琉球大学理学部講義「物理数学 I」

—ベクトル・行列と線形代数—

前野昌弘

2024 年 4 月 4 日

はじめに

本講義では、ベクトルや行列、数学の分野としては「線形代数」について学ぶ。大学新入生あたりだと「線形代数」と聞くとまず「難しそう」な印象を持つかもしれない。だが「線形」[†1]は平たくいえば「1 次式」もしくは「グラフで描くと直線」だから、むしろ「難しい」と言うよりは「一番簡単」[†2]なものにつける名前だと思っていい。

そうすると逆に「線形な問題だけやっても、簡単過ぎるから現実の役には立たないのでは？」と印象を持つかもしれない。しかし実は「線形な問題だけ」やっても、かなり役に立つのである。

実は物理で使う多くの現象が「線形な問題」を基礎にしている。たとえば「微分方程式を立てて、解く」作業を行うとき、我々はまず「考えている地点の近傍」でどのような現象が起きているかという「ローカルな情報」を手に入れてそれをもとに微分方程式を作る。「近傍」の「ローカルな情報」を司る式は（線形近似できる近所の情報だけを扱うので）線形な方程式になる。そして（微分方程式の解き方がわかっている人はもう御存知のように）ローカルな情報を知ればそれをもとにグローバルな情報を見出していけるのである。

具体的には、力学、電磁気学、量子力学などの基本方程式はすべて線形な方程式になっている。特に量子力学において線形代数の威力は絶大である。また、コンピューターグラフィックス、統計学、人工知能の分野など、応用においても線形代数は威力を発揮する。本講義では、いろいろな応用にも触れながら説明していくので、「線形代数の威力」を感じながら進めて欲しい。

【表記について】

本講義録では、添字（文字の後ろの上下につける小さな字）は A^1 あるいは B_2 のように灰色で表す（べき乗を表す x^3 の ^{3} などは黒字にして区別がつくようにする）。また、$\sum$ を使って足し算される添字（「ダミーの添字」→ p21 と呼ぶ）は色付きにする[†3]。かつ、二つの添字を揃えて足し上げるとき（後で考えるベクトルの内積や外積はもちろん、行列の掛算を表現するときにも、「二つの添字を揃えて足し上げる」操作は非常に多い）には $a_{i}\overset{\frown}{\;}a_{i}$ または $a_{i}\underset{\smile}{\;}a_{i}$ のように線でつないで示す。普通は、こんな書き方はしていない。本講義録は例外的におせっかいなのである。これはいわば「自転車の補助輪」のようなもので、勉強していくうちにいらなくなるものである。もちろん、式を手書きするときなどに色を変えたり $\frown$ を書き入れたりする必要はない。「こんなものはいらない」と思う人は単に無視すればよい。

[†1] 「線形」という漢字をあてる場合と「線型」という漢字をあてる場合があるが、中身は同じである。

[†2] ほんとの意味で「一番簡単」なのは 0 次式すなわち定数だろうけど、それはあまりに簡単すぎて考えるにはつまらなすぎる（trivial）。

[†3] 渡す冊子は白黒印刷なので色つきと言っても灰色になるが、そこは勘弁して欲しい。web 上のテキストは色付きになる。

目次

はじめに
第 1 章　行列は何のため？ —序論 1
1.1　行列とは 1
1.2　連立 1 次方程式を解くための「行列」 1
1.3　図形の変形操作としての行列 3
1.4　行列を使うメリット 6
1.5　章末演習問題 8
第 2 章　平面と空間内のベクトルの演算 9
2.1　空間内のベクトル: 幾何ベクトル 9
2.1.1　ベクトルの和と実数倍 9
2.1.2　ベクトルの差 10
2.1.3　ベクトルの線形結合と分解 11
2.2　3 次元の数ベクトル 12
2.2.1　数ベクトルの定義 12
2.2.2　列ベクトルと行ベクトル 13
2.2.3　加法とスカラー倍 13
2.2.4　線形独立と線形従属 15
2.3　内積 16
2.3.1　内積の定義 16
2.3.2　内積の交換・結合・分配法則 17
2.3.3　線形性と双線形性 18
2.3.4　内積に関する不等式 19
2.4　数ベクトルの内積 20
2.4.1　内積の成分表示での計算法 20
2.4.2　内積を使った射影の定義 21
2.4.3　内積を使った成分の分解 22
2.4.4　双対基底 22
2.4.5　座標変換と基底の変換 23
2.5　外積 24
2.5.1　外積の定義:2 次元 24
2.5.2　外積の定義:3 次元 25
2.5.3　外積の交換・結合・分配法則 27
2.5.4　外積の成分表示での計算法 29
2.5.5　レヴィ・チビタ記号 30
2.6　内積・外積の公式 32
2.7　N 次元への拡張 35
2.8　章末演習問題 35
第 3 章　行列の演算 37
3.1　行列が表すもの 37
3.1.1　1 次式による計算を行列で表現する 37
3.1.2　行列による線形写像 38
3.1.3　行列とその成分 39
3.2　行列の演算:2×2 行列 40
3.2.1　連立 1 次方程式を解く 40
3.2.2　逆行列（2×2） 41
3.2.3　行列式 42
3.2.4　行列の積 43
3.2.5　行列と逆行列の積 45
3.3　行列の和と差とスカラー倍 46
3.3.1　行列の和 46
3.3.2　スカラー倍 46
3.3.3　行列の和、スカラー倍と行列式 47
3.4　行列の演算が満たす法則、満たさない法則 47
3.4.1　行列の積の結合法則 47
3.4.2　左逆行列と右逆行列 skip 47
3.4.3　正方でない行列の逆 skip 48
3.4.4　行列の積に関する法則 49
3.5　3×3 行列 49
3.5.1　逆行列 49
3.5.2　レヴィ・チビタ記号を使って求める逆行列 50
3.5.3　3×3 行列の行列式の性質 52
3.6　$N \times N$ 行列の行列式と逆行列 56
3.6.1　行列式 56
3.6.2　行列式の幾何学的意味 58
3.6.3　ブロック行列の行列式 59
3.7　ヤコビアン 60
3.8　余因子 61
3.9　章末演習問題 63
第 4 章　行列の基本変形 64
4.1　連立方程式を行列で解く 64
4.2　行列の基本変形 65
4.2.1　行に対する操作 65
4.2.2　列に対する操作 66
4.2.3　基本変形 66
4.2.4　基本変形の行列による表現 67
4.3　基本変形による行列の簡略化 69
4.3.1　行列の簡略化の方法 69
4.3.2　基本変形による簡略化の唯一性 70
4.4　行基本変形だけによる変形 71
4.4.1　行基本変形だけでどこまで簡略化できるか 71
4.4.2　独立な行ベクトルの数と独立な列ベクトルの数 73
4.5　行基本変形だけを使って方程式を解く 73

4.6 クラメルの公式 74
4.7 正方行列の逆行列を求める 75
4.8 上三角行列の性質 76
4.9 演算子としての行列と交換関係 77
4.10 章末演習問題 78
第 5 章 内積と直交基底・相似変換 79
5.1 内積の公理 79
5.1.1 内積の公理: 実ベクトル 79
5.1.2 内積の公理: 複素ベクトル 79
5.1.3 行列の内積 80
5.1.4 関数の内積 80
5.1.5 公理だけから Schwarz の不等式を導く 81
5.2 直交基底 81
5.2.1 Gram-Schmidt の正規直交化法 81
5.2.2 多項式の直交規格化 82
5.3 相似変換 83
5.3.1 相似変換の意味 83
5.3.2 相似変換でやっていること 84
5.4 相似変換の性質とその不変量 85
5.4.1 相似変換の性質 85
5.4.2 トレース 85
5.5 章末演習問題 86
第 6 章 固有値・固有ベクトルと対角化 87
6.1 固有ベクトル 87
6.1.1 固有ベクトルの定義 87
6.1.2 固有ベクトルの相互関係 88
6.1.3 対称行列とエルミート行列の場合 89
6.2 特性方程式 89
6.2.1 特性方程式と特性多項式 89
6.2.2 2×2 行列 90
6.3 Cayley-Hamilton の定理と行列の対角化 93
6.3.1 特性多項式と Cayley-Hamilton の定理 93
6.3.2 Cayley-Hamilon の定理の証明 94
6.4 行列の対角化、三角行列化を使った Cayley-Hamilton の定理の証明 95
6.4.1 固有値がすべて異なる場合の Cayley-Hamilton の定理の証明 skip 95
6.4.2 固有値がすべて異なる場合の対角化 96
6.4.3 特性方程式が重解を持つ場合の三角行列化 97
6.4.4 三角行列化を使った Cayley-Hamilton の定理の証明 skip 98
6.5 一般化固有ベクトル 99
6.5.1 一般化固有ベクトルによる直和分解 99
6.5.2 直和分解されたベクトル空間 101
6.6 一般化固有ベクトルの空間 101
6.6.1 ジョルダン鎖 101
6.6.2 ジョルダン鎖を基底とした行列 103
6.7 ジョルダン標準形 104
6.8 対角化可能条件 105
6.9 交換する行列の同時対角化 106
6.10 ユニタリ行列による対角化と正規行列 106
6.11 章末演習問題 109
第 7 章 行列の微積分と指数・対数 110
7.1 行列の微分 110
7.1.1 行列の微分の計算則 110
7.1.2 逆行列の微分 110
7.1.3 行列式の微分 111
7.2 行列の指数関数と対数関数 111
7.2.1 行列の指数関数 111
7.2.2 指数関数を計算する方法: 対角化可能な行列 112
7.2.3 指数関数を計算する方法: 対角化できない行列 112
7.3 行列の対数 113
7.4 行列の指数関数に関する公式 114
7.4.1 行列の指数関数の det 114
7.4.2 $\exp(-\mathbf{A})$ による相似変換 115
7.4.3 Campbell-Baker-Hausdolff の公式 115
7.5 章末演習問題 116
付録 A 計算テクニックに関する補足 117
A.1 代数学の基本定理 117
A.2 共通因数のない多項式に関する定理 117
A.3 2 次元平面でのベクトルの回転 118
A.3.1 図形で考えるベクトルの回転 118
A.3.2 加法定理 119
A.3.3 成分の変換と基底の変換 120
A.3.4 行列の転置と回転の行列 121
A.3.5 微小角度の回転の無限回繰り返し 122
A.4 3 次元回転の行列による表現 123
A.4.1 各軸の周りの回転の行列 123
A.4.2 一般の回転:Euler 角 125
A.4.3 傾いた軸の周りの回転 skip 126
A.5 3 次元回転の生成子 127
A.5.1 各軸の周りの回転の生成子 127
A.5.2 生成子の交換関係 127
A.5.3 任意の軸の周りの回転の生成子 127
A.6 章末演習問題 128
付録 B ベクトル空間 129
B.1 そもそもベクトルとはなんぞや？ 129

B.1.1　ベクトル空間の条件 129
B.2　ベクトル空間の基底 131
B.3　ベクトル空間の例 131
B.3.1　n 成分のベクトル 131
B.3.2　行列 132
B.3.3　多項式 132
B.4　線形写像と Ker , Im 133
B.4.1　一般的な線形写像 133
B.4.2　Ker と Im 133
B.4.3　単射・全射と Ker・Im 134
B.5　部分空間と商空間 135
B.5.1　部分空間 135
B.5.2　直和と不変部分空間による分解 136
B.5.3　商空間 137
B.6　演算子の積と Ker 137
B.6.1　二つの演算子の Ker 137
B.6.2　演算子のべき乗の Ker 138
付録 C　問い・演習問題のヒントと解答 140
C.1　問いのヒント 140
C.2　問いの回答 141
C.3　演習問題のヒント 147
C.4　演習問題の解答 148

線形代数を理解するために使えるアプリを左の QR コードから行ける web
`http://irobutsu.a.la9.jp/kougi/linalg/index.html`
に集めてあるので、本講義を理解するための助けにして欲しい。

第 1 章　行列は何のため？ —序論

この章は、「まず最初に今からやる線形代数においてよく出てくる “行列” なるものは何なのかを俯瞰しておいて、これを勉強する気持ちになろう」という意図で書いている。わざわざこの章を設けた理由は、このあたりを勉強している学生さんから「なんでこんなこと考えるんですか？」と質問を頻繁に受けるからである。

すでに「ベクトルや行列（線形代数）を勉強してやるぜ！」と、気力に溢れている人は読まなくてもすぐに次の章から始めてもよい（この章の内容は後の章でもっと詳しくやる）。

1.1　行列とは

「**行列 (matrix)**」とは、数を $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0.5 & 1 \\ \sqrt{5} & \pi & \frac{1}{4} & \mathrm{e} \end{bmatrix}$[†1]のように縦横に並べて括弧をつけた量である。最初に勉強した時、「何の役に立つの？」って気分になる人が非常に多いので、以下で二つの観点から「なぜ行列を使うのか」を示す。

どちらかで言うと数式で理解したい人は 1.2 節へ。

どちらかで言うと図形で理解したい人は1.3 → p3 節へ。

まずは計算していこうや！　という人は第 2 → p9 章へ、あるいは「ベクトルは大丈夫！」なら、いっきに第 3 → p37 章へ。

と進んで欲しい。

1.2　連立 1 次方程式を解くための「行列」

さて、まず小学校の算数のような問題を考えよう。

1 個 100 円のりんごと 1 個 60 円のバナナがある。たかしくんは 600 円持っている。これを全部使って、りんごとバナナを合わせて 8 個買いたい。それぞれ何個買えばよいか。

✎ 1 次方程式として解くならば、りんごを A 個とバナナを B 個買うと考えて、連立方程式

$$\begin{cases} 100A+60B=600 \\ A+B=8 \end{cases} \tag{1.1}$$

を解く。やってみよう。よくやる方法は、まず下の式を 100 倍して

$$\begin{cases} 100A+60B=600 \\ 100A+100B=800 & \text{(下の式の両辺を 100 倍した)} \end{cases} \tag{1.2}$$

