q}$ であることに注意して計算を進めよう。

ここで、第 2 項で $M, N \leftrightarrow Q, P$ を一斉に取り替えると

$$\begin{aligned}
 & (-)^{(B+N)P} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^M} \right) \partial}{\partial z^P} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \omega^{PQ} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q} + (-)^{PB+P} \underbrace{\omega^{QP}}_{-(-)^{PB} \omega^{PQ}} \frac{\left(\frac{(A)\partial}{\partial z^P} \right) \partial}{\partial z^M} \omega^{MN} \frac{\partial(B)}{\partial z^N} \frac{\partial(C)}{\partial z^Q}
 \end{aligned} \tag{6.4-14}$$

†4 M と N のグラスマン偶奇性は同じなので $(-)$ の上の $M + N$ を消した。

となる。さらに A の二階微分の順序を取り替えると $(-)^{PM}$ が出る。これで第 1 項と第 2 項は逆符号で同じとなるので相殺することがわかる。

B, C を二階微分する項についても同様の計算を行うことでヤコビ恒等式が証明できる。

6.5 フェルミオンの系

拘束のある系というと、特別な系だと思うかもしれないが、実は素粒子の場の理論でも「主役」と言つていいほどに登場するフェルミオン（Dirac 粒子なり Majorana 粒子なり）は拘束のある系なのである。

よく使われる Dirac 粒子のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (6.5-1)$$

である。 ψ は 3+1 次元なら「4 成分のスピノル」と呼ばれる量である。

簡単のため、1+1 次元にして、 ψ は「2 成分で、かつ Majorana スピノル」だとして話を進める。Majorana 粒子は場の記号に λ を使うことが多いので、ここでもそうする。

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5-2)$$

$$\gamma^0\gamma^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5-3)$$

$$\gamma^\mu\partial_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \partial_0 + \partial_1 \\ \partial_0 - \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5-4)$$

$$\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu = \begin{bmatrix} \partial_0 - \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_1 \end{bmatrix} \quad (6.5-5)$$

よってラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = i\lambda_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_+ + i\lambda_-(\partial_0 + \partial_1)\lambda_- - m\lambda_+\lambda_- - m\lambda_-\lambda_+ \quad (6.5-6)$$

となり、 λ_+, λ_- それぞれの共役な正準運動量を求める

$$\pi_+ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\lambda_+)} = i\lambda_+, \quad \pi_- = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\lambda_-)} = i\lambda_- \quad (6.5-7)$$

となって、時間微分を含まないから拘束になってしまう。二つの拘束

$$\pi_+ - i\lambda_+ \simeq 0, \quad \pi_- - i\lambda_- \simeq 0 \quad (6.5-8)$$

があるとして Dirac 括弧を作る。拘束条件の Poisson 括弧行列は

$$\begin{bmatrix} \{\pi_+ - i\lambda_+, \pi_+ - i\lambda_+\}_{PB} & \{\pi_- - i\lambda_-, \pi_+ - i\lambda_+\}_{PB} \\ \{\pi_+ - i\lambda_+, \pi_- - i\lambda_-\}_{PB} & \{\pi_- - i\lambda_-, \pi_- - i\lambda_-\}_{PB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \quad (6.5-9)$$

であるからその逆行列は $\begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}$ となり、Dirac 括弧は

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} - \frac{i}{2} (\{A, \pi_+ - i\lambda_+\}_{\text{PB}} \{\pi_+ - i\lambda_+, B\}_{\text{PB}} + \{A, \pi_- - i\lambda_-\}_{\text{PB}} \{\pi_- - i\lambda_-, B\}_{\text{PB}}) \quad (6.5-10)$$

となる。この式に $A = \pi_+, B = \lambda_+$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & \{\pi_+, \lambda_+\}_{\text{DB}} \\ &= \{\pi_+, \lambda_+\}_{\text{PB}} - \frac{i}{2} \{\pi_+, \pi_+ - i\lambda_+\}_{\text{PB}} \{\pi_+ - i\lambda_+, \lambda_+\}_{\text{PB}} - \frac{i}{2} \{\pi_+, \pi_- - i\lambda_-\}_{\text{PB}} \{\pi_- - i\lambda_-, \lambda_+\}_{\text{PB}} \\ &= \delta(x - y) - \frac{i}{2} \times (-i\delta(x - z)) \times \delta(z - y) = \frac{1}{2} \delta(x - y) \end{aligned} \quad (6.5-11)$$

となる。結果は（ナイーブな結論である）Poisson 括弧の $\frac{1}{2}$ である！

第7章 冗長系とゲージ理論

7.1 冗長系

➡ ここまで話は、「拘束条件がついている系」だった。世の中には「拘束条件をつけないとちゃんと扱えないのに拘束条件がついてない系（なので後から人間が「手で加える」必要がある系）」が存在する。そのような系を「冗長系」と呼ぶことにしよう。冗長系の思いっきり簡単な例を述べよう。

7.1.1 ものすごく簡単な冗長系

次のようなラグランジアンを考えよう。

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 - \frac{1}{2}(x + y)^2 \quad (7.1-1)$$

このラグランジアン、実は $x + y$ の関数なので、 $X = x + y$ とまとめてしまえば自由度 1 の系である。それをあえて x, y の 2 自由度があるようなふりをしてラグランジアンを書いている。こういう系を「冗長系」と呼ぼう。考えたいのは、このような系の正準形式である。運動量は

$$P_x = \dot{x} + \dot{y}, \quad P_y = \dot{x} + \dot{y} \quad (7.1-2)$$

となってしまうので、 $P_x - P_y = 0$ という primary constraint ができる。

primary constraint を取り入れたハミルトニアンは

$$H = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \lambda(P_x - P_y) \quad (7.1-3)$$

となる^{†1}が、ここで困ってしまうのは、 $\dot{x} + \dot{y}$ を P_x と書くべきか P_y と書くべきかである。実は a を任意の実数として、 $aP_x + (1 - a)P_y$ にしたっていい。

ここでは $\dot{x} = P_x - \dot{y}$ をまず代入してみる。

$$\begin{aligned} H &= P_x(P_x - \dot{y}) + P_y \dot{y} - \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \lambda(P_x - P_y) \\ &= \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + (\lambda - \dot{y})(P_x - P_y) \end{aligned} \quad (7.1-4)$$

となるので、primary constraint につけた未定定数を $\Lambda = \lambda - \dot{y}$ と定義しなおすことにより、

$$H = \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \Lambda(P_x - P_y) \quad (7.1-5)$$

^{†1} ここで secondary constraint もラグランジュ未定乗数を掛けて足す処方もあるが、ラグランジュ形式でのゲージ変換との対応がつけやすいのは primary のみを取り入れた形式になる。

を得る。これから得られる正準方程式は

$$\dot{x} = P_x + \Lambda \quad (7.1-6)$$

$$\dot{y} = -\Lambda \quad (7.1-7)$$

$$\dot{P}_x = - (x + y) \quad (7.1-8)$$

$$\dot{P}_y = - (x + y) \quad (7.1-9)$$

こうして、 x, y の時間発展が Λ の分だけ決まらない。これは $x - y$ が「物理的に意味のない座標」になっているからである。

ここで「Dirac 括弧を作ろう」と思ったとしても、やはりうまくいかない。というのは拘束は一つしかないので、拘束の Poisson 括弧の行列 $\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{PB}$ は 0 になってしまう。当然逆行列もないのでも Dirac 括弧も作れない。

Dirac 括弧を作れる、 $\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{PB}$ が逆の取れる行列になっている拘束を「2nd-class の拘束」と呼ぶ。理論に N 個の拘束 $\{\Phi^\cdot\}$ があって $\det \{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{PB}$ が 0 であったとき、この行列のランクの数だけは「互いに (Poisson 括弧の意味で) 交換しない拘束の組」を取り出すことができる。それが 2nd-class の拘束である。それら以外の、行列の 0 固有値に対応する部分は「1st-class の拘束」と呼ぶ。

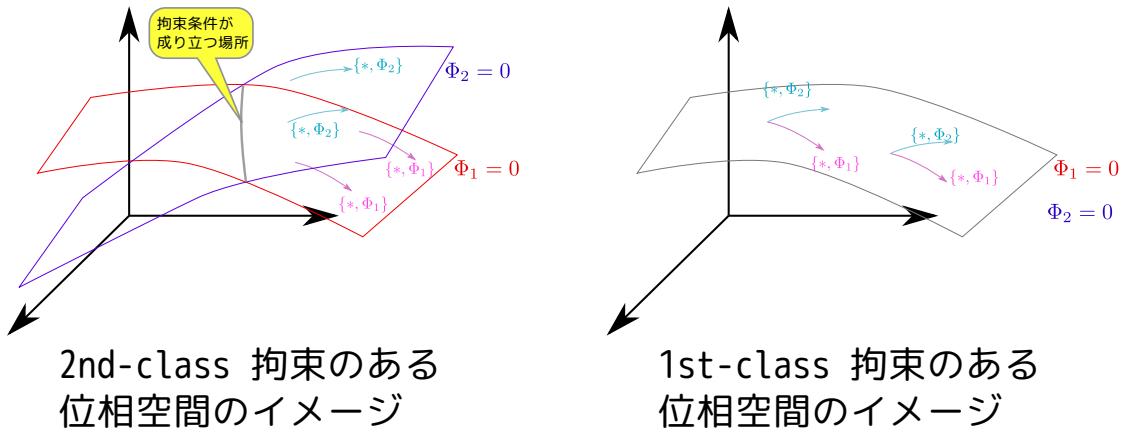


図 7-1

2nd-class の拘束のみがあるとき、理論は拘束系ではあるが、ちゃんと解ける問題になっている。1st-class の拘束があると、理論はその分だけ解けない。

(7.1-5)の系の位相空間を表現したのが図 7-2 である。1 本の破線矢印の上にある全ての状態は「同等」である。この「破線にそって進む」方向の演算子は、まさに $P_x - P_y$ である。

特に、この冗長な位相空間の中での経路 A と経路 B は「同等」である。このハミルトニアンで考える限り、経路を選ぶ方法がない。

よって、1st-class の拘束を含む「冗長系」の場合は、「手で付け加える条件」をつけてあげる必要が出てくる。

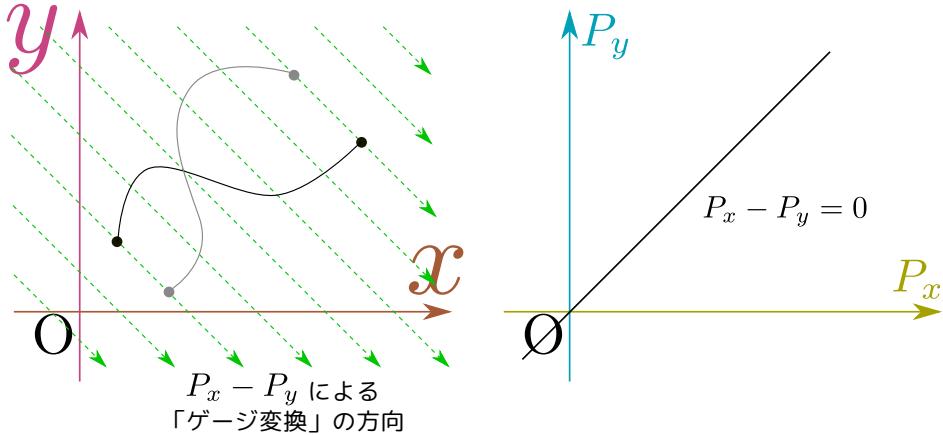


図 7-2 ハミルトニアン (7.1-5) の系の位相空間

ここで、 $[x = f(y)]$ という「ゲージ」^{†2}を選んでみよう。ラグランジュ未定定数 B を導入して、

$$H = \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + B(x - f(y)) + \Lambda_1(P_x - P_y) + \Lambda_2 P_B \quad (7.1-10)$$

となる。つまり新たな条件を加えることで拘束が 2nd-class になるようとする。

このとき、primary constraint は

$$P_B = 0, \quad P_x - P_y = 0 \quad (7.1-11)$$

となり、secondary は

$$x - f(y) = 0, \quad B(1 + f'(y)) = 0 \quad (7.1-12)$$

である。四つの拘束の関係は

$$\{\Phi_i, \Phi_j\}_{PB}$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c} P_x - P_y & x - f(y) & P_B & B(1+f'(y)) \\ \hline P_x - P_y & 0 & -1 - f'(y) & 0 \\ \hline x - f(y) & 1 + f'(y) & 0 & 0 \\ \hline P_B & 0 & 0 & -1 - f'(y) \\ \hline B(1+f'(y)) & 0 & 0 & 1 + f'(y) \end{array} \quad (7.1-13)$$

であり、この行列の逆行列は

$$\frac{1}{1 + f'(y)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1-14)$$

^{†2} 歴史的な理由により（というか、歴史的なだけで合理的でない理由により）、このような冗長性を「ゲージ不变性」と呼び、その冗長性を固定するための条件（後から付け加える）を「ゲージ条件」、「ゲージ条件を選ぶ」ことを「ゲージを固定する」などと言う。

となる（めでたくすべて 2nd-class である）。

ただし、 $f'(y)$ がどの段階でも -1 にならない関数を選ばなくてはいけない。 $f'(y) = -1$ になると上の「ゲージ変換の方向」に乗ってしまうのである。

Dirac 括弧を計算すると

$$\begin{aligned}\{x, P_x\}_{\text{DB}} &= \{x, P_x\}_{\text{PB}} - \{x, P_x - P_y\}_{\text{PB}} \frac{1}{1 + f'(y)} \{x - f(y), P_x\}_{\text{PB}} \\ &= 1 - 1 \times \frac{1}{1 + f'(y)} \times 1 = 1 - \frac{1}{1 + f'(x)} = \frac{f'(x)}{1 + f'(y)}\end{aligned}\quad (7.1-15)$$

$$\begin{aligned}\{f(y), P_x\}_{\text{DB}} &= f'(y) \{y, P_x\}_{\text{PB}} - f'(y) \{y, P_x - P_y\}_{\text{PB}} \frac{1}{1 + f'(y)} \{x - f(y), P_x\}_{\text{PB}} \\ &= 0 - f'(y) \times (-1) \times \frac{1}{1 + f'(y)} \times 1 = \frac{f'(y)}{1 + f'(y)}\end{aligned}\quad (7.1-16)$$

$$\begin{aligned}\{y, P_x\}_{\text{DB}} &= \{y, P_x\}_{\text{PB}} - \{y, P_x - P_y\}_{\text{PB}} \frac{1}{1 + f'(y)} \{x - f(y), P_x\}_{\text{PB}} \\ &= 0 - (-1) \times \frac{1}{1 + f'(y)} \times 1 = \frac{1}{1 + f'(y)}\end{aligned}\quad (7.1-17)$$