としてから下の式から上の式を引いて式

$$40B = 200 \tag{1.3}$$

を作り、$\boxed{B=5}$を得る。$\boxed{B=5}$を (1.1) に代入すれば$\boxed{A+5=8}$となるから、$\boxed{A=3}$とわかる。

上の✎の計算では二つの変数「金額」と「個数」を固定してりんごの数とバナナの数を知る計算を行った。ここ

[†1] 行列の記号として、() を使う本と [] を使う本がある。[] の方がスペースを使わないので、この本ではこっちにしてみた。

で注目したいのは、$\begin{bmatrix}\boxed{\text{りんごの数}}\\ \boxed{\text{バナナの数}}\end{bmatrix}$ という「数の組」と $\begin{bmatrix}\text{金額}\\ \text{個数}\end{bmatrix}$ という「数の組」の間には対応関係がある。その対応関係は

$$\begin{bmatrix}\text{金額}\\ \text{個数}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\times\boxed{\text{りんごの数}}+60\times\boxed{\text{バナナの数}}\\ \boxed{\text{りんごの数}}+\boxed{\text{バナナの数}}\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

だが、この、$\left\{\begin{matrix}\boxed{\text{りんごの数}}\\ \boxed{\text{バナナの数}}\end{matrix}\right.$ から、個数と金額を計算する」操作 $\boxed{\begin{bmatrix}\boxed{\text{りんごの数}}\\ \boxed{\text{バナナの数}}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\text{金額}\\ \text{個数}\end{bmatrix}}$ を、

$$\begin{bmatrix}\text{金額}\\ \text{個数}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{matrix}\text{計算を表現}\\ \text{するもの}\end{matrix}}\begin{bmatrix}\boxed{\text{りんごの数}}\\ \boxed{\text{バナナの数}}\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

のように「$\begin{bmatrix}\boxed{\text{りんごの数}}\\ \boxed{\text{バナナの数}}\end{bmatrix}$ に操作 $\boxed{\begin{matrix}\text{計算を表現}\\ \text{するもの}\end{matrix}}$ を行うと $\begin{bmatrix}\text{金額}\\ \text{個数}\end{bmatrix}$ になる」という書き方[†2]で表現したい。具体的には以下のような「行列」を考える（以下では、個数を N、金額を M、$\boxed{\text{りんごの数}}$を A、$\boxed{\text{バナナの数}}$を B で表現する)。

$$\begin{bmatrix}M\\ N\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}100 & 60\\ 1 & 1\end{bmatrix}}^{\text{行列}}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

この式は $\boxed{\begin{aligned}M =&\quad 100A+60B\\ N =&\quad A+B\end{aligned}}$ の代わりである。ゆえに、行列の演算規則は

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aA+bB\\ cA+dB\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

である。これが「行列計算」の第一歩となる（今は第一歩なので、とりあえず「こんな計算やるんだなぁ」程度に思っておけばよい)。

ここで「何に A, B を掛けたのがわかりやすい書き方として、たとえば

$$\begin{bmatrix}M\\ N\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc}A & B\\ \hline a & b\\ c & d\end{array}\right] \tag{1.8}$$

とかの方がいいんじゃないの？」と思う人もいるかもしれない。実は、計算結果である $\begin{bmatrix}M\\ N\end{bmatrix}$ と言わば「計算前」である $\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$ が同じ形式である方が嬉しい—という事情と、二つの操作を後で出てくる(1.25)→ p6のように「計算操作を続けて行う」書き方にしたい、という事情などがあるので上の (1.6) の書き方を使うのである。

(1.1)→ p1に戻って、答を求める計算過程を行列の表示で書こう。

[†2] 「操作」は一箇所でまとめ、操作前と操作後と分離した形で書きたい。

数式で書く	行列で書く操作	
$\begin{cases}100A+60B=600\\ \quad A+\quad B=8\end{cases}$	$\begin{bmatrix}100&60\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}600\\8\end{bmatrix}$	
		$\downarrow$（下の行を 100 倍[†3]）
$\begin{cases}100A+\ 60B=600\\ 100A+100B=800\end{cases}$	$\begin{bmatrix}100&60\\100&100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}600\\800\end{bmatrix}$	
		$\downarrow$（下の行から上の行を引く）
$\begin{cases}100A+60B=600\\ \quad 40B=200\end{cases}$	$\begin{bmatrix}100&60\\0&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}600\\200\end{bmatrix}$	
		$\downarrow$（下の行を 40 で割る）
$\begin{cases}100A+60B=600\\ \quad B=5\end{cases}$	$\begin{bmatrix}100&60\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}600\\5\end{bmatrix}$	
		$\downarrow$（下の行の 60 倍を上の行から引く）
$\begin{cases}100A=300\\ B=5\end{cases}$	$\begin{bmatrix}100&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300\\5\end{bmatrix}$	
		$\downarrow$（上の行を 100 で割る）
$\begin{cases}A=3\\ B=5\end{cases}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$	

(1.9)

最後に出てくる行列 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$（この後も何度も出てくる行列で「単位行列」という名前がついている）は何もしない操作[†4]に対応するので最後の式は $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ つまり、$A=3, B=5$ である。

ここで行った操作は、後でちゃんと説明する「行基本変形」操作 1 である。

→ p66

さらに「書くことを節約する」を推し進めると、「毎回 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=$ を書くのも面倒だ」ということで、

$$\begin{bmatrix}100&60\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}600\\8\end{bmatrix}\leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}100&60&600\\1&1&8\end{array}\right] \tag{1.10}$$

まで省略してもよい。この書き方だと上の計算は以下のようになる。

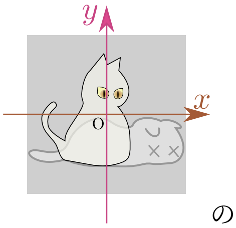
$$\left[\begin{array}{cc|c}100&60&600\\1&1&8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}100&60&600\\100&100&800\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}100&60&600\\0&40&200\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}100&0&300\\0&1&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&5\end{array}\right] \tag{1.11}$$

1.3 図形の変形操作としての行列

次に、平面の図形を変換[†5]する手段としての「行列」を見よう。というより、「行列で表現できる変換の組」をここでは扱う。

アプリのリンク

図形の変形操作



元の図を、のような「シュレーディンガーの猫」の絵としよう。

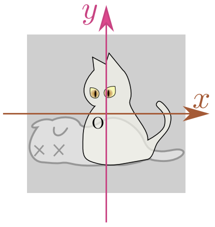
この図の変形として、以下のようなものを考える。まずはシンプルな「反転」である。

[†3] ここで「下の行を 100 倍」だからと $B\to 100B$ と置き換える必要はない。そんなことをしたら等式が成立しなくなる（左側にある数式と見比べて 100 倍しなくていいことを確認しよう）。

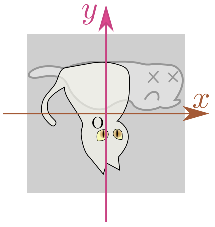
[†4] これが何もしない操作であることは、実際計算してみるとわかる。

[†5] ここで行うのは線形変換もしくは 1 次変換と呼ばれる変換のみ。

$$\textbf{左右反転：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}\tag{1.12}$$



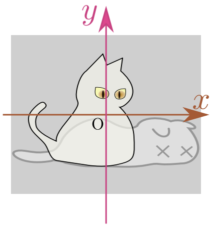
$$\textbf{上下反転：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}\tag{1.13}$$



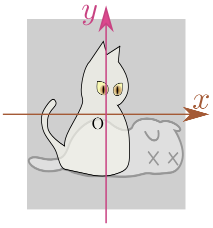
「反転」は平面上の x 座標または y 座標の符号をひっくり返す操作だが、それは画像を鏡像反転させる操作になっている。

次に「伸縮」の 2 種類を考えよう。

$$\textbf{左右伸縮：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\alpha x\\y\end{bmatrix}\tag{1.14}$$

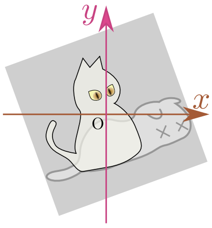


$$\textbf{上下伸縮：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\\alpha y\end{bmatrix}\tag{1.15}$$



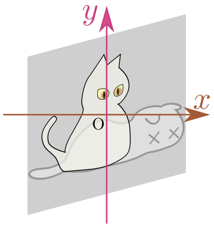
さらに、「回す」ことが考えられるだろう。この式は少しだけ難しい（この章はイントロなので、この式については後でゆっくりやることにする）。

$$\textbf{回転：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\end{bmatrix}\tag{1.16}$$

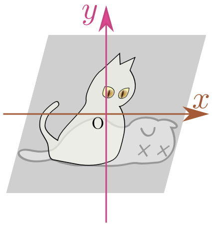


ここまでは形を（反転はしても）変えない変換だったが、以下の操作では形が歪みを生じる。

$$\textbf{垂直ずらし：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y+\alpha x\end{bmatrix}\tag{1.17}$$



$$\textbf{水平ずらし：}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x+\alpha y\\y\end{bmatrix}\tag{1.18}$$



これらの変換はすべて、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$ で表現できる。たとえば $\boxed{a=-1, b=0, c=0, d=1}$ で左右反転が表現できる。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

のように「行列の計算ルール」を定めておくと、行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を一つ決めることで以上の変換がすべて表現できる。たとえば、左右反転の行列は $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で、これによって

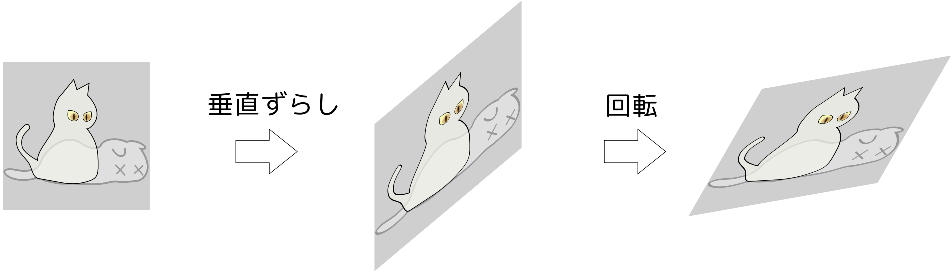
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

のような計算がされる。操作と行列の関係を整理すると以下のような感じだ。

左右反転	上下反転	左右伸縮	上下伸縮	回転	垂直ずらし	水平ずらし
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

上の表を見ると、$\boxed{\alpha=-1}$ の左右伸縮は左右反転であることがわかる（同様に $\boxed{\alpha=-1}$ の上下伸縮は上下反転である）。さらに言えば反転と収縮は全部まとめて行列 $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ で表現できる。

行列で書いたメリットはやはり、「操作をまとめることができる」ことである。



α の垂直ずらしをしてから角度 θ 回す操作

は行列では

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+\alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\cos\theta - \alpha\sin\theta) - y\sin\theta \\ x(\sin\theta + \alpha\cos\theta) + y\cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

と表現できる。

ここで大事なことを一つ。上とは操作の順番を変えた

角度 θ 回してから α の垂直ずらしをする操作

の結果は、見てわかるとおり、全く違う（操作の順番が変われば結果が変わる）。

このことは行列の計算にも当然反映されていて、行列の順番を変えたときの結果

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x(\sin\theta + \alpha\cos\theta) + y(\cos\theta - \alpha\sin\theta) \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

となって、全く違う変換となる。

これを「行列（を使った操作）は可換ではない」と表現する。行列の「数」とは違う側面である。

【問い 1-1】 反転は伸縮の一種なので、ここで考えた変換を「伸縮」「回転」「ずらし」の 3 種類としよう。

(a)「伸縮」と「伸縮」　(b)「伸縮」と「回転」
(c)「伸縮」と「ずらし」　(d)「回転」と「回転」
(e)「回転」と「ずらし」　(f)「ずらし」と「ずらし」

のうち、順番を変えても同じ変換になるのはどれか？ —ここでは別に「計算で証明」はしなくていい（後で具体的な話をするときにする）ので、図で考えればこうなるなという判断でよい。　解答 → p141 へ

どちらかで言うと図形で理解したいということでこの節を先に読んだ人は、ここで1.2 節 → p1 に戻って、数式の方の理解をして欲しい。

1.4　行列を使うメリット

ここまでだと「行列で書いたって大して変わらん」という感想を抱くかもしれない。行列で書いた意義は、

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{\text{操作}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{\text{入力}}=\underbrace{\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}}_{\text{出力}} \tag{1.23}$$

のように、式の上で「入力」「操作」「出力」が分離されてくることにある。

「操作」が分離されているおかげで、上の計算を

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{\text{操作}}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} \quad\to\quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}_{\text{逆操作}}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} \tag{1.24}$$

のように「逆操作」を作る演算だとか考えることができるのである。具体的にどのように逆操作を考えるかについては、後で → p41 じっくり説明する。

行列を使うと、たとえば「まず $\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$ で表される操作を行ったのち、$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ で表される操作を行う」（1.3 節 → p3 でやった「ずらした後で回転する」など）のような二つの操作を連続して行うことを

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{\text{第 2 の操作}}\underbrace{\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}}_{\text{第 1 の操作}}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{1.25}$$

のように表現できる（第 1 の操作を行った結果に第 2 の操作を行っている）。

ここで、第 1 の操作と第 2 の操作をまとめて行なう操作を、一つの行列で表現してしまうことができるのが行列を使う強みの一つである。同じことを行列を使わない計算で書くと、

$$\overbrace{\begin{cases}x' = ex + fy\\ y' = gx + hy\end{cases}}^{\text{第 1 の操作}}\qquad\overbrace{\begin{cases}x'' = ax' + by'\\ y'' = cx' + dy'\end{cases}}^{\text{第 2 の操作}} \tag{1.26}$$

をまとめて、

$$\begin{aligned}x'' &= a\overbrace{(ex + fy)}^{x'} + b\overbrace{(gx + hy)}^{y'} = (ae + bg)x + (af + bh)y\\ y'' &= c\overbrace{(ex + fy)}^{x'} + d\overbrace{(gx + hy)}^{y'} = (ce + dg)x + (cf + dh)y\end{aligned} \tag{1.27}$$

となる。ごちゃごちゃしてわかりにくい。これを再び行列の言葉に翻訳しよう。(1.26) は

$$\overbrace{\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}^{\text{第 1 の操作}}\qquad\overbrace{\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}}^{\text{第 2 の操作}} \tag{1.28}$$

と翻訳され、(1.27) は

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{\text{第２の操作}} \overbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}^{\text{第１の操作}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}}^{\text{二つの操作をまとめた表現}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

のように翻訳される（ここの説明も、後でじっくりやるから今は「ふむふむ、後でそんな計算をやるのね…」程度に思いながら眺めておけばよい)。

ここで行列を使った強みが現れる。この場合、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

という計算を先にやってしまうことができるのである[†6]。

「たいした違いはないじゃん」と思う人は、この計算を 100 回 200 回とやる場合を考えてみて欲しい（たとえば 100 種類の $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ のそれぞれに対応する 100 個の $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ を計算したい場合など)。CG（コンピュータグラフィックス）などではこういう計算を 100 回どころではなく繰り返す（まぁ、人間がじゃなくコンピュータが、だが)。

このように操作を行列の形でまとめることには、単純に見栄えの問題ではないメリットがある。たとえば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A_{xx}\,x(t) + A_{xy}\,y(t) \tag{1.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = A_{yx}\,x(t) + A_{yy}\,y(t) \tag{1.32}$$

のような「連立微分方程式」を解かなくてはいけないこともあるが、これを

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

と書き、「行列を簡単にするテクニック」（それがどういうものかはこの先を読んでほしい）をいくつか使うと、微分方程式を解く手間が大幅に減る（1 変数の方程式を 2 回解く程度の手間で済む)。これについても詳細は後でじっくり述べるが、現実的な現象を考えるときに行列は役立つ。 → p111

一つの例として感染症の数理モデルでも行列を使うというところを述べておく。「感染する可能性がある人の数（感受性人口)」を $S(t)$、「感染している人口」を $I(t)$、「もう感染する可能性がない人の数（隔離人口)」を $R(t)$ としたとき、感染者は今いる感染者と感染する可能性のある人の積に比例して増え、ある割合で治癒または死亡して感染する可能性がない人に入る。以上を式にすると、

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t) I(t) \tag{1.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t) \tag{1.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t) \tag{1.36}$$

という連立微分方程式ができる[†7]。これはもちろん単純なモデルであり、現実に合わせるにはもっと工夫が必要だ。たとえばこの β は「感染している人が感染する可能性がある人を感染させてしまう確率」を表現しているのだが、上のモデルでは「ワクチンを打った人」と「打ってない人」を区別してないし、「高齢者」と「若者」も区別してない（グループ分けされてない)。実際には β は異なるグループ間では異なるものだし「感染者から隔離者に変化する確率」を表現する γ もグループごとに異なる。この場合、β を $\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1N} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \cdots & \beta_{NN} \end{bmatrix}$ のような行列[†8] で表現し、$\beta S(t) I(t)$ の部分が $\sum_j \beta_{ij} S_i(t) I_j(t)$ に置き換えられる。ここでこの行列がどんな性質を持っているか、そしてどんな性質を持っていれば $I_i(t)$ が増加/減少するのか？ —などを考えることが重要となるのである。

[†6] これができるのは行列やベクトルの掛け算において「結合法則（後述)」が成り立つから。

[†7] $S(t)$ の時間変化を無視して定数 S_0 に置き換えられる場合、(1.35) は $\boxed{\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = (\beta S_0 - \gamma)\, I(t)}$ となる。$\boxed{\beta S_0 - \gamma > 0}$ なら感染者が増加する。後で β が行列と化したとき、どの条件で感染者の増加・減少が決まるかは重要な問題である。

[†8] グループ 1 の人はグループ 2 の人から感染する可能性が高いなら、β_{12} が大きくなる。

新しい計算方法が出てくると、最初は「めんどくせえ」と思うものだ。だが、多くの場合、その新しい計算方法は先人たちが「めんどくせえ」と思った計算を簡単にするために「発明」したものなのである。行列にも同じことが言える。話が進むについて「行列がなかったらもっとめんどくさい」が実感できるようになると思う。

この章は本当に「イントロ」なので複雑な話を全くしてない。なので「こんな簡単なことなら別に行列とか新しいもの使わなくてもいいのでは？」と思う人もいるかもしれない。だが、線形代数を考えることで、間違いなく世界は広がる。物理はもちろん AI などの応用も含め、工学や経済学なども含めた広い範囲で線形代数は応用されているのである。以下で、その基礎の部分を学んでいこう。

1.5　章末演習問題

★【演習問題 1-1】

ある量 X は、a と b の平均である。一方、Y は a から b を引いた結果である。

(1) この文章が示す関係を、行列を使った式を使って表せ。

(2) X, Y の値から a, b を求める式（上の式の逆の関係）を行列を使って表せ[†9]。

解答 → p148 へ

★【演習問題 1-2】

1 個 100 円のりんごが a 個、1 個 150 円のバナナが b 個、1 個 50 円のさくらんぼが c 個ある。

(1) 合計個数を X 個、合計金額を Y 円とする。$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の関係を行列を使って表せ。

(2)「リンゴの数だけさくらんぼを減らす」（たとえば $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$）という操作を行列を使って表せ。

(3)「リンゴの数とさくらんぼの数を交換する」（たとえば $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$）という操作を行列を使って表せ。

解答 → p148 へ

[†9] この「逆の関係」を表す行列を求める簡便な計算方法が、後で出てくる。

第 2 章　平面と空間内のベクトルの演算

前章で行列のイントロダクションをした。行列は数値の列に 1 次式で表すことのできる変換（後で詳しく述べるが「線形変換」とか「1 次変換」とか呼ぶ）を行なうとき、その変換を表現する一つの方法だった。この章では、その変換される相手である「数値の列」すなわち「ベクトル」について考えていく。

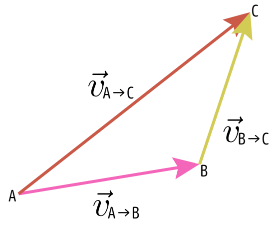
2.1　空間内のベクトル: 幾何ベクトル

あとで「ベクトル」という言葉の意味をより広く定義しなおすのだが、この章でのベクトルの定義は（後でやるよりは）狭い。まずは幾何的な定義（図形での定義）を行う（次の2.2$_{\to \text{p12}}$節で数ベクトルとしての定義を行う）。

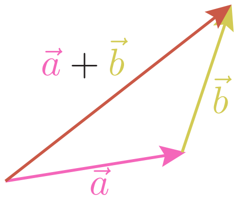
2.1.1　ベクトルの和と実数倍

この節ではベクトルを「空間的移動を表現する矢印」のような図形的な量として定義していくことにしよう。ベクトル（vector）という単語のもともとの意味は「運ぶもの」であり、「A 地点から B 地点への移動」を $\vec{v}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ あるいは $\vec{v}_{AB}$（あるいは $\overrightarrow{AB}$）のように記述することから始まった。ベクトルを「移動の表現」と考えると、その「足し算」は

「$\vec{v}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$:A 地点から B 地点への移動」と
「$\vec{v}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$:B 地点から C 地点への移動」を【合成】すれば
「$\vec{v}_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}$:A 地点から C 地点への移動」になる。

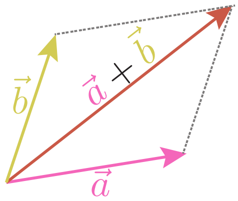


というシンプルな「移動と移動の合成」を考えることができる。これを「ベクトルの足し算（加法）」の定義だとしよう。すなわち、この移動の合成を、

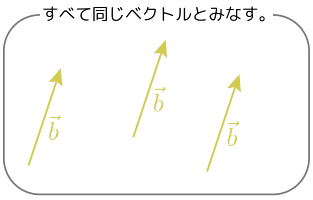


のように「ベクトルの和の規則」を定める。演算 $\boxed{+\vec{b}}$ は、「ベクトルの矢印の先を $\vec{b}$ の分だけ移動させる」演算だと考えてもよい。この足し算の定義は「2 つの運ぶ動作の足し算」を行っていると思えばいいだろう。

同じことを



と考えてもよい。この足し算のやり方を「平行四辺形の法則」などと呼ぶ。

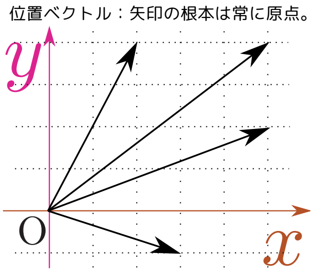


上で平行四辺形の法則を使うときに、ベクトル $\vec{b}$ を平行移動している。移動前の $\vec{b}$ も移動後の $\vec{b}$ も、どちらも同じ「$\vec{b}$」であることに注意しよう。ここのベクトルの定義では、矢印の根本と先（移動と考えたときの移動前地点と移動後地点）を同時に同じだけ移動させたものは同じベクトルとみなすことになっている。

平行移動する前のベクトルと後のベクトルを同じとみなすかどうかは、定義の問題であり、以下で考える計算ではその方が便利なのでそうする。

平行移動の前後は違うベクトルだと考える定義を採用することもある。どちらの定義を採用するにしても、終始一貫していることが重要である（途中で変えると混乱する）。

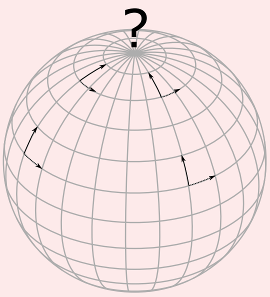
たとえば物理でよく使われる「位置ベクトル」は矢印の根元は原点に固定されて動かさない（このタイプのベクトルを「**束縛ベクトル**」と呼んで区別することもある）。また別の例としては力学における「力」がある。力というベクトルは作用点が矢印の根本であるが、作用点が違えば力は違う[†1]ので、根元の位置は重要である。



今、「平行移動」をすんなりと行えているのは、これが平面上のベクトルのお話だからである。

たとえば地球上（地球は球面と考えよう）で「北へ 100km 進む」「東へ 100km 進む」という移動を考えると、その移動の意味するところは場所によって違う（極端な話、北極や南極ではそのような移動は「定義不可能」である。右の図では球面上で一定距離北もしくは東に進む移動を表現した。場所により、その移動の持つ意味が違っていることがわかる。こういう状況で「平行移動とはなにか？」はナイーブには決まらない。このあたりの話は、一般相対論などの「曲がった空間」の理論では大切になる。

このような「曲がった面」（あるいは曲がった空間）はとりあえず考えないことにしよう。こういう場合でもある一点に限って考えればちゃんとベクトルの加法は定義できる（離れた場所のベクトルを足すことが面倒になるだけである）。

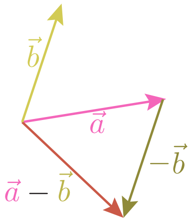
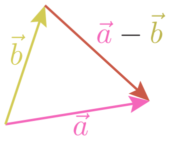


次に、「ベクトルの定数倍」という演算を考えよう。通常の数（「ベクトル」に対比して「スカラー」と呼ぶ）の数式として$\boxed{x+x=2x}$が成り立つように、ベクトルでも$\boxed{\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}}$と考えよう。すると、  のように図を描くことで、「ベクトルを 2 倍する」とは「向きを変えずに長さを 2 倍にする」ことだとわかる。同様に「3 倍」「4 倍」を順に定義していけば、「ベクトルの整数倍」という演算が定義できる。この逆を考えて$\boxed{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}=\vec{a}}$が成り立つように「$\frac{1}{2}$ 倍」「$\frac{1}{3}$ 倍」を順に定義することで「ベクトルの $\frac{1}{\text{整数}}$ 倍」が定義される。こうやって拡張していけば、任意の有理数 λ に関して「ベクトルを λ 倍する」とは「向きを変えずに長さを λ 倍にする」としよう。ここまでくれば λ が任意の実数に対してこの定義を使ってよいだろう。

λ を 0 ではない実数とすると、「λ で割る」は「$\frac{1}{\lambda}$ 倍する」で実現する。

ベクトル $\vec{a}$ の長さを $|\vec{a}|$ と書くことにする[†2]と、$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ の長さは 1 になる。長さが 1 のベクトルは「**単位ベクトル (unit vector)**」と呼び、本書では $\vec{\mathbf{e}}$ という記号[†3]で表すことにする。単位ベクトルの向きは下付きの添字で表し、$\vec{\mathbf{e}}_x$ は「x 軸方向を向いている単位ベクトル」である。$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ は「$\vec{a}$ は「$\vec{a}$ の方向を向いている単位ベクトル」なので、$\vec{\mathbf{e}}_{\vec{a}}$ と書く。

2.1.2　ベクトルの差

差の方は、  のように「逆向きにしてから足す」と考えてもよいし、  のように「$\boxed{-\vec{b}}$とは、ベクトルの矢印の根本を $\vec{b}$ の分だけ移動させる演算だ」と考えてもよい。こう定義すれば、

[†1] 力の場合、作用点を「力の向きに移動」させた場合はその力学的内容は同じであるので、束縛ベクトルよりは束縛が少し緩い。このタイプのベクトルを「sliding vector」（適切な日本語訳がない）と表現する場合もある。