となって、

$$\{x + y, P_x\}_{\text{DB}} = \frac{f'(x)}{1 + f'(y)} + \frac{1}{1 + f'(y)} = 1 \quad (7.1-18)$$

となる。

つまりは $x + y$ が座標で P_x がそれに対する運動量、と考えるとよい。考えてみればこれは最初のラグランジュからわかっていたことではある。

7.1.2 少しだけややこしい冗長系

同様に、「実は単純なモデルなのをあえてややこしく書いた冗長系」の例を示そう。

$$L = \frac{1}{2} \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} \quad (7.1-19)$$

というラグランジアンを考える。これは実は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすれば $\frac{1}{2}(\dot{r})^2$ というラグランジアンであり、2 次元の面上で動径方向の 1 次元的な運動だけを見ている。

とりあえず運動方程式を求めておくと、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x(x\dot{x} + y\dot{y})}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\dot{x}(x\dot{x} + y\dot{y})}{x^2 + y^2} - \frac{2(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (7.1-20)$$

運動量を求める、

$$P_x = \frac{x(x\dot{x} + y\dot{y})}{x^2 + y^2}, \quad P_y = \frac{y(x\dot{x} + y\dot{y})}{x^2 + y^2} \quad (7.1-21)$$

となり、

$$\Phi_1 = xP_y - yP_x \quad (7.1-22)$$

という primary constraint が現れる (いわばと知れた角運動量である)。ハミルトニアンを作ると

$$H = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} - \frac{1}{2} \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} - \lambda(xP_y - yP_x) = \frac{1}{2} \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} - \lambda(xP_y - yP_x) \quad (7.1-23)$$

となるが、これを P_x を使って表すと、

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{P_x}{x} \right)^2 - \lambda(xP_y - yP_x) \quad (7.1-24)$$

となる。primary constraint の時間発展は

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \{xP_y - yP_x, H\}_{\text{PB}} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \left\{ xP_y - yP_x, \left(\frac{P_x}{x} \right)^2 \right\}_{\text{PB}} \\ &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \left(P_y \frac{2P_x}{x^2} - y \left(\frac{2(P_x^2)}{x^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} P_x \frac{xP_y - yP_x}{x^3} \end{aligned} \quad (7.1-25)$$

となり、これは primary constraint に比例するので 0 である。

補助場を使って $y = 0$ というゲージ条件を入れよう。

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{P_x}{x} \right)^2 - \lambda(xP_y - yP_x) - By \quad (7.1-26)$$

とすると、primary constraint は

$$\Phi_1 = xP_y - yP_x = 0, \quad \Phi_2 = P_B = 0 \quad (7.1-27)$$

となる。secondary constraint は

$$\frac{1}{x^2 + y^2} P_x \frac{xP_y - yP_x}{x^3} - Bx = 0, \quad y = 0 \quad (7.1-28)$$

の二つになる。

$$\{\Phi_i, \Phi_j\}_{\text{PB}} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & xP_y - yP_x & y & P_B & Bx \\ \hline xP_y - yP_x & 0 & -x & 0 & 0 \\ \hline y & x & 0 & 0 & 0 \\ \hline P_B & 0 & 0 & 0 & -x \\ \hline Bx & 0 & 0 & x & 0 \end{array} \quad (7.1-29)$$

で、ゲージ条件をつけたおかげで拘束は 2nd-class となる。

ここで、 $x = 0$ では逆が計算できない領域になるが、それ以外の点では、

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1-30)$$

が逆行列となる。

$$\{x, P_x\}_{\text{DB}} = \{x, P_x\}_{\text{PB}} - \{x, xP_y - yP_x\}_{\text{PB}} \frac{1}{x} \{y, P_x\}_{\text{PB}} = 1 \quad (7.1-31)$$

$$\{x, P_y\}_{\text{DB}} = \{x, P_y\}_{\text{PB}} - \{x, xP_y - yP_x\}_{\text{PB}} \frac{1}{x} \{y, P_y\}_{\text{PB}} = 0 - (-y) \frac{1}{x} = \frac{y}{x} \quad (7.1-32)$$

$$\{y, P_x\}_{\text{DB}} = \{y, P_x\}_{\text{PB}} - \{y, xP_y - yP_x\}_{\text{PB}} \frac{1}{x} \{y, P_x\}_{\text{PB}} = 0 \quad (7.1-33)$$

$$\{y, P_y\}_{\text{DB}} = \{y, P_y\}_{\text{PB}} - \{y, xP_y - yP_x\}_{\text{PB}} \frac{1}{x} \{y, P_y\}_{\text{PB}} = 1 - x \frac{1}{x} = 0 \quad (7.1-34)$$

と、Dirac 括弧が計算できて、拘束された（ゲージ固定された）ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} (P_x)^2 \quad (7.1-35)$$

まで簡単になる。

$$\{x, H\}_{\text{DB}} = P_x \quad (7.1-36)$$

$$\{P_x, H\}_{\text{DB}} = 0 \quad (7.1-37)$$

と自由粒子と同じになるが、これは今考えている理論が「動径方向しか考えない」理論で、それを $y = 0$ (x 軸上) に制限したのだからごもっともな結果である。

7.2 相対論的粒子

少しだけ実用的な例として、相対論的な粒子の問題を考えよう。

7.2.1 作用とその不变性

$$L = -m \sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (7.2-1)$$

というラグランジアン（本講義では計量を $(-, +, +, +)$ にしていることに注意）を τ で積分した作用

$$S = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = -m \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (7.2-2)$$

を考えてみる。この作用は、粒子のたどる世界線の長さ $\times (-m)$ になっている。よって作用から計算される結果は、測地線（世界線の長さが停留する線）である。

これに対する運動方程式は、 τ というパラメータを時間変数として扱うことで、

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} \right) = 0 \quad (7.2-3)$$

となる。括弧の中は

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)} = m \frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} \quad (7.2-4)$$

という運動量^{†3}の定義式になっている。

いっけん、運動量も定義できてめでたしめでたし、となりそうであるが、実はそうはいかない。この運動量 p_μ には、

$$\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{m^2 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \eta_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau}}{\left(\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}} \right)^2} = -m^2 \quad (7.2-5)$$

という拘束条件がある。上の計算は平たくいえば「 p の自乗」を計算しているのだが、分母はルートを取ったものになり、分子は $m \frac{dx}{d\tau}$ の自乗になる。結果として $\frac{m^2 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2}{- \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2} = -m^2$ のように計算されて $-m^2$ が出る。

結果を $p^2 + m^2 = 0$ と書けば、これはいわゆる「on-shell 条件」^{†4}である。

この拘束条件がどのような不变性と関連しているかをみるためにハミルトニアンベクトル場を作ってみる。

$$\begin{aligned} X_{p^2+m^2}(* &= \{*, p^2 + m^2\}_{PB} = \{*, p_\mu\}_{PB} \eta^{\mu\nu} p_\nu \\ &= 2 \{*, p_\mu\}_{PB} \eta^{\mu\nu} p_\nu = 2 \frac{\partial *}{\partial x^\mu} \eta^{\mu\nu} p_\nu \end{aligned} \quad (7.2-6)$$

となるから、係数を除いて「 p^μ 方向への移動」である。定義より p^μ は $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ の方向を向いているので「 $x^\mu(\tau)$ の軌道の方向への移動」であり、それはつまり $\frac{d}{d\tau}$ という微分と同じである。この拘束条件によるゲージ変換は「パラメータ τ の取り直し (reparametrization)」であることがわかる。作用がこの不变性を持つことは、(7.2-2)の $-m \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ という表現からもわかる (こう書くと、 τ はどこにもいない)。



ここで「 τ の repametrization」の中に、端点である τ_0, τ_1 の reparametrization は含まれるのか? — という疑問がある。特に $T = \tau_1 - \tau_0$ としたとき、 T も大きくしたり小さくしたりする (それで物理は変わらない) 不変性もありとするのか?

^{†3} この「運動量」は「正準座標の相方としての運動量」であって、高校物理からおなじみの $p = mv$ の運動量とは完全一致はしない。実際、似てはいるが同じ式にはなってない。

^{†4} $p^2 + m^2 = -(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 + m^2 = 0$ のグラフが貝殻っぽいので「on-shell」なのであるが、この「on-shell」という言葉自体の意味はもっと広がって、今では「運動方程式を満たしている状態」の表現として定着している (もはやグラフが貝殻っぽくなくてもいい)。

たとえば $\tau = t = x^0(\tau)$ というゲージ条件を置くと、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\eta_{ij} \frac{dx^j}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}}} \right) = 0 \quad (7.2-7)$$

となる。これは $\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = 0$ という式で、四元運動量のうち 3 次元成分が保存するという式になる。

7.2.2 ハミルトン形式

拘束条件があると、このままではハミルトン形式に移行できない。それどころか、このまま手順どうりにハミルトニアンを作ると、

$$\begin{aligned} & p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - \left(-m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \right) \\ &= m \frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} \frac{dx^\mu}{d\tau} + m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \end{aligned} \quad (7.2-8)$$

となって、0 になってしまふ。

ハミルトニアンのハミルトンベクトル場が時間微分 $\frac{d}{d\tau}$ (ここで「時間」の役割をしているのは τ である) になるとすると「作用が τ によらないから τ 微分は 0」と考えると (変な気持ちは收まらないかもしれないが) 筋が通っている^{†5}。

primary constraint にラグランジュ未定乗数をつけて、

$$H = \frac{\Lambda}{2} (p^2 + m^2) \quad (7.2-9)$$

がハミルトニアンとなる (ラグランジュ未定乗数に $\frac{1}{2}$ がついているのは後の話に合わせるため)。このハミルトニアンによる運動方程式は

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \Lambda p^\mu \quad (7.2-10)$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \quad (7.2-11)$$

となって、 Λ の分だけ決まってない。

 primary constraint をそのまま量子力学に持っていくと、量子力学的の状態は $(p^2 + m^2) |\Phi\rangle = 0$ を満たすということになって、いわゆる Klein-Gordon 方程式が出てくる。第 1 量子化と第 2 量子化が拘束条件を通じてつながっているのは面白いといえば面白い。

^{†5} 重力場の正準形式も同じ状況に陥り、結果としてハミルトニアンに対応する量は constraint になる (重力場は対称性が大きいので、さらに運動量に対応する constraint まで出てくる)。

面白いといえばもうひとつ面白いのは、

$$L = \frac{1}{2\Lambda} \eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{red}} - m^2 \frac{\Lambda}{2} \quad (7.2-12)$$

という作用から出発して、

$$p_\mu = \frac{1}{\Lambda} \eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{red}}, \quad p_\Lambda = 0 \quad (7.2-13)$$

のように運動量を作った場合のハミルトニアンも、

$$H = p_\mu \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{\text{red}} - \frac{1}{2\Lambda} \eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{red}} + m^2 \frac{\Lambda}{2} = \frac{\Lambda}{2} (p^2 + m^2) \quad (7.2-14)$$

となって同じになる。こちらの立場では primary constraint が $p_\Lambda = 0$ 、secondary constraint が $p^2 + m^2 = 0$ である。

7.2.3 電磁場中の相対論的粒子

力学変数ではない（背景としての）電磁場（ベクトルポテンシャルが $A^\mu(\{x^\cdot\})$ ）の中を運動する相対論的な粒子の作用は

$$S = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{red}}} + q \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau A_\mu \underbrace{\{x^\cdot(\tau)\}}_{\text{red}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (7.2-15)$$

である。第 2 項に含まれるベクトルポテンシャルの引数は $\{x^\cdot(\tau)\}$ であることに注意。つまり粒子のいる場所は $\{x^\cdot(\tau)\}$ におけるベクトル・ポテンシャルが入っている。

第 2 項は実は、

$$\begin{aligned} & q \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau A_\mu \underbrace{\{x^\cdot(\tau)\}}_{\text{red}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= q \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} A_\mu \underbrace{\{x^\cdot(\tau)\}}_{\text{red}} dx^\mu = q \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} A_\cdot \{x^\cdot(\tau)\} \end{aligned} \quad (7.2-16)$$

のように、1-form の積分になる。

この作用を見て「電磁場のゲージ変換に対して不变だろうか？」と心配した人もいるかもしれない。この作用の中では電磁場は力学変数ではなく「背景」なのだが、背景である電磁場がゲージ変換することだってあるだろう。やってみると変換 $\delta_G A_\cdot(\{x^\cdot\}) = \text{d} \cdot \Lambda(\{x^\cdot\})$ による作用の変化は

$$\delta_G S = q \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} \text{d} \cdot \Lambda(\{x^\cdot(\tau)\}) = q \left[\Lambda(\{x^\cdot(\tau)\}) \right]_{x(\tau_0)}^{x(\tau_1)} \quad (7.2-17)$$

となる。よって背景電磁場のゲージ変換は、作用積分の端点の値にしか影響を及ぼさない。そして、端点の値の変化は運動方程式を変えない。

作用から運動方程式を出してみると、

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} + qA_\mu(\{x^\cdot(\tau)\}) \right) = q \frac{\partial A_\nu(\{x^\cdot(\tau)\})}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} \right) = q \left(\frac{\partial A_\nu(\{x^\cdot(\tau)\})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(\{x^\cdot(\tau)\})}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} = qF_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (7.2-18)$$



となる。ここでやっている「変分 $\delta x^\mu(\tau)$ 」は「経路の変形」
よってスキャンされた面積に付随する 2-form であるところの) $F..$ が出現するのはごもっともである。

ここで、

$$p_\mu \equiv \frac{m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}} + qA_\mu(\{x^\cdot(\tau)\}) \quad (7.2-19)$$

であるから、この場合の拘束条件は

$$\eta^{\mu\nu} (p_\mu - qA_\mu(\{x^\cdot(\tau)\})) (p_\nu - qA_\nu(\{x^\cdot(\tau)\})) = m^2 \quad (7.2-20)$$

となる。

7.3 球面上に拘束された質点

7.3.1 2nd-class を付け加える場合

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \quad (7.3-1)$$

のように未定乗数 λ を付け加える。すると、

$$H = \frac{1}{2m} ((P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \quad (7.3-2)$$

で拘束が

$$P_\lambda = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad xP_x + yP_y + zP_z = 0, \quad 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (7.3-3)$$