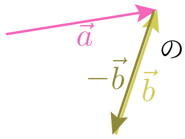
[†2] 「ベクトル $\vec{a}$ の長さは a」のように、ベクトルの矢印記号を取ったもので長さを表現する流儀もある。

[†3] $\vec{\mathbf{e}}_x$ で「x 方向の単位ベクトル」を表すように、添字で向きを表現することにする。本によっては同じベクトルを $\hat{x}$ で表現する場合などもある。また、x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で表す記法もよく使われる。本講義では使用しない。

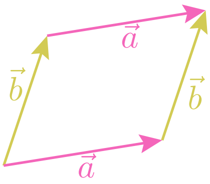
結果 1: ベクトルの引算は足算を打ち消す

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{b}=\vec{a} \tag{2.1}$$

が成り立っていることはすぐにわかる。



「逆向きにしてから足す」考え方なら、のように「行って戻る」ことで打ち消すと考えれば、$-\vec{b}+\vec{b}$が「何もしない操作」だと理解できる。



「根本を移動させる」考え方なら、のように「根本を動かす」操作と「先を動かす」操作を両方することが「平行移動したのと同じ（何も変わってない）」だと考えれば、この二つは互いを打ち消す操作だとわかる。

こう定義した御利益は、数の場合、$\boxed{a+b=c \quad \text{ならば} \quad a=c-b}$といういわゆる「移項（要は両辺から b を引いているだけのこと）」ができるが、ベクトルでも$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \text{ならば} \quad \vec{a}=\vec{c}-\vec{b}}$が成立するようになることである。

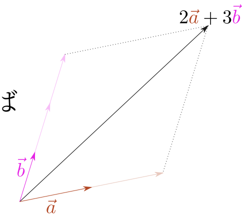
2.1.3　ベクトルの線形結合と分解

アプリのリンク

ベクトルの線形結合

こうして「加法（足し算）」と「定数倍」を考えることができるので、その組合せとして「**線形結合 (linear combination)**」を考えよう。

線形結合とは[†4]、複数のベクトルにスカラー倍と加法だけを行って別のベクトルを作る操作である。



たとえば　のような操作（つまり、「$\vec{a}$ を 2 倍し、$\vec{b}$ を 3 倍したものと足す」という操作）を考えよう。

この操作の結果の新しいベクトルを「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線形結合」のように呼ぶ。たとえば、三つのベクトル $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}$ の間に、ある実数または複素数の係数 α, β を使った

$$\vec{v}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \tag{2.2}$$

なる関係があるとき、「$\vec{v}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線形結合である」と言う。

平面のベクトルの場合、二つのベクトルがあればその線形結合で任意のベクトルを作ることができる。それはいろんなベクトルの場合で平面上に上のような図を描いてみれば直感的には理解できる。

📖【問い 2-1】 上で「できる」と書いたが、「二つのベクトル」の選び方が悪いと、任意のベクトルを表すことができない。どんな場合か？

解答 → p141 へ

平面上の二つのベクトル[†5]$\vec{a}, \vec{b}$ を一定（「定数」ならぬ、「定ベクトル」と呼ぶべき量）とすると、二つの数 α, β を適切に決めれば、どんな平面上のベクトル $\vec{x}$ でも表現できる（三つめのベクトル $\vec{c}$ が必要になったりしない）。これを、「平面上のベクトルは自由度が 2 だ」あるいは「平面上のベクトルは 2 次元の量である」と言う。「**自由度 (degree of freedom)**」も「**次元 (dimension)**」[†6]も「ある集合の要素から一つを特定するには、いったい何個の量を指定すればよいか」を示す。

[†4] 『「線形」は平たくいえば「1 次式」もしくは「グラフで描くと直線」』という意味だと前に述べた→ p が、ここでの意味も同じ。線形結合するときは、元のベクトルに関して 1 次式となる計算だけをする。「1 次結合」と呼ぶこともある。

[†5] この二つは次に示す「独立である」という条件を満たしているものとする。

[†6] ややこしいことに、物理では「次元」が別の意味を持つこともある。

今は平面を考えている[7]ので任意のベクトルを指定するには 2 個の実数が必要である。もちろん、先立って 2 本の定ベクトルを選ぶことは済んでいるものとする。このように「ベクトルを表現するために使われる定ベクトルの組」のことを「**基底ベクトル (basis vector)**」または短く「**基底 (basis)**」と言う。

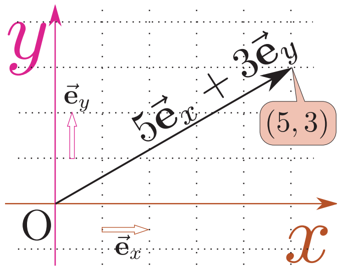
基底ベクトルは互いに線形独立 → p15[8]なベクトルの組になっている必要があり、単位ベクトルでかつ互いに直交するように取ることが多い[9]。単位ベクトルでかつ互いに直交するように選んだ基底のことを「**規格直交基底**」と呼ぶ。

平面上のベクトルを $\begin{cases} x \text{ 成分} \\ y \text{ 成分} \end{cases}$ の二つの数字を使って指定することが多いが、あれは基底を $\begin{cases} x \text{ 軸方向を向いた } \vec{\mathbf{e}}_x \\ y \text{ 軸方向を向いた } \vec{\mathbf{e}}_y \end{cases}$ に選んだ場合である[10]。

このとき任意のベクトルは

$$\vec{A} = A_x\vec{\mathbf{e}}_x + A_y\vec{\mathbf{e}}_z \tag{2.3}$$

のように表現され、ベクトルの成分への分解は右の図のように行われる（図には、$\boxed{A_x = 5, A_y = 3}$ の場合を示した）。



こうして、平面上のベクトルを表現するのに、図を描いて考える以外に、成分 A_x, A_y を指定する方法があることがわかった。空間ベクトルの場合は 3 次元となり、成分も 3 つ必要となり、

$$\vec{r} = x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y + z\vec{\mathbf{e}}_z \tag{2.4}$$

のように三つの基底ベクトルを使って表現する（上の場合、基底ベクトルは x, y, z 軸を向いた単位ベクトルを選んだが、こうしなくてはいけないわけではない）。

こうして、ベクトルを「成分と呼ばれる数 N 個（2 次元なら 2 個、3 次元なら 3 個）で表現されたもの」と考えることもできるようになる。次の節ではその考え方に従ってベクトルの演算を定義しよう。

2.2　3 次元の数ベクトル

2.2.1　数ベクトルの定義

ここでベクトルの定義を、図形を離れてやり直そう。

雑な定義から始めると「N 次元のベクトルとは実数を N 個並べたものである」である。もう少し精密に考えると、「以下に示す演算の規則が満たされているものをベクトルと呼ぶ」ということになる。

まずは $\boxed{N = 3}$ の場合を考えよう。$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ または $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ のように「x 成分、y 成分、z 成分」（各成分の名前はどうでもよい）と並べて表現する。前節で図形から定義した空間内のベクトル $\vec{v}$ を x, y, z 軸方向の基底ベクトルの線形結合として表現すると $v_x\vec{\mathbf{e}}_x + v_y\vec{\mathbf{e}}_y + v_z\vec{\mathbf{e}}_z$ のようになるが、これと三つの数字を並べたベクトルとしてのベクトル $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ が対応している。しかし、数ベクトルは特に「矢印」のような図形的定義がなくても書き下すことができるので、こっちの方が「広い」のである。実際、これから先で使う「ベクトル」は平面や空間内で定義されたものとは限らない。これまでに出てきた例でも、$\begin{bmatrix} \text{りんごの数} \\ \text{バナナの数} \end{bmatrix}$ は立派なベクトルだ（矢印ではないが）。

---

[7] もちろん、もっと複雑な集合を考えているなら、その集合が「面」であっても、その集合の要素を指定するのに 2 個の実数では足りないことはあり得る。たとえば「1 階と 2 階がそれぞれ無限に広い平面」となる空間を考えると、面上の座標となる 2 個の実数の他に「1 階か 2 階か」の情報が必要だ。

[8] この言葉については後で説明するが、今考えている 2 次元ベクトルの場合に限って言えば「線形独立ではない」の意味は、【問い 2-1】→ p11 の答えである。

[9] 「多い」であって、そうでないとり方もやってよい。使用頻度は少ないが。

[10] 基底は人間が（そのときそのときの状況に応じて）選ぶものである。

ベクトルの成分は、使っている基底をちゃんと決めていないと意味がない。そういう意味では $v_x\vec{\mathbf{e}}_x+v_y\vec{\mathbf{e}}_y+v_z\vec{\mathbf{e}}_z$ は与えるべき情報が全て入っている表現だが、$\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$ は「基底の情報が省略された表現」だ。実はこの二つは

$$\vec{v}=v_x\vec{\mathbf{e}}_x+v_y\vec{\mathbf{e}}_y+v_z\vec{\mathbf{e}}_z=\overbrace{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}}^{\text{しばしば省略される部分}}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

のように等式で結ばれる[†11]。$\boxed{\vec{v}=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}}$ のように書くことはよくあるが、「しばしば省略される部分」があることを忘れてはいけない。

「ベクトル $\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$ を微分すると $\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$ になる」という計算をしがちなのだが、これは一般に正しいとは限らない。省略されてる $\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}$ も微分しなくてはいけない場合がある（【演習問題2-2】→ p36）。ベクトルの一つの表現である「成分」と、ベクトルそのものを混同してしまうのは、よくある間違いなので注意しよう。

2.2.2　列ベクトルと行ベクトル

ベクトルを $\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}$ のように縦に並べるのを「**列ベクトル (column vector)**」（または「縦ベクトル」)、$\begin{bmatrix}a_x & a_y\end{bmatrix}$ のように横に並べるのを「**行ベクトル (row vector)**」（または「横ベクトル」）と呼ぶ。どっちが行でどっちが列かわからなくなる人は漢字 **行列** を思い出そう。横線を含む漢字が「行」で、縦線を含む漢字が「列」である。

本講義では、ベクトルは主に $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$ の $\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$ のように、「行列が掛かる相手」として登場するので、縦ベクトルを基本にし、一文字で $\vec{v}$ と表すときは縦ベクトルだとする。よって $\boxed{\vec{v}=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}}$ と書き[†12]、行列やベクトルの「縦 ↔ 横」の取り替える操作を「**転置 (transpose)**」と呼び、横ベクトルは「縦ベクトルを転置 (transpose) したもの」と解釈する。転置を記号 $^\top$ を右に付ける[†13]ことで表現するので、$\boxed{(\vec{v})^\top=\begin{bmatrix}v_x & v_y\end{bmatrix}}$ である[†14]。

2.2.3　加法とスカラー倍

ベクトルを「N 個の数の組」とした場合にも、前節の幾何的なベクトルと同様に足し算と定数倍を定義したい。以下のように考えると前節での定義に沿ったものになる。加法は

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\f\\g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+e\\b+f\\c+g\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

のように、成分ごとの足し算である。スカラー倍は

[†11] (2.5) の最後の式は内積の表現方法の一つ。後で説明する。→ p21

[†12] $\vec{v}$ と書いたときは表現をどのようにするかを指定してない、抽象的なベクトルである。$\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$ と書いたときはある表現を指定した上で（つまり、x 成分とか y 成分とは何であるかを指定した上で）「x 成分は v_x、y 成分は v_y」と示している。よってこの二つは数式を書くときの「文脈」が違うので、等号で結ぶのは厳密には正しくない（(2.5) の「しばしば省略する部分」は省略してはいけない）と言う立場もある。ここでは細かいことは言わずに $=$ でつないでしまった。

[†13] 転置を表す記号は t だったり T だったりするが、本書では $\top$ を使うことにした。行列 $\mathbf{A}$ の転置を $\rotatebox{90}{$\mathbf{A}$}$ のように表す、というのも面白いとは思うのだが。$\mathbf{A}^\top$ は「えーのてんち」または短く「えー・てんち」、あるいは英語で「えー・とらんすぽーず」と読む。

[†14] 物理屋がよく使う記号では、縦ベクトルに対応するもの（基本的なベクトル）を $\boxed{\left|v\right\rangle=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}}$ と、横ベクトルに対応するもの（基本的なベクトルと内積を取る相手）を $\boxed{\left\langle v\right|=\begin{bmatrix}v_x & v_y\end{bmatrix}}$ または $\boxed{\left\langle v\right|=\begin{bmatrix}v_x^* & v_y^*\end{bmatrix}}$（複素ベクトルの場合）のように表す。

$$\alpha\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a\\\alpha b\\\alpha c\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

のように成分すべてを定数倍すると考える[†15]。

実数の足算（加法）と掛算（乗法）については以下の法則が成り立つ。

実数の和の満たす法則

$$\begin{aligned}&\text{交換法則：}\quad a+b=b+a\\&\text{結合法則：}\quad (a+b)+c=a+(b+c)\\&\text{分配法則：}\quad a(b+c)=ab+ac\end{aligned} \tag{2.8}$$

ベクトルの加法と実数倍に関しても以下が成立する。

結果 2: ベクトルの和と実数倍の満たす法則

$$\begin{aligned}\text{交換法則：}\quad &\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\\\text{結合法則：}\quad &(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\\\text{スカラー積の結合法則：}\quad &\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}\\\text{ベクトル和の分配法則：}\quad &\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\\\text{スカラー和の分配法則：}\quad &(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで、通常の数を「スカラー」と呼んでいる。今の場合は実数または複素数である。これらの法則は図を描いて確認することができるだろう。

以下は α,β およびベクトルの成分が実数の場合を考えよう。

ベクトルは成分を並べて $\boxed{\vec{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}}$ と表現することを[†16]「成分表示」と呼ぶ。ベクトルの足し算は

まとめる

まとめる

$$\vec{a}+\vec{b}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y=(a_x+b_x)\vec{\mathbf{e}}_x+(a_y+b_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{2.10}$$

となり、ベクトルの足算は成分をそれぞれ足算すればよい。成分表示で書くと上の式は

$$\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

である。ベクトルから x 成分と y 成分を求める方法については、2.4.3 節を見よ。
→ p22

ベクトルを成分で表現したときの引算は

$$\vec{a}-\vec{b}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y-b_x\vec{\mathbf{e}}_x-b_y\vec{\mathbf{e}}_y=(a_x-b_x)\vec{\mathbf{e}}_x+(a_y-b_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{2.12}$$

$$\text{または}\qquad\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x-b_x\\a_y-b_y\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

のように成分どうしで引算をすればよい。

ベクトルの線形結合を作る操作は

$$\overbrace{\begin{bmatrix}V_x\\V_y\end{bmatrix}}^{\vec{V}}=\alpha\overbrace{\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}}^{\vec{a}}+\beta\overbrace{\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}}^{\vec{b}}=\begin{bmatrix}\alpha a_x+\beta b_y\\\alpha a_y+\beta b_y\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

と書くことができる。実はこれは、$\boxed{\begin{bmatrix}V_x\\V_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x&b_x\\a_y&b_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}}$ という行列計算とやっていることは同じである。ここに現れた行列 $\begin{bmatrix}a_x&b_x\\a_y&b_y\end{bmatrix}$ は、$\left[\boxed{\begin{matrix}a_x\\a_y\end{matrix}}\,\boxed{\begin{matrix}b_x\\b_y\end{matrix}}\right]$ のように縦ベクトルを二つ並べたものと考えることができる。

[†15] 「考える」って、これ当たり前では？ —と思う人もいるかもしれない。「素直な定義」としては当たり前である。しかし世の中にはなんらかの理由で「スカラー倍するときに z 成分だけは変化させない」のようなルールの「スカラー倍」を使いたくなることだってあるかもしれない。このような「変なスカラー倍」を定義して使用している場合は、**結果 2** の一部は成立しない。

[†16] 本書ではベクトルを成分表示したときの括弧は（行列の括弧と同様）色を変えて $[$ のように表現し、演算の順序を指定するための括弧とは区別する。成分と成分の間にコンマ (,) を入れる場合 $\boxed{\begin{bmatrix}a_x,a_y\end{bmatrix}}$ と入れない場合 $\boxed{\begin{bmatrix}a_x&a_y\end{bmatrix}}$ がある。また、縦に並べて $\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}$ のように表現してもよい。本講義では、縦並びを基本にする。p13 の注意を参照。

2.2.4　線形独立と線形従属

定義 1: 線形独立と線形従属

k 個のベクトル $\vec{a}_i=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_k)$ があって、どんな 0 ではない係数 α_i を持ってきて線形結合を作っても 0 ベクトルにできないとき、つまり

$$\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\alpha_i\vec{a}_i}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0} \tag{2.15}$$

となるのは全ての α_i が 0 である場合だけであるとき[†17]、この k 個のベクトル $\vec{a}_i$ は「**線形独立 (linearly independent)**」または「**一次独立**」あるいはもっと省略して「独立」だと言う。

逆に、適当に係数 $\{\alpha^*\}$ を[†18] もってくれば$\underset{\to\text{ p15}}{(2.15)}$が成り立つようにできるとき、これらのベクトル $\{\vec{v}_*\}$ は「**線形従属 (linearly dependent)**」または「**一次従属**」だと言う。

ベクトルの集合が線形独立かどうかは、それらが「基底」として使えるか（つまりは、考えている空間をそのベクトルで表現できるのか）という点で、大変重要である。

平面のベクトルの場合、2 本のベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が同じ方向を向いてなければ線形独立である。同じ方向を向いていれば、$\boxed{\vec{a}=k\vec{b}\text{（}k\text{ はある定数）}}$が成り立ち、$\vec{a},\vec{b}$ は線形従属である。以上は図形のベクトルの経験から納得できるだろう。

数ベクトルで同じことを考える。

$$\alpha\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

で等号が成り立つようにしようとすると、$\boxed{\alpha a_x+\beta b_x=0}$にしなくてはいけないから$\boxed{\beta=-\frac{\alpha a_x}{b_x}}$と決まってしまう。すると、

$$\alpha\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}-\frac{\alpha a_x}{b_x}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\alpha a_y-\frac{\alpha a_x}{b_x}b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\alpha\left(a_y-\frac{a_x}{b_x}b_y\right)\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

となるが、$\boxed{a_y-\frac{a_x}{b_x}b_y=0}$が成り立たないと右辺は零ベクトルにならない。この条件は$\boxed{\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=k}$と書き直すことができるから、つまりは $\vec{a}$ が $\vec{b}$ の定数倍（今の場合は k 倍）であることが線形従属である必要十分条件である（ただし、3 本以上のベクトルが線形従属であるときは定数倍とは限らない）。

3 本以上のベクトルが互いに平行ではないが$\boxed{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0}$となる状況が考えられるので、線形従属の条件は単純に「定数倍」とはならない。N 次元のベクトルで線形独立な組は N 個しかない。定義から、N 次元なら任意のベクトルを（基底を $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_N$ として）$\boxed{\vec{V}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots\alpha_N\vec{v}_N}$と表すことができる（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ は適切に選ばれた係数）。

N 次元のベクトルの k 本の線形結合は

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots\alpha_k\vec{v}_k=\begin{bmatrix}\boxed{\vec{v}_1}&\boxed{\vec{v}_2}&\cdots&\boxed{\vec{v}_k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_k\end{bmatrix} \tag{2.18}$$

のように行列を使って表現することができる。このベクトル $\{\vec{v}_*\}$ が線形従属なら、上の式の計算結果が $\vec{0}$ になることがある。それを判定するにはどうすればよいかというと、ここに現れた行列の性質を調べればよい。その性質とはなにかについては、後でじっくり説明しよう。

[†17] うっかりと忘れて線形独立じゃないベクトルの和に関して$\boxed{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}}$が成り立ったときに$\boxed{\vec{a}=0}$かつ$\boxed{\vec{b}=0}$だと思ってしまう、というのも「よくある間違い」なので注意。

[†18] 本講義では、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ とずらっと $\alpha_{なんとか}$ を並べるのが面倒なときは $\{\alpha_*\}$ と書くことにする。$*$ は「ここには任意の数/記号が入る」ことを示していると思って欲しい。

【問い 2-2】 以下のベクトルの組は線形独立か、線形従属か？

(1) $\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\0\\14\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}15\\41\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$

ヒント → p140 へ　解答 → p141 へ

2.3 内積

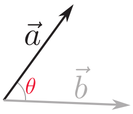
2.3.1 内積の定義

内積 (inner product)[19]は二つのベクトルの「掛算」に類する計算として定義される。あくまで「類する」であって掛け算とは別の計算である。この後掛け算とは違うところがいろいろ出てくるのだが、それはそういうものだと思って理解していくしかない。

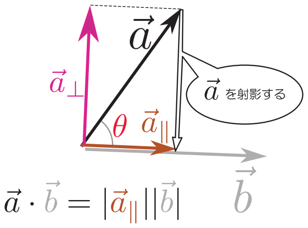
内積は何次元のベクトルでも定義できるが、高い次元においても、考えている二つのベクトルを含む平面で計算できるので、まずは内積を平面図形で表現しよう。

アプリのリンク

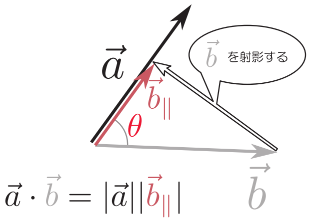
ベクトルの内積



のように、角度 θ をなす二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を考えよう。この二つのベクトルの内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く。その意味を式で表現するなら $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$ である。図で表現すると、のようになる[20]。



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}_{\parallel}||\vec{b}|$



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\parallel}|$

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算するためには、まずベクトル $\vec{a}$ を $\begin{cases}\vec{b}\text{ と同じ方向の } \vec{a}_{\parallel} \\ \vec{b}\text{ に垂直な } \vec{a}_{\perp}\end{cases}$ に分解する。そして同じ方向に分解されたベクトルの長さ $|\vec{a}_{\parallel}|$ に $\vec{b}$ の長さ $|\vec{b}|$ を掛ける。結果はスカラーとなる。

定義 2: 幾何ベクトルとしての内積の定義

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}_{\parallel}||\vec{b}| = \pm|\vec{a}||\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{2.19}$$

ただし複号 ± は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\begin{cases}\text{同じ向きを向いていればプラス} \\ \text{逆向きを向いていればマイナス}\end{cases}$ である。

結果 3: 自分自身との内積は長さの自乗

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \tag{2.20}$$

はすぐわかる（自分自身は同じ向きを向くから複号は +）。

これは正または 0 の量である[21]。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ には、「$\vec{b}$ のうち $\vec{a}$ に平行な成分しか寄与しない」という性質がある。よって、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直なら、$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$ となる。これは (2.19) で $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ （直角）になった場合である。

---

[19] 記号 · を使うので「**ドット積（· 積）(dot product)**」と呼んだり、結果がスカラーになるので「**スカラー積 (scalar product)**」と呼んだりする。

[20] $\parallel, \perp$ はそれぞれ「平行」「垂直」を表す記号。$\vec{a}_{\parallel}$ を「$\vec{a}$ の $\vec{b}$ 方向の射影」と呼ぶ。

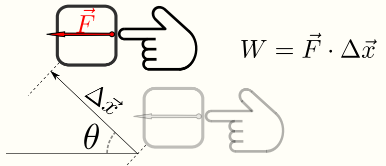
[21] $\boxed{|\vec{a}|^2 = 0}$ になるのは、$\vec{a}$ が長さが 0 のベクトル、すなわち $\vec{0}$ であるときのみ。

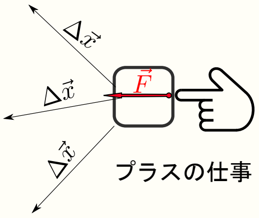
FAQ 何のために「内積」なんてものを定義するの？

内積の意味にはいろいろあるが、まずは「二つのベクトルが同じ方向を向いていると大きくなる掛算」が欲しかったのだ、と思ってもらってもよい。上で述べた「直交するベクトルの内積は 0」というのは「直交するベクトルは赤の他人」というイメージで捉えてほしい。内積が正なら「似た方向を向いている」と判断できる。

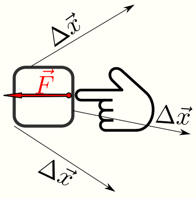
この性質があるので、内積はベクトルを方向ごとに分解するときにも使われる。

物理での内積の使いみちとしては「仕事」という量があって、これは力というベクトル $\vec{F}$ と、力を受けた物体の移動（変位）$\Delta\vec{x}$ の内積で定義される（$\boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x}}$）。これは力と移動方向が同じ方向ならプラス、逆向きならマイナスになるように定義されていて、「力を出しても、物体がそれと逆に動いたら仕事はマイナス」というシビア（？）な判定をするために使われる[†22]。





プラスの仕事



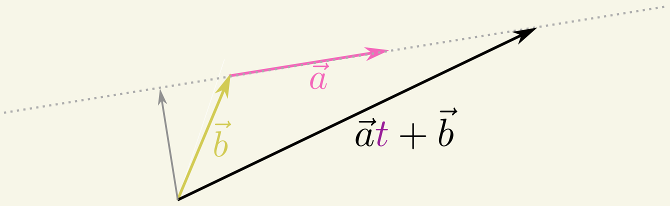
マイナスの仕事

他にも「自乗すると長さの自乗になる」という内積の性質がいろんな計算を楽にすることも多い。たとえば「$\vec{a}t+\vec{b}$ というベクトルが最も短くなるのはどんなときか？」という問題は

$$|\vec{a}t+\vec{b}|^2 = (\vec{a}t+\vec{b})\cdot(\vec{a}t+\vec{b}) = |\vec{a}|^2t^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}t + |\vec{b}|^2 \tag{2.21}$$

という 2 次式の最小値はいくらか？ —という問題に還元することができる。

【問い 2-3】 上の FAQ の最後の問題、すなわち、「$\vec{a}t+\vec{b}$ というベクトルが最も短くなるのはどんなときか？」を解いてみよ。できれば、なぜそうなるのかの図解も試みよ。図解のためには、次の図を使うとよい。



ヒント → p140 へ　　解答 → p141 へ

2.3.2　内積の交換・結合・分配法則

普通の数どうしの積（掛算）では

実数の積の満たす法則

交換法則：　$ab = ba$
結合法則：　$(ab)c = a(bc)$　　(2.22)
分配法則：　$a(b+c) = ab+ac$

が成立したが、内積に関してはどうだろうか。まず、

結果 4: 内積の交換法則

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \tag{2.23}$$

が成立するのは **定義 2** を見ればわかる。

→ p16

結合法則は成立しないというより、そもそも意味がない。$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ のような「三つのベクトルの内積」が計算不可能だからである。二つのベクトルの内積はスカラーだから、スカラーとベクトルの内積を取ることはできない。2 個目の「掛算」を単なるスカラー倍だとしても、結合法則は成立しない。

[†22] 「FAQ の中の FAQ」として「なぜ力と逆に物体が動くのですか？」というものがある。これには二つの答えがある。一つは「働いているのがこの力だけとは限らないでしょ」であり、もう一つは「物体の運動方向は力と一緒とは限らないでしょ」というもの。と言われてもまだ納得できないという人は、真剣に力学を勉強しなおすこと。