のように4つ出る。最後の拘束は(2個めの拘束を使って) $\lambda = 0$ にしてしまおう。Dirac括弧を計算すると、

$$\{A, B\}_{\text{DB}} = \{A, B\}_{\text{PB}} + \{A, x^2 + y^2 + z^2\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{xP_x + yP_y + zP_z, B\}_{\text{PB}}$$

$$\begin{aligned}
& - \{A, xP_x + yP_y + zP_z\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{x^2 + y^2 + z^2, B\}_{\text{PB}} \\
& + \{A, \lambda\}_{\text{PB}} \{P_\lambda, B\}_{\text{PB}} - \{A, P_\lambda\}_{\text{PB}} \{\lambda, B\}_{\text{PB}}
\end{aligned} \tag{7.3-4}$$

となる。 x, p に関する部分だけ計算すると、

$$\{x_i, x_j\}_{\text{DB}} = 0 \tag{7.3-5}$$

$$\{x_i, P_j\}_{\text{DB}} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{R^2} \equiv \Pi_{ij}, \quad \{P_i, x_j\}_{\text{DB}} = -\Pi_{ij} \tag{7.3-6}$$

$$\{P_i, P_j\}_{\text{DB}} = -\frac{x_i P_j - x_j P_i}{R^2} \tag{7.3-7}$$

となる。ここで定義した Π_{ij} は、動径方向を消す射影演算子になっている^{†6}。検算

$$\begin{aligned}
\{P_x, P_y\}_{\text{DB}} &= \underbrace{\{P_x, P_y\}_{\text{PB}}}_{0} + \underbrace{\{P_x, x^2 + y^2 + z^2\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{xP_x + yP_y + zP_z, P_y\}_{\text{PB}}}_{-2x} \\
&\quad - \underbrace{\{P_x, xP_x + yP_y + zP_z\}_{\text{PB}} \frac{1}{2R^2} \{x^2 + y^2 + z^2, P_y\}_{\text{PB}}}_{-P_x} \\
&= -\frac{xP_y - yP_x}{R^2} \tag{7.3-8}
\end{aligned}$$

正準方程式を作つてみると、

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}_{\text{DB}} = \frac{P_i}{m} \tag{7.3-9}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}_x &= \{P_x, H\}_{\text{DB}} = -\frac{P_y}{mR^2} (xP_y - yP_x) - \frac{P_z}{mR^2} (xP_z - zP_x) \\
&= -\frac{1}{mR^2} (x(P_y^2 + P_z^2) - P_x(yP_y + zP_z)) = -\frac{x}{mR^2} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) \tag{7.3-10}
\end{aligned}$$

となる（途中で $xP_x + yP_y + zP_z = 0$ を使つた）ので、

$$m\ddot{x}_i = -m \frac{x_i}{R^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{7.3-11}$$

という式が出る。これは大きさ $\frac{mv^2}{R}$ で $\frac{x_i}{R}$ の逆方向を向いた力（球面上に束縛しようとする向心力）が掛かることを意味しているので、物理的にも納得できる。

$\{P_i, x_j\}_{\text{DB}} = -\Pi_{ij}$ なので、 $\{P_i, *\}_{\text{DB}}$ という演算はあたかも $-\Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ という微分演算子であるかのようである ($\{P_i, *\}_{\text{DB}} = -\Pi_{ij} \frac{\partial *}{\partial x_j}$)。

Jacobi 恒等式より、

$$\begin{aligned}
& \{P_i, \{P_j, *\}_{\text{DB}}\}_{\text{DB}} + \{P_j, \{*, P_i\}_{\text{DB}}\}_{\text{DB}} + \{*, \{P_i, P_j\}_{\text{DB}}\}_{\text{DB}} = 0 \\
& \{P_i, \{P_j, *\}_{\text{DB}}\}_{\text{DB}} - \{P_j, \{P_i, *\}_{\text{DB}}\}_{\text{DB}} = \{\{P_i, P_j\}_{\text{DB}}, *\}_{\text{DB}}
\end{aligned} \tag{7.3-12}$$

^{†6} $x^2 = R^2$ という条件下において、 $x_i \Pi_{ij} = 0$ になるので、 Π が掛かると x_i 方向が落ちる。

であるから、二つの操作の交換関係 (P_i を掛けてから P_j を掛けたものと、その逆の掛算をしたものの差) を取ると、

$$\left[-\Pi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, -\Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] = \Pi_{ik} \frac{\partial \Pi_{jm}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_m} - \Pi_{jm} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (7.3-13)$$

となるが、 $\frac{\partial \Pi_{jm}}{\partial x_k} = -\frac{\delta_{jk}x_k + \delta_{mk}x_j}{R^2}$ を使うと、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R^2} \left(-\Pi_{ik} (\delta_{jk}x_m + \delta_{mk}x_j) \frac{\partial}{\partial x_m} + \Pi_{jm} (\delta_{im}x_k + \delta_{km}x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left(-\Pi_{ij}x_m \frac{\partial}{\partial x_m} - \Pi_{im}x_j \frac{\partial}{\partial x_m} + \Pi_{ij}x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \Pi_{jm}x_i \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left(x_i \Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} - x_j \Pi_{im} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (7.3-14)$$

となって、 $-\frac{1}{R^2}(x_i P_j - x_j P_i)$ になっている。

ただし、ここで量子論ではいつも出てくる問題で、 P_i を $\frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}$ ^{†7} と考えてもよい（演算子の順序は古典論では決まらない）。一般的に

$$P_i = -\Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \left[\Pi_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = -\Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} - 2\alpha \frac{x_i}{R^2} \quad (7.3-15)$$

のように二つの演算子の交換関係分、決まらないのである。これを $P_i = -\Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \left[\Pi_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]$ と書くと、

$$\left[-\Pi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} - 2\alpha \frac{x_i}{R^2}, x_j \right] = -\Pi_{ij} \quad (7.3-16)$$

$$\begin{aligned} &\left[-\Pi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} - 2\alpha \frac{x_i}{R^2}, -\Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} - 2\alpha \frac{x_j}{R^2} \right] \\ &= \underbrace{\left[-\Pi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, -\Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} \right]}_{-\frac{2\alpha}{R^2} \Pi_{ij}} + \underbrace{\left[-\Pi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, -2\alpha \frac{x_j}{R^2} \right]}_{\frac{2\alpha}{R^2} \Pi_{ij}} + \underbrace{\left[-2\alpha \frac{x_i}{R^2}, -\Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} \right]}_{-\frac{2\alpha}{R^2} \Pi_{ij}} + \underbrace{\left[-2\alpha \frac{x_i}{R^2}, -2\alpha \frac{x_j}{R^2} \right]}_0 \\ &= \frac{1}{R^2} \left(x_i \Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} - x_j \Pi_{im} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= -\frac{1}{R^2} \left(x_i \left(-\Pi_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} - 2\alpha \frac{x_j}{R^2} \right) - x_j \left(-\Pi_{im} \frac{\partial}{\partial x_m} - 2\alpha \frac{x_i}{R^2} \right) \right) = -\frac{1}{R^2}(x_i P_j - x_j P_i) \end{aligned} \quad (7.3-17)$$

この α は別の条件から固定される^{†8}。

7.3.2 動径方向の運動エネルギーが入らないようにする

最初から極座標で書くと

$$L = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (7.3-18)$$

†7 この演算子の微分 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ は Π_{ij} のみではなく、その後ろにある「任意の関数」も微分する。

†8 P_i がエルミートな演算子であるようにすると、 $\alpha = -\frac{1}{2}$ となる。

なのだが、これをあえて直交座標で書く。

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} r \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \quad (7.3-19)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} r \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \quad (7.3-20)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta \quad (7.3-21)$$

なので、

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{r} (\dot{x} \cos \theta \cos \phi + \dot{y} \cos \theta \sin \phi - \dot{z} \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r} \left(\dot{x} \frac{z}{r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dot{y} \frac{z}{r} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dot{z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} (\dot{x} z x + \dot{y} z y - \dot{z} (x^2 + y^2)) \end{aligned} \quad (7.3-22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} (-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi) \\ &= \frac{1}{(r \sin \theta)^2} (-\dot{x} y + \dot{y} x) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-\dot{x} y + \dot{y} x) \end{aligned} \quad (7.3-23)$$

となり、

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)} (\dot{x} x z + \dot{y} y z - \dot{z} (x^2 + y^2))^2 + \frac{1}{x^2 + y^2} (-\dot{x} y + \dot{y} x)^2 \right) \quad (7.3-24)$$

というややこしい式になる。少し整理しておくと、

$$x^2 \text{の項} : \frac{m}{2} \left(\frac{x^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} + y^2 \right) \frac{1}{x^2 + y^2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{x}^2 \quad (7.3-25)$$

$$y^2 \text{の項} : \frac{m}{2} \left(\frac{y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} + x^2 \right) \frac{1}{x^2 + y^2} \dot{y}^2 = \frac{m}{2} \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{y}^2 \quad (7.3-26)$$

$$\dot{z}^2 \text{の項} : \frac{m}{2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{z}^2 \quad (7.3-27)$$

$$\dot{x} \dot{y} \text{の項} : m \left(\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right) \frac{xy}{x^2 + y^2} \dot{x} \dot{y} = - \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{x} \dot{y} \quad (7.3-28)$$

$$\dot{y} \dot{z} \text{の項} : -m \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{y} \dot{z} \quad (7.3-29)$$

$$\dot{x} \dot{z} \text{の項} : -m \frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2} \dot{x} \dot{z} \quad (7.3-30)$$

となり、

$$L = \frac{m}{2(x^2 + y^2 + z^2)} ((y^2 + z^2) \dot{x}^2 + (x^2 + z^2) \dot{y}^2 + (x^2 + y^2) \dot{z}^2 - xy \dot{x} \dot{y} - yz \dot{y} \dot{z} - xz \dot{x} \dot{z}) \quad (7.3-31)$$

となる。このラグランジアンだが、実は

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2(x^2 + y^2 + z^2)} (x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z})^2 \quad (7.3-32)$$

のように「自由粒子の作用から、動径方向の運動エネルギーを引く」操作でも作ることができる。
この作用を

$$L = \frac{m}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (7.3-33)$$

のように行列で表現しておこう。

$$P_x = \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} ((y^2 + z^2)\dot{x} - xy\dot{y} - xz\dot{z}) \quad (7.3-34)$$

$$P_y = \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} (-xy\dot{x} + (x^2 + z^2)\dot{y} - yz\dot{z}) \quad (7.3-35)$$

$$P_z = \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} (-xz\dot{x} - yz\dot{y} + (x^2 + y^2)\dot{z}) \quad (7.3-36)$$

この式から、 $xP_x + yP_y + zP_z = 0$ という primary constraint が出る。

行列で表現して

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (7.3-37)$$

$$\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7.3-38)$$

$$\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3-39)$$

$$\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} \quad (7.3-40)$$

$$\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \quad (7.3-41)$$

(7.3-42)

のように固有ベクトルが見つかる（4 本見つかったように見えるが、下の 3 本は独立ではないので、独立な本数は 3 本である）。

この行列は対称行列であるので、

$$\begin{bmatrix} -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} -y & x & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}}_{(x^2 + y^2 + z^2)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (7.3-43)$$

のように計算することで、

$$xP_y - yP_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (7.3-44)$$

$$yP_z - zP_y = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \quad (7.3-45)$$

$$zP_x - xP_z = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \quad (7.3-46)$$

のように関係がつく。

独立な固有ベクトルを使って $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & -y & z \\ y & x & z \\ z & 0 & -x - y \end{bmatrix}$ という行列を作る。この逆行列は

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} x & y & z \\ -\frac{z^2}{x+y} - y & \frac{z^2}{x+y} + x & \frac{(x-y)z}{x+y} \\ \frac{xz}{x+y} & \frac{yz}{x+y} & -\frac{y^2 + x^2}{x+y} \end{bmatrix} \quad (7.3-47)$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix} \quad (7.3-48)$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z} - L \\ &= \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} ((y^2 + z^2)\dot{x} - xy\dot{y} - xz\dot{z}) \dot{x} \\ &\quad + \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} (-xy\dot{x} + (x^2 + z^2)\dot{y} - yz\dot{z}) \dot{y} \\ &\quad + \frac{m}{x^2 + y^2 + z^2} (-xz\dot{x} - yz\dot{y} + (x^2 + y^2)\dot{z}) \dot{z} \\ &\quad - \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m}{2(x^2 + y^2 + z^2)} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2 \end{aligned} \quad (7.3-49)$$

である。

7.3.3 もう一つ、ほぼ自明な冗長系

$$L = f(x)\dot{x} \quad (7.3-50)$$

というラグランジアンを考える。この式の作用を考えると、

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\dot{x} dt = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = F(x_1) - F(x_0) \quad (7.3-51)$$

となってしまう ($F(x)$ は $f(x)$ の原始関数)。つまり作用は端点 (境界条件) のみで決まってしまう。このことを反映して、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} (f(x)) = \frac{df(x)}{dx} \dot{x} \quad (7.3-52)$$

という自明な式になる。

ハミルトン形式に移行する。運動量は

$$P_x = f(x) \quad (7.3-53)$$

となるので拘束が入る。ハミルトニアンは 0 となり、primary 拘束に対応する未定乗数をつけて

$$H = \lambda(P_x - f(x)) \quad (7.3-54)$$

となる。正準方程式は

$$\dot{P}_x = \lambda \frac{df(x)}{dx} \quad (7.3-55)$$

$$\dot{x} = \lambda \quad (7.3-56)$$

である。この式から λ を消去すると

$$\dot{P}_x = \dot{x} \frac{df(x)}{dx} \quad (7.3-57)$$

となって (7.3-52) と同じ、自明な式となる。

λ は \dot{x} になるので、なんでもいいというわけにはいかなくて、境界条件から

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda dt = x_1 - x_0, \quad \lambda(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_1) = x_1 \quad (7.3-58)$$

を満たす関数である必要がある。つまり、

$$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(n\pi \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0) \right) \quad (7.3-59)$$

で、係数 A_n は $\int_{t_0}^{t_1} \lambda dt = x_1 - x_0$ からくる制限がつく。

今考えている位相空間は $P_x - f(x) = 0$ を満たす部分だけが生き残るので、1 次元の空間 (曲線) である。拘束のハミルトニアンベクトル場 $\{*, P_x - f(x)\}_{PB}$ によって作られる流れはこの曲線の上を進む流れになる。この流れの方向に動いても物理が変わらない、というのが A_n の任意性の正体である。

話を 2 次元にして

$$L = f_x(x, y)\dot{x} + f_y(x, y)\dot{y} \quad (7.3-60)$$

にすると、少し状況が変わってくる。この場合は二つの拘束

$$\Phi_x = P_x - f_x(x, y) \quad (7.3-61)$$

$$\Phi_y = P_y - f_y(x, y) \quad (7.3-62)$$

が出るが、この二つは

$$\{\Phi_x, \Phi_y\}_{\text{PB}} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} \quad (7.3-63)$$

となって交換しない ($\text{rot } \vec{f} = 0$ だと交換する)。よって 2nd-class の拘束がある。

7.4 電磁場の正準形式

7.4.1 作用と不变性

電磁場はもっとも有名な冗長系（ゲージ不变性を持つ系）である。

電磁場の作用は

$$\int \left(-\frac{1}{2} (\star F) \cdot F + A \cdot j \right) \quad (7.4-1)$$

または

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right) \quad (7.4-2)$$

で、ここから出る運動方程式は

$$d. ((\star F) \cdot j) = 0 \quad \text{または} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad (7.4-3)$$

となる。これを 4 元ベクトルポテンシャルを使って書くと、

$$d. ((\star(\star A)) \cdot j) = 0 \quad \text{または} \quad \underbrace{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{\mathbf{K}^{\mu\nu}} + j^\nu = 0 \quad (7.4-4)$$

である。後ろの式は

$$\underbrace{(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu}_{\mathbf{K}^{\mu\nu}} = j^\mu \quad (7.4-5)$$

となるが、この微分演算子 $\mathbf{K}^{\mu\nu}$ には Ker がある。行列とみなして、前から ∂_μ を掛けても、後ろから ∂_ν を掛けても 0 である。右辺が ∂_μ を掛けて 0 となるのは、電流密度の保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ からくる。

\mathbf{K} を微分形式の言葉で書けば $d \star d$ であり、これも前に d がついても後ろに d がついても 0 となり、理屈にあってる。

7.4.2 正準形式

場の運動量を計算すると

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad (7.4-6)$$

であるが、すぐにわかることは $\pi^0 = 0$ である。

$$\pi^i = -F^{0i} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (7.4-7)$$

よってハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4} \underbrace{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}} - j^\mu A_\mu \\ &= \pi^i (\pi^i + \partial_i A_0) - \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - j^\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - j^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (7.4-8)$$

である。正準方程式を確認しておくと、

$$\{A_i, H\}_{\text{PB}} = \pi^i + \partial_i A_0 \quad (7.4-9)$$

$$\{\pi^i, H\}_{\text{PB}} = \partial_j F^{ji} + j^i \quad (7.4-10)$$

となるが、(7.4-9) は π^i が $-F^{0i}$ であるとの確認のようなもの。(7.4-10) は Maxwell 方程式 $\partial_\mu F^{\mu i} = j^i$ である。

この拘束の時間発展を計算するため、 Z_H を掛けよう^{†9}。

$$Z_H(\pi^0) = \{\pi^0, H\}_{\text{PB}} = \partial_i \pi^i + j^0 \quad (7.4-11)$$

$$\begin{aligned} Z_H(\partial_i \pi^i + j^0) &= \frac{\partial j^0}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \{\pi^i(x), H\}_{\text{PB}}}_{\partial_j F^{ji} + j^i} + \underbrace{\{j^0, H\}_{\text{PB}}}_0 \\ &= \frac{\partial j^0}{\partial t} + \underbrace{\partial_i \partial_j F^{ji}}_0 + \partial_i j^i = \partial_\mu j^\mu = 0 \end{aligned} \quad (7.4-12)$$

となって、これ以上の拘束条件は出ない。primary の $\pi^0 = 0$ と secondary の $\partial_i \pi^i + j^0 = 0$ は互いに交換する (1st-class)。

7.4.3 拘束ゲージ変換の generator

ここで、二つの拘束がどのような変換を作り出すかを書いてみると、

$$X_{\pi_0} = \{\ast, \pi^0\}_{\text{PB}} = \frac{\partial}{\partial A_0} \quad (7.4-13)$$

^{†9} Z_H は $\frac{\partial}{\partial t}$ を含むが、この時間に関する偏微分の意味は、「正準変数の引数に含まれる時間は無視して、その外にある「あらわな時間依存性」の部分を微分する」ということ。 $f(t, \{p_i(t), q_i(t)\})$ の最初の t だけを微分する。電流密度 j^μ は今は外場なので、 t が入っている。

$$X_{\partial_i \pi^i + j^0} = \{*, \partial_i \pi^i + j^0\}_{PB} = \partial_i \frac{\partial}{\partial A_i} \quad (7.4-14)$$

である。 $\mathbf{G} = \Lambda_1 \pi_0 + \Lambda_2 (\partial_i \pi^i + j^0)$ による変換を考えると、

$$\{A_0, \mathbf{G}\}_{PB} = \lambda_1 \quad (7.4-15)$$

$$\{A_i, \mathbf{G}\}_{PB} = -\partial_i \lambda_2 \quad (7.4-16)$$

となる。ゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ と一致させるには、 $\Lambda_1 = \partial_0 \Lambda, \Lambda_2 = -\Lambda$ とパラメータを調節する必要がある。

この制約がつく理由は、 \mathbf{G} の時間発展（というよりは、 Z_H と X_G の交換関係）を考えてみるとわかる。

$$Z_H X_G - X_G Z_H = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} \pi_0 + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t} (\partial_i \pi^i + j^0) + \Lambda_1 (\partial_i \pi^i + j^0) \quad (7.4-17)$$

これは 0 になるべきだが、primary constraint である π^0 に比例する部分は残ってもよい。なぜならハミルトニアンには $\lambda \pi^0$ のようなラグランジュ未定乗数を掛けた項が付け加えられており、この λ を変換することで π^0 に比例するすれば消去できるからである。secondary constraint はハミルトニアンへの付加項はないのでこれに比例する項は 0 にならねばならず、 $\frac{\partial \Lambda_2}{\partial t} + \Lambda_1 = 0$ でなくてはならない（菅野 [6] などを参照）。

第8章 経路積分による量子化と拘束系

8.1 古典論と量子論の違い

いよいよ、ここまで考えてきた拘束系の量子論に話を進めよう。

正準形式の古典論は、物理量がすべて正準座標 $\{z^i\} = \{\{q^i\}, \{p_i\}\}$ の関数として表現され、古典力学的な「状態」は位相空間内では一個の点 $q^i = a^i, p_i = b_i$ である。そして状態の「時間発展」は図 8-1 に描いたように^{†1}、位相空間 \times 時間 $((\{p_i\}, \{q^i\}), t)$ という空間の中に描かれた 1 本の途切れない線である。

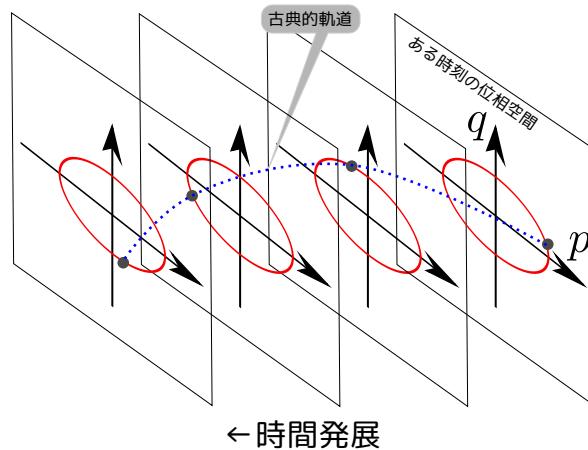


図 8-1 古典的調和振動子の位相空間と、その時間発展

時間発展（位相空間の点から位相空間の別の点への移動）は H のハミルトニアンベクトル場 X_H で表現される。

この段階で（まだ古典論だが）すでに「物理量は演算子に対応する」関係がつけられていることに注意しよう。たとえば運動量演算子のハミルトニアンベクトル場 X_p は物体の位置の並進を表す。

量子理論になると変わる点を述べていこう。まず、「状態」が「位相空間の点」ではなくなる。というより、位相空間という空間 $((\{p_i\}, \{q^i\})$ が作れない。量子力学における状態は p_i と q^i のどちらか片方しか指定できないからである^{†2}。古典力学では「 q と p は（Poisson 括弧の意味で）交換しない」という言い方をする^{†3}。量子論における q, p は（Poisson 括弧の意味で）という注釈なしで

^{†1} 素粒子物理屋の時間発展の図はたいてい、「右が過去、左が未来」にする。 $|\psi\rangle$ が始状態、 $\langle\psi|$ が終状態であることが多いからだろう。

^{†2} これはいわゆる不確定性原理である。 q を指定するとそれに共役な位相空間座標である p は最大に不確定となる。

^{†3} ところが古典論では X_q と X_p は X_1 だから交換する。

「本気で交換しない」。それゆえに位相空間 $(\{p\}, \{q\})$ や、位相空間内の関数 $f(\{p\}, \{q\})$ は存在できないのである。よって、 $|x\rangle$ や $|p\rangle$ のような「座標か運動量か、どっちかだけを指定した状態」を基底に選ぶ^{†4}。

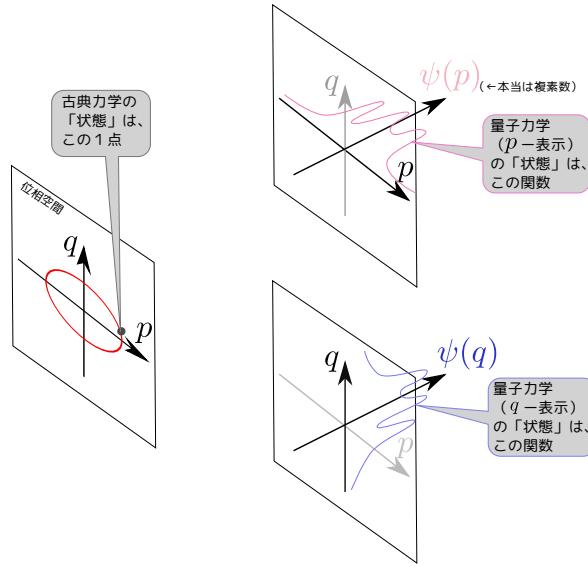


図 8-2 古典的「状態」と、量子的「状態」

量子力学的状態は、波動関数で表現されるとよく言うが、いわゆる波動関数 $\psi(x, t)$ は、状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を

$$|\psi(t)\rangle = \int dx \psi(x, t) |x\rangle \quad (8.1-1)$$

のように基底ベクトル $|x\rangle$ を基底として分解した「成分」に過ぎない。くどいようだが本講義のスローガンを繰り返すと「物理の世界では座標系によらない表現のほうがえらい」ので、 $|\psi(t)\rangle$ の方がえらい^{†5}。なお、

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (8.1-2)$$

が成り立つように $|x\rangle$ という基底の双対基底 $\langle x|$ をもってくれば、

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle \quad (8.1-3)$$

が成り立つ。これから、任意の状態に対して

$$|\psi(t)\rangle = \int dx \psi(x, t) |x\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\psi(t)\rangle \quad (8.1-4)$$

^{†4} この「基底にどっちを選んでもいい」という状況の古典力学での対応物は「座標と運動量を交換する正準変換」(4.5.2 項) である。
^{→ p131}

^{†5} 逆に言えば、量子力学の最初の方で習う $\psi(x, t)$ はえらくない。初心者向けなのだから仕方ない。

が言える。つまり、

$$1 = \int dx |x\rangle \langle x| \quad (8.1-5)$$

である（左辺の 1 は恒等演算子）。

同じ状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を

$$|\psi(t)\rangle = \int dp \psi(p, t) |p\rangle \quad (8.1-6)$$

のように「運動量空間の基底」で分解して示すこともできて、

$$1 = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (8.1-7)$$

である。

古典力学でも正準変換によって「何が座標で何が運動量か」をある程度制御することができたから、「量子力学的状態をどの変数を使って表現するか」もある程度は制御可能である。

調和振動子の場合、エネルギー E と角変数 θ を位相空間の座標として使うこともできた。そのときは E は時間発展しない変数になり、角変数 θ は（名前の通り）周期 2π の有限区間の変数となった（このあたり、量子論ではさらにいろいろややこしくなる）。

さてここで「古典論では x, p が独立な変数だったが、量子論の状態では x か p か、どちらかの変数しか取れない」事実から「量子論の方が考えている空間が狭い」ような誤解を生むかもしれない。しかし気をつけなくてはいけないことは、 x, p は古典力学においては「変数」だが、量子力学ではそうでない。量子力学の力学変数となるものは $|\psi(t)\rangle$ （あるいはその成分としての $\psi(x, t)$ など）であり、 x と p はその変数の成分を区別するためのラベルに過ぎないのである。 $\psi(x, t)$ の x は x^1, x^2, \dots と書いたときの添字 $1, 2, \dots$ に対応する（一つの文字を複数の意味で使っている^{†6}）。

なお、量子力学において「ラベルとして採用できる座標」は、symplectic form を $dp^i \wedge dx^i$ と書いたときの片方である。「Poisson 括弧の意味で交換する（symplectic form を内積の計量とした場合に直行する）変数」の最大の組み合わせになる。

8.2 量子力学的状態を表すための基底

1 変数でグラスマン偶の場合を考えよう。 $|q\rangle$ は演算子 \hat{q} に対する固有状態、 $|p\rangle$ は演算子 \hat{p} に対する固有状態である。

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (8.2-1)$$

これを見ると、「2つの基底の関係は？」と気になるだろう。まず \hat{p} という演算子が $|q\rangle$ を基底とする表現でどのように記述されるかを見てみよう。つまり $\langle q|\hat{p}|q'\rangle$ を考えるのだが、そのための手が

^{†6} 「座標」という意味があり、「波動関数のラベル」である x と、物体のいる場所という意味のある x があるわけだが、どちらも「位置の表現」であるし、同じ単位（たとえばメートル）で測るものだし、同じ文字を使いたくなるのも当然と言えば当然。

かりは $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ ^{†7} である。

$$\begin{aligned}
 \langle q | [\hat{q}, \hat{p}] | q' \rangle &= i \langle q | q' \rangle \\
 \langle q | \hat{q} \hat{p} - \hat{p} \hat{q} | q' \rangle &= i \delta(q - q') \\
 (q - q') \langle q | \hat{p} | q' \rangle &= i \delta(q - q')
 \end{aligned} \tag{8.2-2}$$

となる。

ここで、0 である量 $(q - q')\delta(q - q')$ を q で微分すると 0 であるという式

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial q} ((q - q')\delta(q - q')) &= 0 \\
 \delta(q - q') + (q - q') \frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q') &= 0 \\
 -i(q - q') \frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q') &= i \delta(q - q')
 \end{aligned} \tag{8.2-3}$$