結果 5: 内積の結合法則は成立しない

$$\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}_{\vec{c}\text{の }(\vec{a}\cdot\vec{b})\text{ 倍}} \neq \underbrace{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\vec{a}\text{の }(\vec{b}\cdot\vec{c})\text{ 倍}} \qquad (2.24)$$

である[†23]。

結果 6: 内積の分配法則

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (2.25)$$

は成立する。

上のような計算をする時、（内積を取っているので）結果に関係するのは $\vec{a}$ に平行な成分のみである。分配法則の証明のためには、

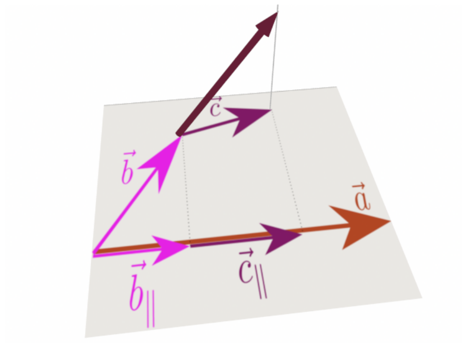
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}_{\parallel}+\vec{c}_{\parallel}) = \overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}_{\parallel}}^{\pm|\vec{a}||\vec{b}_{\parallel}|}+\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}_{\parallel}}^{\pm|\vec{a}||\vec{c}_{\parallel}|} \qquad (2.26)$$

を示せば十分である[†24]。

アプリのリンク

ベクトルの内積の分配法則

第 1 の等式、「$\vec{b}+\vec{c}$ の $\vec{a}$ 方向への射影」と「$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\vec{b}\text{ の }\vec{a}\text{ 方向への射影}}\\ \boxed{\vec{c}\text{ の }\vec{a}\text{ 方向への射影}}\end{array}\right.$ の和」が等しいことを示す。



これは左のような図を描けば納得できるだろう。立体的ベクトルの場合、左図に示したように、$\vec{c}$ には「紙面に垂直な方向」にはみ出す成分がある[†25]が、それは計算に効かない。

$\vec{b}_{\parallel},\vec{c}_{\parallel}$ は $\vec{a}$ と同じ向きだから、実数 β,γ を使って $\boxed{\vec{b}_{\parallel}=\beta\vec{a},\vec{c}_{\parallel}=\gamma\vec{a}}$ と書ける。よってベクトルの実数倍に関する分配法則 $\boxed{(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}}$ を使うことができて、第 2 の等式もわかる。まとめて書いておこう。(3) は上で説明していないが、容易に理解できると思う。

結果 7: 幾何ベクトルの内積に関する定理

(1)$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$（交換法則）

(2)$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$（分配法則）

(3)$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$

(4)$\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$（等号が成り立つのは $\vec{v}=\vec{0}$ のときのみ）

2.3.3　線形性と双線形性

ある写像[†26] $f(X)$ が「線形結合を取ってから写像しても、写像してから線形結合を取っても同じであるとき、「この写像には線形性がある」あるいはもっと短く「この写像は**線形 (linear)** である」[†27]である[†28]と言う。

---

†23　$\vec{c}$ と $\vec{a}$ の向きが違う場合を考えれば、すぐわかる。

†24　式の上の $|\vec{a}||\vec{b}_{\parallel}|$ と $|\vec{a}||\vec{c}_{\parallel}|$ には複号がついているが、同じ向きを向いていれば +、逆向きなら − であることに注意。

†25　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平面上にあるように図を描いているので、この二つのベクトルは考えている平面内にある。$\vec{c}$ ははみ出す可能性がある。

†26　ある集合の元（数でもベクトルでも、あるいはもっと抽象的な量でもいい）を決めると別の集合の元（こちらもなんでもよい）が決まるという関係のことを「**写像 (mapping)**」と言う。両方が数なら通常の意味での「関数」である（$\boxed{f(x)=x^2}$ は実数の集合から 0 以上の実数の集合への写像、$\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$ は実数の集合から複素数の集合への写像）。英語の「mapping」は「場所を一つ決めると地図上の一点が決まる」というイメージの言葉。

†27　「**線形変換 (linear transformation)**」または「**1 次変換**」と呼ぶこともある。

†28　写像を記号で表現するとき、「ある集合 X から別の集合 Y への写像である」ことは「$X\to Y$」のように表し、「ある要素 x を別の要素 y に写像する」ことは「$x\mapsto y$」と表現する。たとえば「実数を 2 倍する」という写像は、「実数から実数への写像である」と表現したいなら $\boxed{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ と書く。「x を $2x$ に写す写像である」と表現したいなら、$\boxed{x\mapsto 2x}$ と書く。

定義 3: 線形写像の定義

ある写像 $X \mapsto T(X)$ が、線形結合を取ってから写像しても、写像してから同じ係数で線形結合を取っても結果が同じ、すなわち

$$T(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 T(X_1) + \alpha_2 T(X_2) \tag{2.27}$$

を満たすとき[†29]、$T(X)$ は線形写像である（ただし、α_1, α_2 はスカラー量）。

上記をシンプルに「T は線形である」と表現することもある。

「線形写像である」ということは、かなり大きい制約である。世界に沢山ある「写像」のうち、一部に過ぎない。たとえば、以下の写像は、すべて線形写像ではない。

(1) $x \mapsto ax + b$ (2) $x \mapsto x^2$ (3) $\vec{v} \mapsto |\vec{v}|$

しかしそれでも重要なのは、「線形写像に限っても十分に応用範囲が広い」ことだ（特に物理では量子力学が線形写像を使いまくる）。内積は「二つのベクトルから実数への写像 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \mapsto \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$」であり、線形性に近い性質がある。というのは、結果 7 の (2) と (3) を組み合わせると以下が言える。

→ p18

結果 8: 内積の双線形性

$$\vec{C} \cdot (\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha\vec{C} \cdot \vec{A} + \beta\vec{C} \cdot \vec{B} \tag{2.28}$$

$$(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) \cdot \vec{C} = \alpha\vec{A} \cdot \vec{C} + \beta\vec{B} \cdot \vec{C} \tag{2.29}$$

が成り立つ[†30]。つまり、「線形結合を作ってから内積を取ったものと、内積を取ってから線形結合を作ったものの結果は同じ」である。

内積は二つのベクトルから実数を作る写像 $f(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$ と考えることができて、前の引数である $\vec{v}$ についても後ろの引数である $\vec{w}$ についても線形性があるので「双線形性がある」「**双線形 (bilinear)** である」と言う。後で出てくる外積や、行列の掛け算などにも共通する性質である。

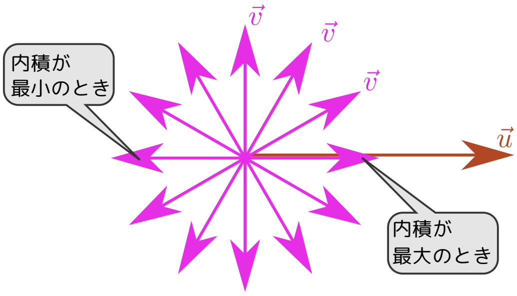
2.3.4 内積に関する不等式

結果 9: Schwarz の不等式

$$-|\vec{u}|\,|\vec{v}| \le \vec{u} \cdot \vec{v} \le |\vec{u}|\,|\vec{v}| \tag{2.30}$$

という式がある。幾何ベクトルの関係式としてはこの式は非常に当たり前の式である。まず $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm|\vec{u}||\vec{v}_{\parallel}|$（$\pm$ は $\vec{v}_{\parallel}$ の向きによって変わる）を思い出す。$\vec{v}_{\parallel}$ は $\vec{v}$ のうち $\vec{u}$ と平行な成分なのだから、$0 \le |\vec{v}_{\parallel}| \le |\vec{v}|$ なのはすぐわかる。後は $\vec{v}$ を掛けるだけである[†31]。

あるいは右のように図を描くと理解できるだろう。



また、$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$ を思い出せば、$-1 \le \cos\theta \le 1$ からもわかるだろう。これを使うと、以下の式が証明できる。

結果 10: 三角不等式

$$\Big|\,|\vec{u}| - |\vec{v}|\,\Big| \le |\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}| \tag{2.31}$$

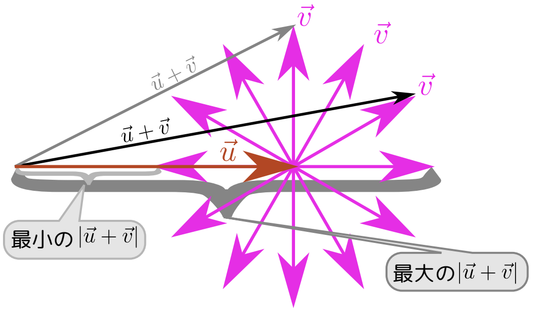
[†29] この式の条件は、$T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$ と $T(\alpha_1 X_1) = \alpha_1 T(X_1)$ に分けて表記することも多い。これら二つは $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ と置いたものと、$\alpha_2 = 0$ と置いたものである。

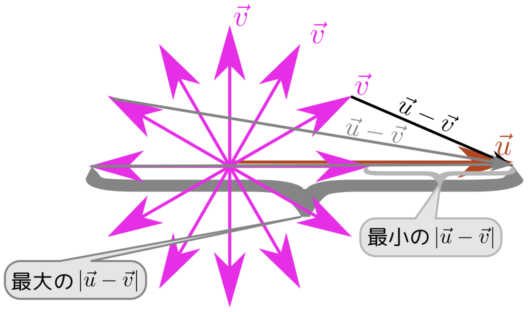
[†30] 内積は交換するので、この二つの式は同じ意味。

[†31] Schwarz の不等式のありがたいところは、もっと抽象的な「ベクトル」（後で出てくる）に対しても成り立つことである。

【問い 2-4】 Schwarz の不等式から三角不等式を導け。 ヒント → p140 へ 解答 → p141 へ

問いでは計算で示したが、下のように図を掛けばわかる（「三角不等式」という名前の意味も明白だ）。





ついでに、$\vec{u}-\vec{v}$ のような引き算の長さがどうなるかを表す図も右側に示した。図ではどちらも、$\vec{u}$ を固定して $\vec{v}$ は長さ $|\vec{v}|$ を固定して向きを変えている。$\vec{u}\pm\vec{v}$ の長さの最大・最小を図から読み取れば三角不等式が示される。

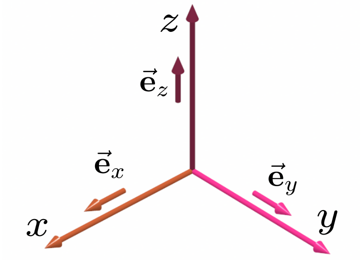
2.4 数ベクトルの内積

2.4.1 内積の成分表示での計算法

分配法則など、内積の計算方法がいくつかわかったので、これらを使って数ベクトルでの内積がどのようなものになるかが計算できる。任意の二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を、直交座標の基底を使って $\begin{cases}\boxed{\vec{a}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_z\vec{\mathbf{e}}_z}\\ \boxed{\vec{b}=b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y+b_z\vec{\mathbf{e}}_z}\end{cases}$ と成分で表したとする。この二つのベクトルの内積を成分で表示してみよう。

ここで使う基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y,\vec{\mathbf{e}}_z$ はそれぞれの軸の方向を向いた単位ベクトル（長さ 1）なので、以下が成り立つ。

$$\vec{\mathbf{e}}_x\cdot\vec{\mathbf{e}}_x=\vec{\mathbf{e}}_y\cdot\vec{\mathbf{e}}_y=\vec{\mathbf{e}}_z\cdot\vec{\mathbf{e}}_z=1 \quad (\text{それ以外})=0 \tag{2.32}$$



定義 4: クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\text{ のとき}\\ 0 & i\neq j\text{ のとき}\end{cases} \tag{2.33}$$

で定義される**クロネッカーのデルタ (Kronecker delta)** という記号を使うと、(2.32) は $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\vec{\mathbf{e}}_j=\delta_{ij}}$ と書くことができる。(2.32) では i,j に x,y,z のどれかが入る。

二つのベクトルの内積を分配法則を使って計算すると

$$\begin{aligned}(a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_z\vec{\mathbf{e}}_z)\cdot(b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y+b_z\vec{\mathbf{e}}_z)=\;& a_x\vec{\mathbf{e}}_x\cdot b_x\vec{\mathbf{e}}_x+\cancel{a_x\vec{\mathbf{e}}_x\cdot b_y\vec{\mathbf{e}}_y}+\cancel{a_x\vec{\mathbf{e}}_x\cdot b_z\vec{\mathbf{e}}_z}\\ &+\cancel{a_y\vec{\mathbf{e}}_y\cdot b_x\vec{\mathbf{e}}_x}+a_y\vec{\mathbf{e}}_y\cdot b_y\vec{\mathbf{e}}_y+\cancel{a_y\vec{\mathbf{e}}_y\cdot b_z\vec{\mathbf{e}}_z}\\ &+\cancel{a_z\vec{\mathbf{e}}_z\cdot b_x\vec{\mathbf{e}}_x}+\cancel{a_z\vec{\mathbf{e}}_z\cdot b_y\vec{\mathbf{e}}_y}+a_z\vec{\mathbf{e}}_z\cdot b_z\vec{\mathbf{e}}_z\\ \text{残る}\quad\text{残る}\quad\text{残る}\quad =\;& a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。つまり内積は「x 成分どうし、y 成分どうし、z 成分どうし（上で $\underbrace{\qquad}_{\text{残る}}$ でつないだペア）の積を足す」計算になっている。

結果 11: 内積の成分表示

$$\boxed{\vec{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}}\text{ と }\boxed{\vec{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}}\text{ の内積は}\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{2.35}$$

下付き添字を x, y, z ではなく $1, 2, 3$ を使って $\boxed{a_1 = a_x, a_2 = a_y, a_3 = a_z}$ と書いて、内積を

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \tag{2.36}$$

のように書くこともある。ここで 1 から 3 までが代入される添字 j は「ダミーの添字」と呼ぶ。

内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のように記号 $\cdot$ を使って書いてもいい（これを行ベクトル→ p13 や列ベクトルで表すと $\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}$ あるいは $\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}$ になる）が、$\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}$ のように行ベクトルと列ベクトルを並べて書いてもよい。こちらの書き方のときは $\cdot$ はいらない。

なぜこういう書き方をするかというと、このように列ベクトル・行ベクトルと並べた場合は行列の掛算（たとえば、$\boxed{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{bmatrix}}$）と同じ計算になるからである。1 行のみの行列を前から掛けていると考えると、$\boxed{\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+by\end{bmatrix}}$ のような式になる。右辺は 1×1 行列なので括弧は外していい。

2.4.2　内積を使った射影の定義

$\vec{a}$ のうち、ベクトル $\vec{b}$ の方向を向いた成分を取り出すことを「射影」と言う。p16 に描いた図の $\vec{a}_{\parallel}$ を求める計算である。$\vec{a}_{\parallel}$ の長さ $|\vec{a}_{\parallel}|$ に $|\vec{b}|$ を掛けたもの（ただし、$\vec{a}_{\parallel}$ と $\vec{b}$ が逆向きのときは $-$ をつける）が内積である（$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}_{\parallel}|\,|\vec{b}|}$）。

「射影を使って内積を定義した」という先の流れとは逆に、内積を使って射影を表現することもできる[†32]。$\boxed{|\vec{a}_{\parallel}| = \pm\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$ が言える。これに $\vec{a}_{\parallel}$ 方向を向いた単位ベクトル $\pm\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ を[†33]掛ければ、

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \tag{2.37}$$

がわかる（複号が消えることに注意）。$\vec{b}$ に垂直な方向はこれを $\vec{a}$ から引けばよいから、以下がわかる。

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \tag{2.38}$$

【問い 2-5】 上の式の $\vec{a}_{\perp}$ と $\vec{b}$ が垂直であることを、内積を取るとゼロになることで確認せよ。　解答 → p141

この式の順番を少し変えて、

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\vec{a} \tag{2.39}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{b}\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|^2} = \left(1 - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\right)\vec{a} \tag{2.40}$$

とすると、$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\boxed{?}$ は「$\boxed{?}$ から $\vec{b}$ と平行な方向のベクトルを取り出す演算」になっている[†34]し、$\left(\boxed{?} - \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\boxed{?}\right)$ は「$\boxed{?}$ から $\vec{b}$ と垂直な方向のベクトルを取り出す演算」と見る[†35]ことができる。

[†32] 最終的にベクトルの定義を幾何ベクトルではなく、もっと広いものとして捉えていくので、図形的な意味の射影から離れる準備をしておく必要がある。

[†33] ± がつくのは、$\vec{a}_{\parallel}$ の方向と $\vec{b}$ の方向が一致してない場合があるから。

[†34] これを「$\boxed{?}$ に左から $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot$ を掛ける」と表現することもある。

[†35] こちらも、「$\boxed{?}$ に左から $\left(1 - \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\right)$ を掛ける」と表現することもある。脚注 †34 の表現もこの表現も、（$\cdot$ の後ろに何もないという書き方は本来ないので）あくまで「記号的 (symbolic) な表現」である。

2.4.3　内積を使った成分の分解

任意のベクトル $\vec{A}$ が与えられたとき、その x 成分 A_x を求めたければ、$\vec{\mathbf{e}}_x$ と内積を取ればよい。

$$\vec{\mathbf{e}}_x\cdot(A_x\vec{\mathbf{e}}_x + A_y\vec{\mathbf{e}}_y + A_z\vec{\mathbf{e}}_z) = A_x \tag{2.41}$$

となるからである。A_y, A_z についても同様なので、

$$\vec{A} = \vec{\mathbf{e}}_x\overbrace{(\vec{\mathbf{e}}_x\cdot\vec{A})}^{A_x} + \vec{\mathbf{e}}_y\overbrace{(\vec{\mathbf{e}}_y\cdot\vec{A})}^{A_y} + \vec{\mathbf{e}}_z\overbrace{(\vec{\mathbf{e}}_z\cdot\vec{A})}^{A_z} = \sum_{j=1}^{3}\vec{\mathbf{e}}_j\left(\vec{\mathbf{e}}_j\cdot\vec{A}\right) \tag{2.42}$$

が言える。この一連の計算により $\vec{A}$ がまた $\vec{A}$ に戻る。

よって任意のベクトル $\boxed{?}$ に対して演算 $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_x(\vec{\mathbf{e}}_x\cdot\boxed{?}) + \vec{\mathbf{e}}_y(\vec{\mathbf{e}}_y\cdot\boxed{?}) + \vec{\mathbf{e}}_z(\vec{\mathbf{e}}_z\cdot\boxed{?})}$ は恒等演算（何もしない演算）になっている。この恒等演算から「z 方向への射影」である $\vec{\mathbf{e}}_z(\vec{\mathbf{e}}_z\cdot\boxed{?})$ を除くと、「z 方向に垂直な方向への射影」（または「xy 平面への射影」）である $\vec{\mathbf{e}}_x(\vec{\mathbf{e}}_x\cdot\boxed{?}) + \vec{\mathbf{e}}_y(\vec{\mathbf{e}}_y\cdot\boxed{?})$ になる。

2.4.4　双対基底

以上は基底ベクトルが互いに垂直でノルムが 1 であった場合であるが、そうでない基底を使った場合でも工夫すれば同様のことができる。たとえば独立で、かつ互いに直交してない $\vec{v}^1, \vec{v}^2$（添字が上付きになっていることに注意）があるとしよう。基底と双対基底を区別するため、ここでは $\left\{\begin{array}{l}\text{基底は上付き添字で}\\ \text{双対基底は下付き添字で}\end{array}\right.$ 表記するというルールで書くことにする。上付き添字はべき乗の数字ではないことに注意（そのため、添字は灰色で書く）。紛らわしいが $\vec{v}^1$ と $\vec{v}_1$ は一般に違うベクトルである。これらの直交してないベクトルを基底ベクトルとして使って、

$$\vec{A} = A_1\vec{v}^1 + A_2\vec{v}^2 \tag{2.43}$$

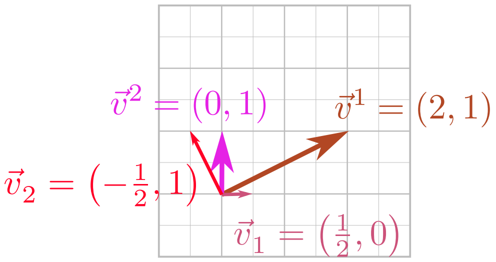
のように $\vec{A}$ を表現したとき、この成分（A_1, A_2）はどう計算できるだろうか[†36]。

「$\vec{v}^2$ とは直交していて $\vec{v}^1$ との内積が 1 になるベクトル」を作ることができたとしよう。そのベクトルを $\vec{v}_1$ と書くことにする（添字が下付きになっていることに注意）。$\vec{v}_1$ を使って以下のようにして、A_1 が求められる。

$$\vec{v}_1\cdot\vec{A} = A_1\underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}^1}_{=1} + A_2\underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}^2}_{=0} = A_1 \tag{2.44}$$

同様に「$\vec{v}^1$ とは直交していて $\vec{v}^2$ との内積が 1 になるベクトル」である $\vec{v}^2$ を使って

$$\vec{v}_2\cdot\vec{A} = A_1\underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}^1}_{=0} + A_2\underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}^2}_{=1} = A_2 \tag{2.45}$$



である。ここで導入した $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は以下で定義する双対基底である。実際に作った例が上の図である。

定義 5: 双対基底

$\{\vec{v}^*\}$ を基底としたとき、

$$\vec{v}_i\cdot\vec{v}^j = \delta_i^{\ j} \tag{2.46}$$

を満たす $\{\vec{v}_*\}$ を「$\{\vec{v}^*\}$ に対する**双対基底 (dual basis)**」と呼ぶ。

[†36] こういう計算がなぜ必要かというと、2 次元どころではないたくさんのデータで構成された $\vec{A}$ があったとき、その中から「自分の欲しいデータを取り出す」ということがしたいからである。取り出し方の一つが、以下で説明する「双対基底を掛ける」ことなのである。

考えているベクトル $\vec{A},\vec{B}$ を一方は基底で、もう一方は双対基底で

$$\vec{A} =A_1\vec{v}^{\,1} + A_2\vec{v}^{\,2} + \cdots A_N\vec{v}^{\,N}, \tag{2.47}$$

$$\vec{B} =B^1\vec{v}_1 + B^2\vec{v}_2 + \cdots B^N\vec{v}_N \tag{2.48}$$

のように展開すると、内積は $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_i A_iB^i}$ のように通常の内積と同様に成分ごとの積の和で計算することができる。もし、両方を基底ベクトルを使って

$$\vec{A} = A_1\vec{v}^1 + A_2\vec{v}^{\,2} + \cdots A_N\vec{v}^N, \quad \vec{B} = B_1\vec{v}^1 + A_2\vec{v}^{\,2} + \cdots A_N\vec{v}^N \tag{2.49}$$

と展開した[†37]なら、内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i,j} A_iB_j\left(\vec{v}^i\cdot\vec{v}^j\right) \tag{2.50}$$

のようになる。規格直交基底の場合、$\boxed{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=\delta_{ij}}$ となるから簡単になる。

アプリのリンク

双対基底

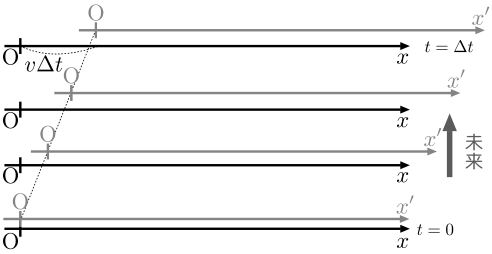
「x,y 軸方向の単位ベクトル」のようなわかりやすい規格直交基底を使わずに $\underset{\to\ \text{p22}}{(2.43)}$ のように一般的な基底で分解してベクトルを表現することは、場合によっては必要である。考えている現象（物理現象だったり生物現象だったり社会現象だったり）を表現するのに「長さが1で互いに直交する基底ベクトル」が便利であるとは限らないのである。

2.4.5　座標変換と基底の変換

ガリレイ変換と呼ばれる座標変換がある。ニュートン力学において「静止している人」の座標系（以下、「静止系」）を (x,t) としたとき（空間は1次元 x のみとする）、「速さ v で運動している人」は別の座標系 (x',t')（以下、「運動系」）で物理を考える。

ガリレイ変換とはこの二つの座標系の間での座標変換で、

$$\begin{cases} x' = & x - vt \\ t' = & t \end{cases} \tag{2.51}$$



という式で表される。この時空間 (x,t) 内の位置ベクトルを $x\vec{\mathbf{e}}_x+t\vec{\mathbf{e}}_t$ としよう。二つの座標系は「同じ物理現象を別の立場で表現したもの」であるから、同じ位置ベクトルを $x'\vec{\mathbf{e}}_{x'}+t'\vec{\mathbf{e}}_{t'}$ と表現することもできる。二つの座標系は違う基底を使っているから $\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$ と成分で書いた場合、この二つは等式で結べない。

違いを考慮して基底も含めて表現すれば

$$x\vec{\mathbf{e}}_x + t\vec{\mathbf{e}}_t = x'\vec{\mathbf{e}}_{x'} + t'\vec{\mathbf{e}}_{t'} \tag{2.52}$$

という等式が成り立つ。

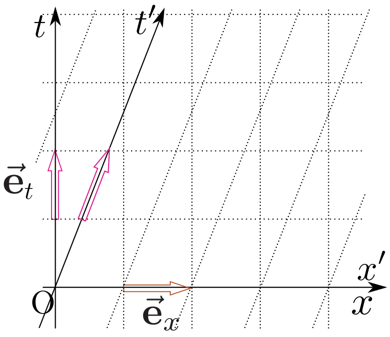
静止系の基底は $\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_t$ であり、それの双対基底 $\vec{\mathbf{e}}^x,\vec{\mathbf{e}}^t$ は

$$\begin{matrix} \vec{\mathbf{e}}^x\cdot\vec{\mathbf{e}}_x=1, & \vec{\mathbf{e}}^x\cdot\vec{\mathbf{e}}_t=0, \\ \vec{\mathbf{e}}^t\cdot\vec{\mathbf{e}}_x=0, & \vec{\mathbf{e}}^t\cdot\vec{\mathbf{e}}_t=1 \end{matrix} \tag{2.53}$$

を満たす。同様に運動系の基底と双対基底は

$$\begin{matrix} \vec{\mathbf{e}}^{x'}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{x'}=1, & \vec{\mathbf{e}}^{x'}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{t'}=0, \\ \vec{\mathbf{e}}^{t'}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{x'}=0, & \vec{\mathbf{e}}^{t'}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{t'}=1 \end{matrix} \tag{2.54}$$

を満たす。静止系と運動系の基底の関係は、描いたグラフを見て読み取ることもできるが、ここでは式で考えよう。(2.52) に (2.51) を代入すれば



$$x\vec{\mathbf{e}}_x + t\vec{\mathbf{e}}_t = (x-vt)\,\vec{\mathbf{e}}_{x'} + t\vec{\mathbf{e}}_{t'} \tag{2.55}$$

[†37] $\{\vec{v}_*\}$ を使ったときと $\{\vec{v}^{\,\cdot}\}$ を使ったときでは展開係数 $\{A_*\}$ は違う。そのことを表すために、$A^1\vec{v}_1+\cdots$ あるいは $A_1\vec{v}^{\,1}+\cdots$ のように、展開係数の方の添字を上げ下げして、必ず上付きと下付きがセットで現れるようにするというルールがよく使われる。A^1 と A_1 は違う量である。