を作る。この式から $\langle q | \hat{p} | q' \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q')$ と考えてしまいそうになるが、任意の関数 $A(q)$ に対して $(q - q')\delta(q - q')A(q) = 0$ であることを考えると、 $\langle q | \hat{p} | q' \rangle$ に $A(q)\delta(q - q')$ を加えても (8.2-2) は成り立つことに気づく。よって、

$$\langle q | \hat{p} | q' \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q') + A(q)\delta(q - q') \tag{8.2-4}$$

と書くことができる ($A(q)$ は多くの場合は 0 にするのでここでもそうしておこう^{†8})。

次に $\langle q | p \rangle$ という量を考えると、

$$\underbrace{\langle q | \hat{p} | p \rangle}_{-i \frac{\partial}{\partial q} \langle q |} = \underbrace{\langle q | \hat{p} | p \rangle}_{p | p \rangle} \tag{8.2-5}$$

となることで $\langle q | p \rangle$ の微分方程式が $-i \frac{\partial}{\partial q} \langle q | p \rangle = p \langle q | p \rangle$ ができて、

$$\langle q | p \rangle = C e^{ipq} \tag{8.2-6}$$

が解となる。未定の定数 C は $\langle q | q' \rangle$ が $\delta(q - q')$ になるように決める。具体的には、

$$\int dp \langle q | p \rangle \langle p | q' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(q-q')} \tag{8.2-7}$$

†7 今は $\hbar = 1$ 。

†8 $A(q)$ が出てくること自体を無視している本も多い。無視していない教科書の例としては [13] がある。この $A(q)$ の入り方が位相変換に対する共変微分と同じ、というのは興味深いところ。

となればいいので、 $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha}$ とする (α は多くの場合 0 にする)。

これで 2 つの基底の間に

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq |q\rangle e^{ipq} \quad (8.2-8)$$

という関係が生まれたわけだが、なんのこっちゃない、これは普通の Fourier 変換である。



後で出す経路積分の話からすると、この「フーリエ変換」は作用に pq を加えるという計算であり、これはつまり「運動量と座標を取り替える正準変換」なのだ。

状態の表し方が違うことはわかったので、次に時間発展の違いを考えよう。量子力学の「演算子形式」での時間発展は古典力学との違いは $\{*, H\}_{\text{PB}}$ が $i\{*, H\}$ に変わるだけである。

8.3 演算子形式から経路積分の導出

伝播関数は初期状態 (q_i, t_i) 、終状態 (q_f, t_f) とすると、

$$\langle q_f, t_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i, t_i \rangle \quad (8.3-1)$$

である。伝播関数を表現する方法はいろいろあるが、ここでは Schrödiger 表示で表現することにする。

$|q_i, t_i\rangle$ の意味は、「時刻 t_i での演算子 \hat{q} の固有値が q_i の固有状態」である。すなわち、

$$\hat{q} |q_i, t_i\rangle = q_i |q_i, t_i\rangle \quad (8.3-2)$$

ということである^{†9}。

初期状態 $|q_i, t_i\rangle$ は「時刻 t_i において粒子が q_i という点に局在している」状態である。これが、ハミルトニアン H にしたがって時間発展し、時刻 t_f においては $e^{-iH(t_f - t_i)} |q_i, t_i\rangle$ という状態になる。その中に、 $|q_f, t_f\rangle$ すなわち、「時刻 t_f において粒子が q_f という点に局在している」状態がどの程度含まれているかを、 $\langle q_f, t_f |$ を前からかけることによって評価する。

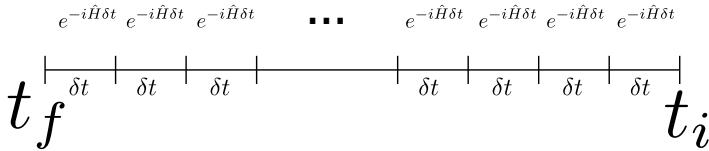
自由粒子のような簡単な模型の場合、この関数の計算も容易であるが、複雑な理論ではけっこうめんどうになる。そのため、この関数を上手に計算する方法をいろいろ知っておかなくてはいけない。その一つの方法が経路積分 (path integral) である。ここでは、上の式を書き直すことで経路積分を導出する。

^{†9} Heisenberg 表示で考える場合は、状態が時間発展しないから計算すべきものは $\langle q_f | \Big|_{t_f} |q_i\rangle \Big|_{t_i}$ となる。この状態 $|q_i\rangle \Big|_{t_i}$ は、「時刻 t_i における座標演算子 $\hat{q}(t_i)$ の固有状態」を表す。時刻が違えば $\hat{q}(t)$ が違うので、違う時刻の $\hat{q}(t)$ にたいする固有状態も違う状態となる。これが、「Heisenberg 表示では状態は時間に依存しない」にもかかわらず、 $\Big|_{t_i}$ のような時刻指定がついている理由である。

この式を経路積分に書き直すには、まず時間を微小区間 δt ごとに分割し、

$$e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} = \prod_{I=1}^N e^{-i\hat{H}\delta t} \quad (\delta t = \frac{t_f - t_i}{N}) \quad (8.3-3)$$

とおく。



つまり、時刻を $t_i, t_i + \delta t, t_i + 2\delta t, \dots, t_f - \delta t, t_f$ というふうに、合計 $N + 1$ 個の点に離散化したわけである。

そして、その 1 節ごとに、

$$\int dq_I |q_I\rangle \langle q_I| = 1 \quad (8.3-4)$$

という完全系をはさむ。この $|q_I\rangle$ は

$$\hat{q}|q_I\rangle = q_I|q_I\rangle \quad (8.3-5)$$

を満足する固有状態である。 q_I の添字 I は時間順序を示すが、 q_I それぞれは単なる積分のダミー変数である（量子的な演算子ではなく、数である）。

この 1 を $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の前後にはさんでいくと

$$\begin{aligned} \int dq_{N-1} \cdots dq_I \cdots dq_2 dq_1 \langle q_f | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \\ \times \langle q_{I+2} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{I+1} \rangle \langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \langle q_I | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{I-1} \rangle \cdots \\ \times \langle q_3 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_i \rangle \end{aligned} \quad (8.3-6)$$

となる。 $q_0 = q_i$ と $q_N = q_f$ については固定されているので積分はない。ここで

$$\langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \quad (8.3-7)$$

を計算することを考える^{†10}。

\hat{H} の中には演算子 \hat{p}, \hat{q} が入っているはずであるが、このうち \hat{q} は、 $|q_I\rangle$ または $\langle q_{I+1}|$ にあてれば固有値 q_I または q_{I+1} に変わる。ここでは \hat{q} が \hat{p} より右側にあると仮定しよう。この場合、 \hat{H} の中の \hat{q} は全て q_I に変わる^{†11}。残った \hat{p} を処理するため、運動量演算子 $\hat{p}(t_i + I\delta t)$ の固有状態 $|p_I\rangle$ を使って、

$$\int dp_I |p_I\rangle \langle p_I| \quad (8.3-8)$$

^{†10} Heisenberg 表示で考えているなら、この $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の挿入は要らない。しかし、 $\langle q_{I+1}|$ と $|q_I\rangle$ の関係が単純ではないので、その部分を考慮して考えると、結局同じ計算になる。

^{†11} \hat{p} と \hat{q} が対称な形で入っている時は $\hat{q} \rightarrow \frac{q_I + q_{I+1}}{2}$ と置き換えればよいことが証明できるが、ここでは省略する。

を $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の前にはさむ。すると、 \hat{H} 内の \hat{p} は固有値 p_I になり、 \hat{H} は結局、 $H(p_I, q_I)$ という数に置き換わる。よって (8.3-7) は、

$$\int dp_I \langle q_{I+1} | p_I \rangle e^{-iH(p_I, q_I)\delta t} \langle p_I | q_I \rangle \quad (8.3-9)$$

となるが、

$$-i \frac{\partial}{\partial q} \langle q | p \rangle = \langle q | \hat{p} | p \rangle = p \langle q | p \rangle \quad (8.3-10)$$

と

$$\langle q | q' \rangle = \int dp \langle q | p \rangle \langle p | q' \rangle = \delta(q - q') \quad (8.3-11)$$

から、 $\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq}$ なることを使えば、

$$\frac{1}{2\pi} \int dp_I e^{i(p_I \frac{q_{I+1} - q_I}{\delta t} - iH(p_I, q_{I+1}))\delta t} \quad (8.3-12)$$

のような形の数になる。 $\delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると、 $\frac{q_I - q_{I+1}}{\delta t} = \frac{dq}{dt}$ となることを考えると、求めるべき確率振幅は

$$\langle q_f, t_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i, t_i \rangle = \int Dp Dq e^{i \int (p \frac{dq}{dt} - H) (t_f - t_i)} \quad (8.3-13)$$

という形になる。ここで

$$Dp Dq = \prod_{I=1}^N \frac{dp_I dq_I}{2\pi} \quad (8.3-14)$$

は $2N$ 重積分である。 N はいずれ ∞ になるので、無限回の積分を行わなくてはいけない。この積分は $q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f$ となるような境界条件をつけて行うとする。

ハミルトニアンが $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ の場合で考えてみると

$$\int Dp Dq e^{i \int \left(p \dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q) \right) dt} = \int Dp Dq e^{i \int \left(-\frac{(p - m\dot{q})^2}{2m} + \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) dt} \quad (8.3-15)$$

p 積分は他と分離しているので先に実行でき、この答えが \mathcal{N} だったとすれば、

$$\mathcal{N} \int Dq e^{i \int \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) dt} \quad (8.3-16)$$

となる。結局、 \exp の肩に $i \times$ (作用) をのせて積分すれば確率振幅が得られることがわかる。^{†12}

このことの意味を古典力学との対応から考えてみる。古典力学においては作用が停留値を取るところが運動方程式の解であった。経路積分を行う時、 I が激しく変化している場所は e^{iI} が速く振動しているならば、積分した時の寄与が小さい。積分にもっとも強く効くのは I の変化が小さいと

^{†12} より一般的な場合、これは必ずしも正しくない。 p 積分の結果が定数にならない場合などが有り得る。

ころ、すなわち I が停留値を取る付近になる。つまりこの積分の結果にもっとも寄与するのは古典的運動方程式の解付近であると言える。

量子力学の特徴として、二つの古典的経路がありえる時、あたかもその両方の経路を通ってきた波が干渉するかのごとき現象が起ったが、それも経路積分の立場では両方の経路を対等に積分する必要があることから理解できる。量子力学から（その近似として）古典力学が導ける理由は、「古典力学的に許される運動」が「ありとあらゆる経路のうち、作用が極値となっているような経路」で表現されるからであった（そうでない経路は重ね合わせによって消されてしまう）。

経路積分は各時刻ごとに

$$dz^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^{2N} \quad (8.3-17)$$

を積分要素として積分がされる。正準変換による座標の微小変位の変換は行列 $\mathbf{J}^M{}_N \equiv \frac{\partial z^M}{\partial Z^N}$ ((4.4-4)を参照) を使って、
 \rightarrow p129

$$dz^M = \mathbf{J}^M{}_N \underbrace{dZ^N}_{(8.3-18)}$$

と行われるから、

$$dz^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^{2N} = \det \mathbf{J} dZ^1 \wedge dZ^2 \wedge \cdots \wedge dZ^{2N} \quad (8.3-19)$$

となることはすぐにわかる。

8.4 拘束系の経路積分

拘束されてない系 $\{z^i\}$ から拘束された系 $\{(z^i)^\perp\}$ への変換は正準変換ではないし、 z^\perp を全部積分しても位相空間全体を覆わない（拘束された位相空間の中だけを積分する）。

$$d(z^1)^\perp \wedge d(z^2)^\perp \wedge \cdots \wedge d(z^{2N})^\perp \quad (8.4-1)$$

のような積分は、必然的に「数えすぎ」である。ゆえに、 $\prod_\alpha \delta(\Phi_\alpha)$ のような数え過ぎを抑制する因子をつけておかなくてはいけない。

積分測度は

$$dz^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^{2N} \mathcal{N} \prod_\alpha \delta(\Phi_\alpha) \quad (8.4-2)$$

のように、デルタ関数と、ある因子がつく。その因子は、行列 $\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{PB}$ の Pfaffian（計算結果は行列式の平方根になる）であることがわかっている。

拘束 $\{\Phi^i\}$ は必ず偶数個ある^{†13}ので、 $2M$ 個あるとしよう（位相空間の次元は $2N$ だとする）。ここで反対称行列 \mathbf{A} は適切な行列 \mathbf{P} をもってきて $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ が ω になるようにすることができる。つ

^{†13} 行列 $\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{PB}$ は反対称行列で、奇数次の反対称行列の \det は 0 だからである（この場合、拘束に 1st-class が混ざっている）。

まり、 $\tilde{\Phi}^\alpha = P^\alpha \tilde{\Phi}^{\alpha'}$ とすることで $\{\tilde{\Phi}^\alpha, \tilde{\Phi}^\beta\}_{\text{PB}} = \omega^{\alpha\beta}$ にできるということだが、これはつまり $\{\tilde{\Phi}^\cdot\}$ の半分を座標、半分を運動量のように書くことができるということを意味する。その「座標と運動量」を Q^α, P_β (α, β は 1 から M) と書くことになると、 $\{z^{1 \rightarrow 2N}\} \rightarrow \{Q^{1 \rightarrow M}, P_{1 \rightarrow M}, z^{2M+1 \rightarrow 2N}\}$ は正準変換である。正準変換だから、積分測度は変わらない。そして、この積分測度

$$\prod dQ^\cdot \prod dP_\cdot dz^{2M+1} \wedge \cdots \wedge dz^{2N} \prod \delta(\tilde{\Phi}^\cdot) \quad (8.4-3)$$

を、元の形に戻すと、デルタ関数の部分に

$$\prod \delta(\tilde{\Phi}^\cdot) = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \delta(\Phi^\cdot) \quad (8.4-4)$$

という因子が係る。 $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \omega$ で $\det \omega = 1$ であることを思うと、

$$(\det \mathbf{P})^2 \det \mathbf{A} = 1 \quad (8.4-5)$$

つまりは $\frac{1}{\det \mathbf{P}} = \sqrt{\det \mathbf{A}}$ となる。

以上より、

$$\int Dp Dq e^{i \int p_i \frac{dq^i}{dt} - H} \sqrt{\det (\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{\text{PB}})} \prod_\alpha \delta(\Phi_\alpha) \quad (8.4-6)$$

というのが拘束系の経路積分となる。

特に、1st-class constraint が $\{\phi^\cdot\}$ で対応するゲージ固定条件が $\{\chi^\cdot\}$ であった場合は行列が

$$\{\Phi, \Phi\}_{\text{PB}} = \begin{pmatrix} \phi & \chi \\ \phi & 0 & \{\phi, \chi\}_{\text{PB}} \\ \chi & \{\chi, \phi\}_{\text{PB}} & \{\chi, \chi\}_{\text{PB}} \end{pmatrix} \quad (8.4-7)$$

の形（ ϕ どうしは交換することに注意）なので、 $\sqrt{\det (\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{\text{PB}})} = \det \{\phi^\alpha, \chi^\beta\}_{\text{PB}}$ となる。

デルタ関数は

$$\delta(\Phi) \propto \int D\Lambda e^{i \int \Lambda^\alpha \Phi^\alpha} \quad (8.4-8)$$

と表現することもできるので、

$$\int Dp Dq D\Lambda e^{i \int \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H + \sum_\alpha \Lambda^\alpha \Phi^\alpha \right) dt} \sqrt{\det (\{\Phi^\alpha, \Phi^\beta\}_{\text{PB}})} \quad (8.4-9)$$

のように書くこともできる。

なお、この \det の部分も経路積分の「肩に乗せる」ことができて、それが次の章で述べる「ゴースト場」の起源になっている。

第9章 微分形式としてのゴースト場と BV 形式

9.1 ゴースト場の導入

BRST 形式で「ゴースト」という名前で導入される場の、微分形式としての意味を述べておく。

ゲージ不变性がある系のような「冗長系」を「ゲージ固定」して「拘束系」を作るときに導入されるのが「ゴースト座標」である。微分形式において 1-form の基底は、微小変位 dx^μ と解釈することも、「方向を表現する基底」 $|dx^\mu\rangle$ と解釈することもできた。外微分の際に掛けられる演算子 $|dx^\mu\rangle \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は「 x^μ の変化する方向への変化」を加えるという操作であったが「ゲージ変換する」2 操作もそれと同様に考えて、微分を拘束（ゲージ変換の generator）によるハミルトニアンベクトル場に置き換えて、さらに「ゲージ変換方向の微分を表現するための基底」を別に $|C^\alpha\rangle$ として導入し、

$$d_G = |C^\alpha\rangle X_{G_\alpha} \wedge \quad (9.1-1)$$

を「ゲージ変換に対応する外微分のような演算子」と考える。この「外微分」を使って n -form を使って行った計算と同じような計算を行っていくには d_G という演算も $d_G^2 = 0$ を満たしているとありがたい。そのためにはどうすればよいかというと、

$$\begin{aligned} d_G^2 &= d_G (|C^\alpha\rangle X_{G_\alpha}) = (d_G |C^\alpha\rangle) X_{G_\alpha} + |C^\beta\rangle \wedge |C^\alpha\rangle X_{G_\beta} X_{G_\alpha} \\ &= (d_G |C^\alpha\rangle) X_{G_\alpha} + \frac{1}{2} |C^\beta\rangle \wedge |C^\alpha\rangle [X_{G_\beta}, X_{G_\alpha}] \\ &= (d_G |C^\alpha\rangle) X_{G_\alpha} + \frac{1}{2} |C^\beta\rangle \wedge |C^\alpha\rangle f_{\beta\alpha}^\gamma X_{G_\gamma} \end{aligned} \quad (9.1-2)$$

となるから、

$$d_G |C^\gamma\rangle = -\frac{1}{2} |C^\beta\rangle \wedge |C^\alpha\rangle f_{\beta\alpha}^\gamma \quad (9.1-3)$$

であれば $d_G^2 = 0$ になる。

この $(|C^\cdot\rangle)$ を加えることによって) 拡張された空間の中の外微分 d_G による変換を「BRST 変換」と呼ぶ。

我々がほしい「物理的状態」は、 X_{G_\cdot} を掛けたら 0 になり (closed)、かつ X_{G_\cdot} によってできる流れの中の代表である。つまりは $\frac{\text{Ker } X_{G_\cdot}}{\text{Img } X_{G_\cdot}}$ であるが、この「 C^α という基底を使って拡張された空間」では $\frac{\text{Ker } d_G}{\text{Img } d_G}$ が物理だ。

基底ベクトルであることを示す $\langle \rangle$ を外して、 C^α を「場」のように扱おう。この場は $C^\alpha C^\beta = -C^\beta C^\alpha$ を満たさなくてはならないから、フェルミオン（グラスマン奇）である。

この d_G という操作の (x, p) を変化させる部分を $\{*, C^\alpha G_\alpha\}_{PB}$ のように Poisson 括弧で表現することにしよう。 d_G のうち C^α を変換させる部分は

$$-\frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^{\alpha} \underbrace{C^\beta C^\gamma}_{P_{C^\alpha}} \quad (9.1-4)$$

との Poisson 括弧で表現できる。ここで現れた P_{C^α} は「 C^α に対する運動量」で、 $\{C_\alpha, P_{C_\beta}\}_{PB} = \delta_{\alpha\beta}$ となるよう定義されている。 C^α はグラスマン奇なので、

$$\{A, B\}_{PB} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial C^\alpha} \frac{\partial B}{\partial P_{C^\alpha}}}_{\text{ゴースト座標部分}} + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial P_{C^\alpha}} \frac{\partial B}{\partial C^\alpha}}_{\text{運動量部分}} \quad (9.1-5)$$

がゴースト座標部分の Poisson 括弧の定義となる。これにより、 $P_{C^\alpha} = \frac{\partial}{\partial C^\alpha}$ とみなすことができる。

こうして

$$Q_B = C^\alpha G_\alpha - \frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^{\alpha} \underbrace{C^\beta C^\gamma}_{P_{C^\alpha}} \quad (9.1-6)$$

という、グラスマン奇な量との Poisson 括弧で d_G が表現できることになった。

$$\{Q_B, Q_B\}_{PB} = 0 \quad (9.1-7)$$

であることはすぐに確認できる（グラスマン奇な量どうしの Poisson 括弧なので、「反対称性から自明に 0」ではないことに注意）。

こう表現したことで、

$$\{P_{C^\alpha}, Q_B\}_{PB} = G_\alpha - \frac{1}{2} f_{\alpha\gamma}^{\beta} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} + \frac{1}{2} f_{\gamma\alpha}^{\beta} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} = G_\alpha - f_{\alpha\gamma}^{\beta} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} \quad (9.1-8)$$

となる^{†1}。

この式は内部積と外微分の反交換関係が Lie 微分になるという式(1.20-15)とまったくパラレルである。この場合、BRST 変換が外微分に、ゲージ変換が Lie 微分に対応する。
→ p⁷⁰

この結果を

$$G_\alpha \equiv G_\alpha - f_{\alpha\gamma}^{\beta} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} \quad (9.1-9)$$

と書くことにすると、

$$\{C^\alpha, G_\beta\}_{PB} = f_{\beta\gamma}^{\alpha} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} = f_{\beta\gamma}^{\alpha} \underbrace{C^\gamma}_{P_{C^\beta}} \quad (9.1-10)$$

$$\{P_{C^\alpha}, G_\beta\}_{PB} = -f_{\beta\alpha}^{\gamma} \underbrace{P_{C^\gamma}}_{P_{C^\beta}} = f_{\alpha\beta}^{\gamma} \underbrace{P_{C^\gamma}}_{P_{C^\beta}} \quad (9.1-11)$$

^{†1} 文献によっては、この $\delta P_{C^\alpha} = G_\alpha$ となる変換を Koszul-Tate differential などと呼んで、上で考えた form の基底である C^α の変換とは別に取り扱っている。たとえば [15]などを参照。両方合わせた（さらに微調整を加えた）のが BRST 変換。

のように、 \mathcal{G} によってゴースト座標も（ゲージ変換の生成子の受ける変換と同じタイプの）変換を受ける。

$$\{\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta\}_{\text{PB}} = \left\{ G_\alpha - f_{\alpha\delta} \underbrace{C^\delta}_{\gamma} P_{C^\gamma}, G_\beta - f_{\beta\delta'} \underbrace{C^{\delta'}}_{\gamma'} P_{C^{\gamma'}} \right\}_{\text{PB}} \quad (9.1-12)$$

$$= \{G_\alpha, G_\beta\}_{\text{PB}} + \left\{ f_{\alpha\delta} \underbrace{C^\delta}_{\gamma} P_{C^\gamma}, f_{\beta\delta'} \underbrace{C^{\delta'}}_{\gamma'} P_{C^{\gamma'}} \right\}_{\text{PB}} \quad (9.1-13)$$

$$\begin{aligned} &= f_{\alpha\beta} \underbrace{G_\gamma}_{\gamma} - C^{\delta'} \left\{ f_{\alpha\delta} \underbrace{C^\delta}_{\gamma} P_{C^\gamma}, f_{\beta\delta'} \underbrace{C^{\delta'}}_{\gamma'} P_{C^{\gamma'}} \right\}_{\text{PB}} P_{C^\gamma} + C^\delta \left\{ f_{\alpha\delta} \underbrace{C^\delta}_{\gamma} P_{C^\gamma}, f_{\beta\delta'} \underbrace{C^{\delta'}}_{\gamma'} P_{C^{\gamma'}} \right\}_{\text{PB}} P_{C^{\gamma'}} \\ &= f_{\alpha\beta} \underbrace{G_\gamma}_{\gamma} - \left(f_{\alpha\gamma'} \underbrace{f_{\beta\delta}}_{\gamma'} + f_{\alpha\delta} \underbrace{f_{\beta\gamma'}}_{\gamma} \right) C^\delta P_{C^\gamma} \end{aligned} \quad (9.1-14)$$

$$\begin{aligned} &= f_{\alpha\beta} \underbrace{G_\gamma}_{\gamma} - \left(f_{\alpha\gamma'} \underbrace{f_{\beta\delta}}_{\gamma'} + f_{\beta\gamma'} \underbrace{f_{\alpha\delta}}_{\gamma} \right) C^\delta P_{C^\gamma} \\ &\quad - f_{\delta\gamma'} \underbrace{f_{\alpha\beta}}_{\gamma'} \text{(Jacobi)} \\ &= f_{\alpha\beta} \underbrace{G_\gamma}_{\gamma} + f_{\delta\gamma'} \underbrace{f_{\alpha\beta}}_{\gamma} C^\delta P_{C^\gamma} = f_{\alpha\beta} \underbrace{\left(G_\gamma - f_{\gamma\delta} \underbrace{C^\delta}_{\gamma} P_{C^\gamma} \right)}_{\gamma} = f_{\alpha\beta} \underbrace{G_\gamma}_{\gamma} \end{aligned} \quad (9.1-15)$$

となるので、 G が位相空間におけるゲージ変換の生成子なら、 \mathcal{G} はゴースト & 反ゴーストを含む位相空間におけるゲージ変換の生成子である。

9.2 物理的状態への条件

我々は考える状態を、

$$Q_B |\text{phys}\rangle = 0 \quad (9.2-1)$$

という条件（九後・小嶋条件）を満たす状態に限る。この状態を「物理的状態」と呼ぼう。外微分の言葉の真似をすれば、 Q_B という「外微分っぽい」演算子に対して closed な状態（「BRST-closed な状態」と呼ぼう）だけを「物理的」だとするのである。

物理的状態が

$$|\text{phys}\rangle = \left| \text{phys}^{(0)} \right\rangle + \left| \text{phys}^{(1)}_\alpha \right\rangle C^\alpha + \frac{1}{2} \left| \text{phys}^{(2)}_{\alpha\beta} \right\rangle C^\alpha C^\beta + \dots \quad (9.2-2)$$

のように、「ゴースト場」で展開^{†2}されるとしよう。これはあたかも、0-form, 1-form, 2-form, … をまとめて書いてるようなものである。そして 0-form にあたるゴースト座標を含まないパート $|\text{phys}^{(0)}\rangle$ が元の空間であるが、この空間に対する Q_B の作用の結果は

$$C^\alpha \overset{\square}{G_\alpha} |\text{phys}^{(0)}\rangle = 0 \quad (9.2-3)$$

である。つまりこの状態はゲージ不变な状態（ゲージ変換の生成子を掛けると 0 になる状態、すなわち $\text{Ker}(G_\alpha)$ ）である。

後で示すように、 Q_B はハミルトニアンと交換するように作る。ゆえに、物理的状態は時間発展の後も物理的状態の中に留まる。始状態が BRST 不変 (Q_B を掛けて 0) なら、終状態も BRST 不変である。

散乱振幅や物理量の期待値を考える時我々は $\langle \text{終状態} | \exp \left[-i \int H dt \right] | \text{始状態} \rangle$ のような量を考えるわけだが、 $|\text{始状態}\rangle \rightarrow |\text{始状態}\rangle + Q_B |\Lambda\rangle$ のような「BRST-exact なシフト」は散乱振幅に影響を与えない (Q_B は H と交換し、かつ $\langle \text{終状態} | Q_B = 0$ だから)。このあたりはゲージ変換 $A \rightarrow A + d\Lambda$ が電磁場 F に影響を与えないのと同様である。

こうして、ゲージ不变性を「BRST-exact な状態を加える」ことの不变性に読み替えることができた。

ゴースト場も入れた「空間」の中のゲージ変換の生成子は $\mathcal{G}_\alpha = \{P_{C^\alpha}, Q_B\}$ だった。物理的状態と物理的状態の間での散乱振幅においては、

$$\langle \text{phys} | \exp \left[-i \int H dt \right] \{P_{C^\alpha}, Q_B\} |\text{phys}\rangle \quad (9.2-4)$$

は 0 になることは Q_B が H と交換し、ブラとケット、どちらの物理的状態に掛けても 0 であることがからすぐにわかる。

例として 3 次元の角運動量と同じ代数

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \quad (9.2-5)$$

を持つ演算子を 1-st class の拘束として持つ系を考えてみる。この系の BRST チャージは

$$Q = c^i L_k - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} c^i c^j P_{c_k} \quad (9.2-6)$$

である。状態空間は

$$|\Phi\rangle = |\phi^{(0)}\rangle + c^i |\phi_i^{(-1)}\rangle + \frac{1}{2} c^i c^j |\phi_{ij}^{(-2)}\rangle + \frac{1}{3!} c^i c^j c^k |\phi^{(-3)}\rangle \quad (9.2-7)$$

と表されるので、

$$Q |\Phi\rangle = c^i L_i |\phi^{(0)}\rangle + c^i c^j L_i |\phi_j^{(-1)}\rangle - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} c^i c^j |\phi_k^{(-1)}\rangle$$

^{†2} この展開は、場の理論でよく使われる「Fock 表示」とは違っていて、いわば $\{C^\alpha\}$ による座標表示である。

$$+ \frac{1}{2} c^i c^j c^k L_i \left| \phi_{jk}^{(-2)} \right\rangle - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} c^i c^j \left(\frac{1}{2} c_m \left| \phi_{km}^{(-2)} \right\rangle - \frac{1}{2} c_m \left| \phi_{mk}^{(-2)} \right\rangle \right) \quad (9.2-8)$$

となり、条件は

$$L_i \left| \phi^{(0)} \right\rangle = 0 \quad (9.2-9)$$

$$\frac{1}{2} \left(L_i \left| \phi_j^{(-1)} \right\rangle - L_j \left| \phi_i^{(-1)} \right\rangle \right) - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left| \phi_k^{(-1)} \right\rangle \quad (9.2-10)$$

ここで、

$$\bar{L}_i \equiv \{P_{c^i}, Q\}_{\text{PB}} = L_i - \epsilon_{ijk} \underbrace{c^j}_{\text{囲む}} P_{c^k} \quad (9.2-11)$$

という演算子を考えよう。 $Q|\Phi\rangle$ を満たす状態（物理的状態）にこの演算子を掛けると

$$\bar{L}_i |\Phi\rangle = Q P_{c^i} |\Phi\rangle \quad (9.2-12)$$

となるから、 Q のコホモロジーの空間（つまり $Q|*\rangle$ を無視する空間）の中では $\bar{L}_i = 0$ である。 \bar{L}_i はゴースト数を変えない演算なので、各ゴースト数状態ごとに $\bar{L}_i = 0$ が成り立つ。つまりは、回転に対して不变な空間しか生き残らなくなる。

$$\langle \Phi | = \left\langle \phi^{(3)} \right| + c^i \left\langle \phi_i^{(2)} \right| + \frac{1}{2} c^i c^j \left\langle \phi_{ij}^{(1)} \right| + \frac{1}{3!} c^i c^j c^k \left\langle \phi_{ijk}^{(0)} \right| \quad (9.2-13)$$

$$\int \langle \Phi | \Phi \rangle = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \left(\left\langle \Phi^{(3)} \right| \Phi_{ijk}^{(-3)} \right) + \left\langle \Phi_i^{(2)} \right| \Phi_{jk}^{(-2)} \right\rangle + \left\langle \Phi_{ij}^{(1)} \right| \Phi_k^{(-1)} \right\rangle + \left\langle \Phi_{ijk}^{(0)} \right| \Phi^{(0)} \right\rangle \quad (9.2-14)$$

9.3 ゲージ条件の導入：失敗例



ここで少し、「我々は何を心配しているのか」（ゴースト場と物理的状態の導入は、どういう心配を吹き飛ばしてくれるのか）を述べておこう。以下で述べるような失敗をしなくて済むようにしてくれるのだ。

さて、我々は物理的状態の条件までは示したが、これでどのように「ゲージ固定」ができるのかという話はまだしていない。理論が理論として正しい（計算ができる）ものになるためには 1st-class の拘束は残してはいけなくて、なんらかの「追加の拘束条件」である「ゲージ条件」を加える必要があった。しかし、その加え方を慎重にやらないと「どんなゲージ条件を加えたかによって物理的内容が変わってしまう」というおかしなことになってしまう。

その例として 7.1.1 項で考えた「ものすごく簡単な冗長系」の「ゲージ固定」を、この後で説明する処方箋に従わずに「手で適当に」やってしまうと何がまずいかを説明しておこう。

この系の経路積分を（深く考えずに）書き下すと、

$$\int DxDy DP_x DP_y \exp \left[i \int \left(P_x \dot{x} + P_y \dot{y} - \frac{1}{2} (P_x)^2 + \frac{1}{2} (x + y)^2 \right) \right] \delta(P_x - P_y) \delta(x - f(y)) \quad (9.3-1)$$

となる。 P_y 積分と x 積分はデルタ関数のおかげですぐに終わり、

$$\int \mathcal{D}y \mathcal{D}P_x \exp \left[i \int \left(P_x (f'(y)\dot{y} + \dot{y}) - \frac{1}{2} (P_x)^2 - \frac{1}{2} (f(y) + y)^2 \right) \right] \quad (9.3-2)$$

となり、次に P_x 積分をする。いわゆる完全平方を使って

$$\int \mathcal{D}y \mathcal{D}P_x \exp \left[i \int \left(-\frac{1}{2} (P_x - (1 + f'(y))\dot{y})^2 + \frac{1}{2} ((1 + f'(y))\dot{y})^2 - \frac{1}{2} (f(y) + y)^2 \right) \right] \quad (9.3-3)$$

としてからガウス積分を実行すれば（数因子が出て）

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}y \exp \left[i \int \left(\frac{1}{2} ((1 + f'(y))\dot{y})^2 - \frac{1}{2} (f(y) + y)^2 \right) \right] \quad (9.3-4)$$

となる。ここでよく見ると $X = f(y) + y$ を変数にすれば計算が簡単そうだ、と思って変数変換すると、変換のヤコビアンに対応するものが出るので、

$$\mathcal{N}' \int \mathcal{D}X (1 + f'(y))^{-1} \exp \left[i \int \left(\frac{1}{2} (\dot{X})^2 - \frac{1}{2} X^2 \right) \right] \quad (9.3-5)$$

となる。つまり、単なる調和振動子と比べて、因子 $(1 + f'(y))^{-1}$ だけが異なる。これは y に依存するから「数因子だから積分の外に出す」というわけにはいかない。つまり、この計算は「ゲージの取り方で物理が変わる」例になってしまって、「どこかで失敗したなあ」ということになるのである。

以上から「ゲージを固定するときには、どんな固定をしたのかという痕跡が物理に残らないようになる」ことが必要であることがわかる。

なお、2nd-class の経路積分として正しい手順を踏むなら、ここには $\sqrt{\det \{\Phi, \Phi\}}$ が必要だった（(8.4-6)を参照）。今の場合の $\{\Phi, \Phi\}$ は(7.1-13)の行列の左上の 2×2 の部分（残りの部分は今考えてない）であり、ここから経路積分に出てくる因子こそが $(1 + f'(y))$ なのでヤコビアンで出てくる量をうまく消してくれる（そうなるようにやったのだから当たり前だが）。こういう意味でも「拘束があるからデルタ関数を挟めばいい」という単純な操作は失敗を生むのである（ \det 因子が必要なのだ）。

もっと複雑な（拘束同士が絡み合うような）場合でもこの「うまく消してくれる」が起こるようになる処方箋を与えるのが、次で述べる BFV 形式である。

9.4 BFV 形式

9.4.1 BFV によるゲージ固定

「このような処方箋に従ってゲージ固定項を入れれば、結果はゲージ固定のやり方によらない」という方法が知られていて、そのうちの一つが今から説明する Batalin-Fradkin-Vilkovisky による「BFV 形式」である（レビューとしては [16] など）。

考え方は以下のようなものだ。ハミルトニアンに、以下の二つの修正を加える。

拘束の時間発展を消す項を加える。 1st-class の拘束条件が時間発展による連鎖を持っている場合、すなわち $\{\Phi_1, H\} = \Phi_2, \{\Phi_2, H\} = \Phi_3, \dots$ のように primary, secondary, … のような時間発展の流れを持っていたときは、

$$H \rightarrow H + P_{C_2}C_1 + P_{C_3}C_2 + \dots \quad (9.4-1)$$

のようにハミルトニアンを修正する^{†3}。これにより、

$$\{C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \dots, H + P_{C_2}C_1 + P_{C_3}C_2 + \} = C_1\Phi_2 - C_1\Phi_2 + \dots = 0 \quad (9.4-2)$$

となる (primary \rightarrow secondary の関係がもっと複雑であった場合はそれに応じてこの項の形を決める)。

$\{Q_B, \Psi\}$ のような BRST-exact な項を加える。 Ψ は gauge fixing fermion と呼ばれる量で、ゴースト数^{†4}が -1 の量である。この項は物理的状態で挟むと $\langle \text{phys} | (Q_B\Psi + \Psi Q_B) | \text{phys} \rangle = 0$ となって観測される物理量には効かない。そしてこの項が「ゲージ固定」を生み出すようにしておけば、経路積分の数えすぎは起きないようにしつつ、物理的な散乱振幅などを計算することができるようになる。

「closed な form に物理的意味があるとき、そこに exact な form を加えることは物理を変えない」というふうな話を前半部分で何度かしてきたが、ここで考えたのは「BRST-closed な状態に物理的意味があるとき、そこに BRST-exact な状態や演算子を加えても、物理を変えない」ということで、この考え方方が「ゲージ不变な理論 \rightarrow ゲージ固定された理論」の構築に役立つ。

9.4.2 中西・Lautrup 場と反ゴーストの導入

$\{Q_B, \Psi\}$ の挿入がゲージ固定をしてくれるようになるには、ラグランジュ未定乗数にあたる量がここから出てこなくてはいけない。そこで多くの場合、ゲージ固定に必要な分だけ未定乗数を導入するのだが、ここで「未定乗数」がせっかく作った理論の BRST 不変性を壊してはいけないので、その未定乗数も「BRST 変換による組」の中に組み込む。

ゴーストが導入された理論にさらに、(中西・Lautrup 場と呼ばれる) $\{B\}$ という未定乗数 (およびその運動量 $\{P_B\}$) と、「BRST 変換すると $\{B\}$ になる量」である反ゴースト^{†5} $\{\bar{C}\}$ (およびその運動量 $\{P_{\bar{C}}\}$) を導入する。 \bar{C} はゴースト数 -1 、 B はゴースト数 0 の変数である。

これらの変数 (以下ではしばし、添字は省略する) の BRST 変換は

$$\bar{C} \xrightarrow{\text{BRST 変換}} B \xrightarrow{\text{BRST 変換}} 0 \quad (9.4-3)$$

のようにする (BRST 変換はゴースト数を 1 ずつ上げることに注意^{†6})。これはつまり演算子として

^{†3} これらの修正は「ゴースト場を消したら元のハミルトニアンに戻る」ようになっている。

^{†4} ここまで出てきた量で言うと、 C にゴースト数 1、 P_C にゴースト数 -1 を与える。もともとからあった量はゴースト数 0 である。

^{†5} 歴史的に \bar{C} という記号が与えられるが、 C のエルミート共役という意味はないので、注意。

^{†6} BRST 変換を「外微分の拡張」と考えると、ゴースト数は微分形式のグレードに対応する。

の Q_B に $BP_{\bar{C}}$ を加えるということである。この項があれば、結果として

$$P_B \xrightarrow{\text{BRST 変換}} P_{\bar{C}} \xrightarrow{\text{BRST 変換}} 0 \quad (9.4-4)$$

という BRST の変換も生成される（こちらもゴースト数を 1 ずつ上げている）。

まずは「目論見」を説明しておくと、 $\boxed{\chi = 0}$ という「ゲージ固定条件」をつけたいなら、gauge fixing fermion に Ψ に $\bar{C}\chi + P_C P_B$ のような項をつけておくと、

$$\{Q_B, \bar{C}\chi + P_C P_B\} = B\chi + \bar{C}\{Q_B, \chi\} + P_B G - P_{\bar{C}} P_C \quad (9.4-5)$$

となる。この $B\chi$ という項は $\boxed{\chi = 0}$ というゲージ条件をつけてくれる（経路積分に $\delta(\chi)$ を挟む）だろうし、 $P_B G$ という項は第 1 類拘束 $\boxed{G = 0}$ の条件をつけてくれる（経路積分に $\delta(G)$ を挟む）だろう（その他の二つの項が何をするかは、実例を見ながら考えてみよう）。

新しく入った正準変数は $C, P_C, \bar{C}, P_{\bar{C}}, B, P_B$ であるが、ハミルトニアンとラグランジアンの関係から、ラグランジアンにはこれらが導入されてなかったときと比較して、

$$P_C \dot{C} + P_{\bar{C}} \dot{\bar{C}} + P_B \dot{B} - \{Q_B, \Psi\} \quad (9.4-6)$$

が加わる。しかし、実は（上に書いた「 $B\chi$ という項と $P_B G$ という項が果たす役割」を考えると） $P_B \dot{B}$ という項は邪魔であるように思われる^{†7}。

そこでこの項が消えるように gauge fixing fermion を調整する。

$$\boxed{\Psi = \Psi_0 + P_B \dot{\bar{C}}}$$
 としておくと、

$$P_C \dot{C} + P_{\bar{C}} \dot{\bar{C}} + P_B \dot{B} - \{Q_B, P_B \dot{\bar{C}}\} - \{Q_B, \Psi_0\} = P_C \dot{C} - \{Q_B, \Psi_0\} \quad (9.4-7)$$

となる。つまり \bar{C}, B とその共役運動量のペアによる $p\dot{q}$ の項は Ψ の選び方を工夫することで常に消せる。

なお、上の式をよく見ると、最後の $-\{Q_B, \Psi_0\}$ の中には $-P_{\bar{C}} P_C$ が入っている（(9.4-5) を参照）ので、このラグランジアンには

$$P_C \dot{C} + P_{\bar{C}} P_C \quad (9.4-8)$$

となるが、この項は $\boxed{P_{\bar{C}} = -\dot{C}}$ という条件を出す。つまりはここで C, \bar{C} の間に関係が生まれる。

ある程度の目論見を説明したところで、例を出してみよう。

9.5 例

9.5.1 ものすごく簡単な冗長系

7.1.1 項の例を BFV 処方で考えてみよう。特に、自動的に変数変換のヤコビアンを消す因子がいることを確認したい。

^{†7} 後で示すが、邪魔でない例もある。

拘束は $P_x - P_y = 0$ だけだったので、BRST チャージは

$$Q_B = C(P_x - P_y) \quad (9.5-1)$$

で、未定乗数と反ゴーストを BRST 変換させるための項を加えると

$$Q_B = C(P_x - P_y) + BP_{\bar{C}} \quad (9.5-2)$$

である。

$$H = \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \{Q_B, \Psi\} \quad (9.5-3)$$

の gauge fixing fermion を

$$\Psi = P_B \dot{\bar{C}} - P_C P_B - \bar{C} (x - f(y)) \quad (9.5-4)$$

と選ぼう。ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_C \dot{C} + P_{\bar{C}} \dot{\bar{C}} + P_B \dot{B} - \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 - \{Q_B, P_B \dot{\bar{C}} - P_C P_B - \bar{C} (x - f(y))\} \\ &= P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_C \dot{C} - \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + P_B (P_x - P_y) \\ &\quad + P_C P_{\bar{C}} + B (x - f(y)) + \bar{C} (C + f'(y)C) \end{aligned} \quad (9.5-5)$$

となる。 P_B の運動方程式から $P_y = P_x$ になるからそれを消す。

$$L = P_x (\dot{x} + \dot{y}) + P_C \dot{C} - \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + P_C P_{\bar{C}} + B (x - f(y)) + \bar{C} (C + f'(y)C) \quad (9.5-6)$$

B の運動方程式から $x = f(y)$ になるからそれを代入、

$$L = P_x (f'(y) \dot{y} + \dot{y}) + P_C \dot{C} - \frac{1}{2}(P_x)^2 + \frac{1}{2}(f(y) + y)^2 + P_C P_{\bar{C}} + \bar{C} (C + f'(y)C) \quad (9.5-7)$$

P_C の運動方程式から $P_{\bar{C}} = \dot{C}$ になるからそれを代入。

$$L = P_x (f'(y) \dot{y} + \dot{y}) - \frac{1}{2}(P_x)^2 - \frac{1}{2}(f(y) + y)^2 + \bar{C} (C + f'(y)C) \quad (9.5-8)$$

P_x の運動方程式から $P_x = (1 + f'(y)) \dot{y}$ なのでそれを代入して、ここからは経路積分で評価しよう。

$$\int \mathcal{D}y \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp \left[i \int dt \left(\frac{1}{2} ((1 + f'(y)) \dot{y})^2 - \frac{1}{2}(f(y) + y)^2 + \bar{C} (1 + f'(y)) C \right) \right] \quad (9.5-9)$$

という経路積分を行う。ゴーストに関係する部分を先にやってしまおう。

$$\int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp \left[i \int dt \bar{C}(1 + f'(y))C \right] = \prod (i(1 + f'(y))) \quad (9.5-10)$$

となる。ここで C, \bar{C} がグラスマン奇な量なので、積分の結果 \bar{C}, C に挟まれた演算子が正のべきでそのまま出てくることに注意（グラスマン偶な量ならガウス積分になるので $\int dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ のように負のべきで入る）。つまりはゴースト座標の積分は通常の場の量の積分と逆数で効く（これによって余分な自由度を打ち消しているわけである）。

すぐにわかるように $X = y + f(y)$ と変数変換すれば

$$\int \mathcal{D}X \left(\det \frac{\partial y}{\partial X} \right) \prod (i(1 + f'(y))) \exp \left[i \int dt \left(\frac{1}{2} (\dot{X})^2 - \frac{1}{2} X^2 \right) \right] \quad (9.5-11)$$

である。ここで $\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{1}{1 + f'(y)}$ を使えばちょうど因子が消し合って、

$$\int \mathcal{D}X \exp \left[i \int dt \left(\frac{1}{2} (\dot{X})^2 - \frac{1}{2} X^2 \right) \right] \quad (9.5-12)$$

となって、これは結局「普通の調和振動子」の経路積分である。ゴースト場の経路積分が、正しく、消えてほしい「ゲージ固定の方法に依存する因子」を消してくれている。

9.5.2 電磁場

7.4 節で考えた電磁場は二つの拘束 ($\pi^0 = 0$ → p190 と $\partial_i \pi^i = 0$) を持っていたので、ゴーストはそれに二つ持ち出し、BRST チャージを

$$Q_B = C_1 \pi^0 + C_2 \partial_i \pi^i \quad (9.5-13)$$

とする。ここで $\{\pi^0, H\}_{PB} = \partial_i \pi^i$ という拘束条件の連鎖があったことを思い出すと、このままで $\{H, Q_B\}_{PB}$ は 0 にならない。そこで、ハミルトニアンの方を、

$$H \rightarrow H - P_{C_2} C_1 \quad (9.5-14)$$

と変更する。すると

$$\{C_1 \pi^0 + C_2 \partial_i \pi^i, H - P_{C_2} C_1\}_{PB} = C_1 \{\pi^0, H\}_{PB} - \{C_2, P_{C_2}\}_{PB} C_1 \partial_i \pi^i = 0 \quad (9.5-15)$$

となって Q_B は時間発展しなくなる。拘束の間に時間発展の関係があるときはこのようにして Q_B がちゃんと H と交換するようにする。

BFV の手順に従って、 $\bar{C}_1, \bar{C}_2, B_1, B_2$ とさらにその共役運動量を加えて、

$$Q_B = C_1 \pi^0 + C_2 \partial_i \pi^i + P_{\bar{C}_1} B_1 + P_{\bar{C}_2} B_2 \quad (9.5-16)$$

としておこう。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - P_{C_2} C_1 + \{Q_B, \Psi\} \quad (9.5-17)$$

である。

$$\Psi = P_{B_1} \dot{C}_1 - P_{C_1} P_{B_1} - P_{C_2} P_{B_2} + \bar{C}_1 A_0 + \bar{C}_2 \left(\partial_i A_i + \frac{\alpha}{2} B_2 \right) \quad (9.5-18)$$

と選んでみよう。ここで、 $P_{B_2} \dot{C}_2$ を入れてないことに注意。

$$L = \pi^{\mu} \partial_0 A_{\mu} + P_{C_1} \dot{C}_1 + P_{C_2} \dot{C}_2 + P_{\bar{C}_1} \dot{\bar{C}}_1 + P_{\bar{C}_2} \dot{\bar{C}}_2 + P_{B_1} \dot{B}_1 + P_{B_2} \dot{B}_2 - H \quad (9.5-19)$$

であるが、 Ψ に $P_{B_1} \dot{C}_1$ を入れたことにより、 B_1, \bar{C}_1 の「 pq 項」は落ちる。ゆえに、

$$\begin{aligned} L = & \pi^{\mu} \partial_0 A_{\mu} + P_{C_1} \dot{C}_1 + P_{C_2} \dot{C}_2 + P_{\bar{C}_2} \dot{\bar{C}}_2 + P_{B_2} \dot{B}_2 - \frac{1}{2} \pi^i \pi^i - \pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + P_{C_2} C_1 \\ & - \pi^0 P_{B_1} - P_{C_1} P_{\bar{C}_1} - P_{B_2} \partial_i \pi^i - P_{C_2} P_{\bar{C}_2} + B_1 A_0 + \bar{C}_1 C_1 + B_2 \partial_i A_i + \bar{C}_2 \partial_i \bar{C}_2 + \frac{\alpha}{2} (B_2)^2 \end{aligned} \quad (9.5-20)$$

となる。ここで B_1 積分で A_0 が 0 に、 P_{B_1} 積分で π^0 が 0 に、 P_{C_2} 積分で $C_1 = -\dot{C}_2$ になり、

$$\begin{aligned} L = & \pi^i \partial_0 A_i + P_{C_1} \dot{C}_1 + P_{C_2} \dot{C}_2 + P_{\bar{C}_2} \dot{\bar{C}}_2 + P_{B_2} \dot{B}_2 - \frac{1}{2} \pi^i \pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + P_{C_2} C_1 \\ & - P_{C_1} P_{\bar{C}_1} - P_{B_2} \partial_i \pi^i - P_{C_2} P_{\bar{C}_2} + \bar{C}_1 C_1 + B_2 \partial_i A_i + \bar{C}_2 \partial_i \bar{C}_2 + \frac{\alpha}{2} (B_2)^2 \end{aligned} \quad (9.5-21)$$

となる。次に P_{C_1} 積分をすると、 $P_{\bar{C}_1} = \dot{C}_1$ になり、 \bar{C}_1 積分すると $C_1 = 0$ になり、 P_{C_2} 積分すると $P_{\bar{C}_2} = \dot{C}_2$ になる。

$$\begin{aligned} L = & \pi^i \partial_0 A_i + \dot{C}_2 \bar{C}_2 + P_{B_2} \dot{B}_2 - \frac{1}{2} \pi^i \pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\ & - P_{B_2} \partial_i \pi^i + B_2 \partial_i A_i + \bar{C}_2 \partial_i \bar{C}_2 + \frac{\alpha}{2} (B_2)^2 \end{aligned} \quad (9.5-22)$$

となる。ここまでくるとわかるのは P_{B_2} が A_0 に変わる形になっている（あたかも、消えた A_0 が P_{B_2} と名前を変えて復活したかのように）。そこでこれを A_0 と書き直してしまって、少し整理すると、相対論的に不变な形に作用がまとめり、

$$L = \pi^{\mu} \partial_0 A_{\mu} - \frac{1}{2} \pi^i \pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - A_0 \partial_i \pi^i + B_2 \partial_i A_i + \bar{C}_2 \partial_i \bar{C}_2 + \frac{\alpha}{2} (B_2)^2 \quad (9.5-23)$$

となる。これはよく知られている電磁場のゲージ固定された作用である。

なお、実は電磁場の場合、ゴースト部分の作用が完全に他と分離（decouple）しているので、ゴースト挿入の意味はあまりない（経路積分の結果に定数倍の変化しか与えない）。Yang-Mills 理論の場合、この微分の一部が共変微分に変わるため、ゴーストと Yang-Mills 場の間に相互作用が生まれ、ゴースト部分の経路積分は非自明な積分測度を与える。歴史的にはその「非自明な積分測度」を引っ張り出すためにゴーストの自由度が導入されたが、BFV の考え方では「理論がゲージ固定によらないように」という処方箋から自動的にゴースト場の寄与が決定される。ここまで説明

してきた微分形式の理論でしばしば出てきた「外微分して消える項（物理に関係ない項）」の部分に「ゲージにより変化する部分」を押し込めるという処方が、BRST 変換と物理的状態への条件により実現されている。

なお、この形式では「経路積分の結果が Ψ の選択によらない」ということが重要であったが、 Ψ は何でもよいというわけには残念ながらいかない。ゲージ固定を行う目的の一つが「経路積分が空回りしないように」なので、 $\{Q_B, \Psi\}$ が「ゲージを止める項」にちゃんとなってくれる条件が必要になる。

第 10 章 終わりに

10.1 最初に公開したときの「終わりに」

タイトルを「量子論まで」とした割に量子論の話があまりできてないのは申し訳ない。実際の授業では時間がないので飛ばした章、節も多く、特にそのあたりは原稿のデバッグが足りてないと思う。

途中で説明が抜けている部分なども多々ある。他にも説明の順番など、工夫の余地はたくさんある状態だし、全然完成された原稿にはなってないが、そこは御容赦願いたい。

10.2 ヴァージョン 2 の「終わりに」

本講義録はもともと新潟大学で 2021 年に zoom で行った集中講義のテキストとして書いたものだった。そのとき、上にも書いたように残念ながら当初の予定だった拘束系の量子論が足りてなかった。その後「量子と古典の物理と幾何」という研究会（2022 年）にて、その足りてない部分を補う内容について、「微分形式からゴースト場へ」という講演を行った。そこでテキストにもその部分を加えることにして最後の章を追加して再公開することにした。

まだまだ不満な部分があるのは同じなのだが、少しだけ内容が増えた。ただ、まだまだ書き間違いなどがあるのではないかと心配はしている。

10.3 ヴァージョン 3 の「終わりに」

ヴァージョン 3 では、数式（特に Einstein の規約を使った足し上げ）の記法を変えた他に、一般相対論における 1-form の利用（多脚場形式）について少し述べた。

参考文献

- [1] 中原幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー 1・2 第 2 版」(日本評論社) 2018-2021.—微分幾何を使う物理の定番。
- [2] B.F. シュツツ「物理学における幾何学的方法」(吉岡書店) 1987.—昔からの、微分形式を使った物理の本といえばこれ。
- [3] 中村匡「微分形式で見た電磁気学：あるいは 2+1 次元人の電磁気学と時空平等解析力学について」物性研究 79 卷 1 号 2002—微分形式を使うことの意味をつかむのによい。

- [4] 深谷賢治「解析力学と微分形式」(岩波書店) 1996.—数学者側からの微分形式と解析力学の本
- [5] 崎田文二, 吉川圭二「径路積分による 多自由度の量子力学」(岩波書店) 1986.—Dirac 括弧や拘束がある場合の経路積分についても書いてある。今はオンデマンド版が手にはいる。
- [6] 菅野礼司, 「ゲージ理論の解析力学」, 吉岡書店 (2007).—ゲージ変換の正準形式の記述についてはこの本が詳しい。
- [7] PAM Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics" (Dover) 1964.—ご本尊による Dirac 括弧の説明
- [8] 原田恒司「電磁気学における起電力」(九州大学基幹教育院) 基幹教育紀要 7巻 p19- 2021.—起電力の説明について、高校・大学教科書の間違った記述について（「よくわかる電磁気学」の間違いも指摘されている）
- [9] K. F. Warnick, R. H. Selfridge, D. V. Arnold, "Teaching electromagnetic field theory using differential forms" in IEEE Transactions on Education, vol. 40, no. 1, pp. 53-68, Feb. 1997, doi: 10.1109/13.554670.—タイトルの通り、「電磁気学教育に form を使おうぜ」という論文。本講義よりも「図で説明するぞ」という気持ちが強い。
- [10] 後藤振一郎「熱力学と情報幾何学の接触幾何学による記述法」Researchmap による資料公開—タイトルの通り、熱力学と contact geometry について
- [11] Stanley J.Brodsky, Hans-Christian Pauli, Stephen S.Pinsky, "Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone" Physics Reports, Volume 301, P299, 1998.—光円錐時間の量子化に関するレビュー
- [12] Masahiro Maeno, " $k^+ = 0$ modes in light-cone quantization" Phys. Lett. B 320, p83 1994.—光円錐座標での 0-mode を 2nd-class 拘束で扱う話。
- [13] 堀田昌寛「入門現代の量子力学」(講談社サイエンティフィク) 2021.—正準交換関係から運動量を微分演算子で表現するとき、ゲージ場（っぽいもの）が出てくるのをちゃんと書いてある。
- [14] P. Senjanovic, "Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraint" Annal. Phys. 100 p227, 1976.—second-class の拘束がある場合の経路積分について。
- [15] Glenn Barnich, Friedemann Brandt, Marc Henneaux, "Local BRST cohomology in gauge theories" Phys.Rept.338:439-569,2000.—BRST を使った拘束系（冗長系）のレビュー
- [16] M.Henneaux, "Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom", Phys. Rep. 126 1985.—BRST を使った経路積分のレビュー