となり、x と t の「係数」を比較すると

$$\vec{\mathbf{e}}_x = \vec{\mathbf{e}}_{x'},\quad \vec{\mathbf{e}}_t = -v\vec{\mathbf{e}}_{x'} + \vec{\mathbf{e}}_{t'} \tag{2.56}$$

左辺に運動系の量が来るように書き直すと、
$$\vec{\mathbf{e}}_{x'} = \vec{\mathbf{e}}_x,\quad \vec{\mathbf{e}}_{t'} = \vec{\mathbf{e}}_t + v\vec{\mathbf{e}}_x \tag{2.57}$$

である（グラフに描かれている基底ベクトルと比較せよ）。ここで、座標の方は $x \to x'$ が変換を受けている（t は t' と同じ）が、基底は $\vec{\mathbf{e}}_t \to \vec{\mathbf{e}}_{t'}$ の方が変換を受けている（$\vec{\mathbf{e}}_x$ と $\vec{\mathbf{e}}_{x'}$ は同じ）ことに注意せよ。

双対基底の方は

$$\vec{\mathbf{e}}^x = \vec{\mathbf{e}}^{x'} + v\vec{\mathbf{e}}^{t'},\quad \vec{\mathbf{e}}^t = \vec{\mathbf{e}}^{t'} \tag{2.58}$$

左辺に運動系の量が来るように書き直すと、
$$\vec{\mathbf{e}}^{x'} = \vec{\mathbf{e}}^x - v\vec{\mathbf{e}}^t,\quad \vec{\mathbf{e}}^{t'} = \vec{\mathbf{e}}^t \tag{2.59}$$

と変換される。双対基底の方の変換は座標の変換(2.51) → p23 と同じ形である。

$\boxed{x\vec{\mathbf{e}}_x + t\vec{\mathbf{e}}_t = x'\vec{\mathbf{e}}_{x'} + t'\vec{\mathbf{e}}_{t'}\,(2.52)}$ → p23 に前から $\vec{\mathbf{e}}^{x'}$ を掛けると

$$\vec{\mathbf{e}}^{x'} \cdot (x\vec{\mathbf{e}}_x + t\vec{\mathbf{e}}_t) = \vec{\mathbf{e}}^{x'}(x'\vec{\mathbf{e}}_{x'} + t'\vec{\mathbf{e}}_{t'})$$

$$\left(\vec{\mathbf{e}}^x - v\vec{\mathbf{e}}^t\right) \cdot (x\vec{\mathbf{e}}_x + t\vec{\mathbf{e}}_t) = \vec{\mathbf{e}}^{x'}(x'\vec{\mathbf{e}}_{x'} + t'\vec{\mathbf{e}}_{t'})$$

$$x - vt = x' \tag{2.60}$$

となって元の座標変換の式になる（$\vec{\mathbf{e}}^{t'}$ を掛ければ $\boxed{t = t'}$ が戻ってくる）。

2.5 外積

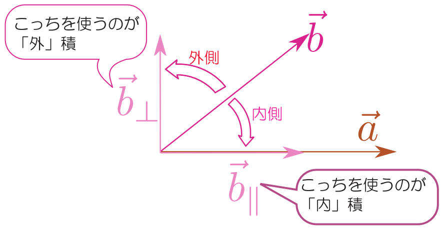
アプリのリンク

外積

2.5.1 外積の定義:2 次元

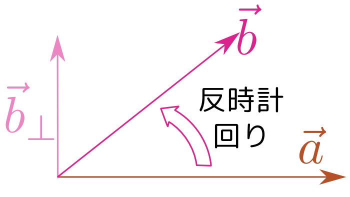
外積 (exterior product)[†38] もまた、二つのベクトルによる計算だが、内積と違って、結果はスカラーとは限らない（2 次元ではスカラー、3 次元ではベクトルである）。

実数や複素数の掛け算は $a \cdot b$ と書いたり $a \times b$ と書いたり、さらには記号なしで ab と書いたりするが、ベクトルとベクトルの場合は内積なら $\vec{a}\cdot\vec{b}$、外積なら $\vec{a}\times\vec{b}$ と使い分ける必要がある。

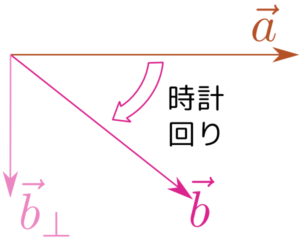


2 次元（平面）の場合の外積は、右図のように内積のときには捨てていた垂直成分 $\vec{b}_\perp$ の方を掛算するという計算である（下で述べるように、符号に注意）。

ベクトルの積として、「内積」と「外積」と二つの積が出てくるが、$\vec{b}$ のうち、$\vec{a}$ から見て「外側」である $\vec{b}_\perp$ が効いてくるのが「$\boxed{外}$積」、「内側」である $\vec{b}_\parallel$ が効いてくるのが「$\boxed{内}$積」と考えておくと二つの区別がつきやすい。符号が重要で、2 次元の場合は次の図のように定める。



外積がプラス



外積がマイナス

[†38] 記号 × を使うので「**クロス積（× 積）(cross product)**」（本によっては記号 ∧ を使い、「**くさび積 (wedge product)**」）と呼ぶ場合もある（次元が 3 より大きくなる状況ではこっちを使うことが多い）。また、結果がベクトルになる積、という意味で「**ベクトル積 (vector product)**」と呼ぶこともある（この呼び方は 3 次元でのみ意味がある）。

「反」がついている方がプラスなのはややこしいが、北半球からみたときの地球の自転の方向がプラス方向になっている。ちなみに時計回りが自転と逆向きなのは、日時計の針（つまりは影）が北半球では時計回りに回ることに沿っている。

数式で表現するなら、

定義 6: 平面上の外積

成す角が θ である二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積は

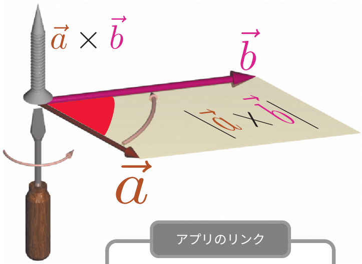
$$\vec{a}\times\vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}_\perp| = \pm|\vec{a}_\perp|\,|\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta \tag{2.61}$$

である。

角度 θ は、$\vec{a}\to\vec{b}$ が $\begin{cases}\text{「反時計回りの位置関係」ならプラス}\\ \text{「時計回りの位置関係」ならマイナス}\end{cases}$ となるように取る。第 2、第 3 式の複号は第 4 式に一致するようにする。

内積は二つのベクトルが「逆」を向くとマイナスになったが、外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は二つのベクトルが反時計回りか時計回りかで符号が変わる。同じ向きならば結果は 0 である。

2.5.2　外積の定義:3 次元



アプリのリンク

3 次元の外積

3 次元の場合外積はベクトル[†39]だが、その向きをまずは図形で表現しよう。

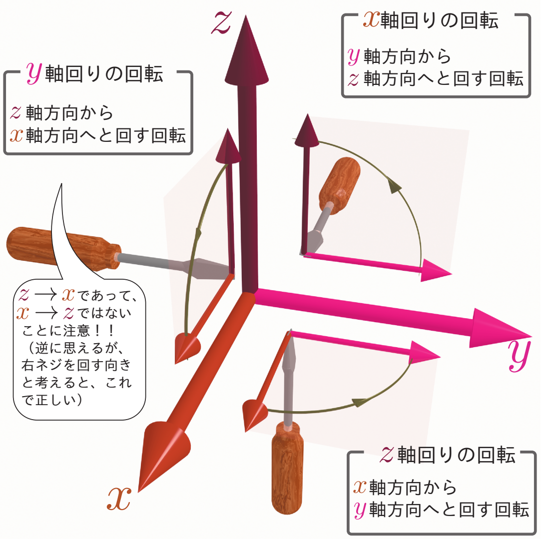
外積の結果は二つのベクトルがある面[†40]の法線方向を向く。

向きは、図に示したように「$\vec{a}$ の向きから $\vec{b}$ の向きへとベクトルを回したとき、右ネジが進む向きを「$\vec{a}\times\vec{b}$ の向き」とする。

外積という計算の結果であるベクトルの方向は「回転の軸」の方向である。

「**どの方向からどの方向へ回すか**」の例として、三つの座標軸 x, y, z から二つを選んで、図を描いてみよう。

「x 軸方向から y 軸方向へ回す」という回転を「z 軸回りの回転」と表現した（その意味は図に描き込んだように z 軸の方向にドライバーを向けてネジを締めるように回すというイメージで理解してほしい）。



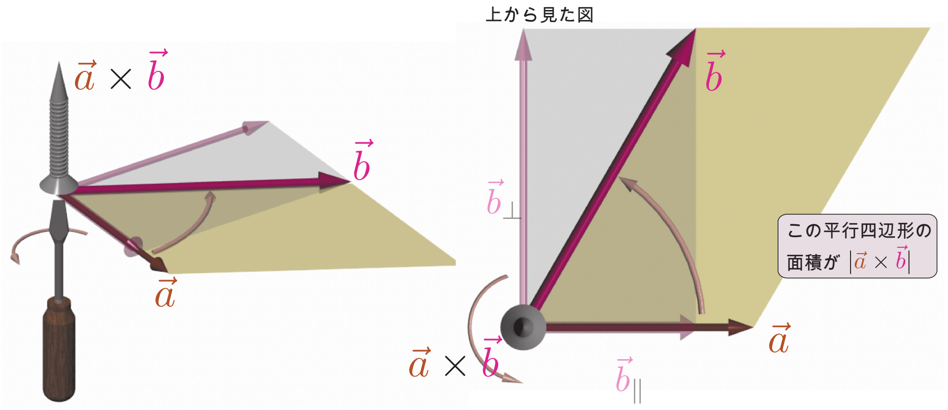
二つのベクトルの外積の $\boxed{\text{大きさ}}$ は、

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta| \tag{2.62}$$

で表現される。θ は二つのベクトルの成す角である。

[†39] と、言い切るのは実は語弊がある。後で述べよう。

[†40] 任意の二つのベクトルがあるとき、どちらかを平行移動して矢印の根本を揃えてやれば、その二つのベクトルを含んでいる平面を持ってくることは常にできる。



$|\vec{a}\times\vec{b}|$ の図形的（幾何学的）意味は図の平行四辺形の面積である。あるいは $\vec{b}$ を $\vec{a}$ に並行な成分 $\vec{b}_\parallel$ と $\vec{a}$ に垂直な成分 $\vec{b}_\perp$ に分けて（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の役割は逆でも可）、

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}_\perp| = |\vec{a}_\perp||\vec{b}| \tag{2.63}$$

という計算をしていると思ってもよい（これは横が $|\vec{a}|$ で縦が $|\vec{b}_\perp|$ の長方形の面積でもある）。

2 次元の場合、反時計回りに回る向き（今の場合 $\vec{a}\times\vec{b}$）の時外積は正とし、時計回りでは負とする。特に、

$$\vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_y = 1,\quad \vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_x = -1 \tag{2.64}$$

であることはすぐにわかる（大きさは一辺が 1 の正方形の面積である）。

3 次元のベクトルの場合、

$$\begin{array}{ll} \vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_y = \vec{\mathbf{e}}_z, & \vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_x = -\vec{\mathbf{e}}_z, \\ \vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_x, & \vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{\mathbf{e}}_y = -\vec{\mathbf{e}}_x, \\ \vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{\mathbf{e}}_x = \vec{\mathbf{e}}_y, & \vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_z = -\vec{\mathbf{e}}_y \end{array} \tag{2.65}$$

という関係になる。(2.65) は 1 行目の式をサイクリック置換（下を参照）すれば他の式も得られる。

「x を y に、y を z に、z を x に」という変更 $x\to y\to z$ を「**サイクリック置換**」と呼ぶ[†41]。

本講義では使っていないが、$\vec{\mathbf{e}}_x$ から $\vec{\mathbf{e}}_y$ へと $\boxed{\text{左}}$ ネジを回すと $\vec{\mathbf{e}}_z$ 方向にネジが進むように座標軸を設定することもある（物理ではあまりないが、CG などでは使われる）。本講義で使っているのを（右ネジの方向で決めたので）「右手系」、逆のものを「左手系」と呼ぶ。左手系でも、外積の定義も左ネジを基準とする場合は、(2.65) は同じ形である。

いくつかの定理について説明しておこう。

結果 12: 3 次元の外積に関する定理

(1)$\vec{u}\times\vec{v}$ は $\vec{u}$ とも $\vec{v}$ とも直交する。

(2)$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ は、$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ で作られる平行六面体の体積である。

(3)$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

(1) は定義から自明だろう。

(2) については以下のように考える。$\vec{v}\times\vec{w}$ が $\vec{v},\vec{w}$ によって作られる面積を示し、これと内積を取ることで、この面積に対応する「高さ」を掛けている。

(3) は $\boxed{|\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\sin\theta}$ と $\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos\theta}$ を思い出せば、$\boxed{\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta}$ という式に他ならない。

同じ方向を向いているベクトルどうしの外積は 0 である。平行四辺形の面積という意味を考えれば、「同じ方向を向いている 2 本のベクトルの作る面積は 0」から納得できる（数式で考えるならば $\boxed{\theta = 0}$ である）。

$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}}$ だが $\vec{a}$ も $\vec{b}$ も零ベクトルでない場合があることには注意しよう。

[†41] サイクリック（cyclic）は、円環（cycle）からくる言葉。

ベクトルの掛算については注意すべきことがたくさんあるが、特に普通の掛算との違いとして「**戻せない演算である**」ことに注意したい。普通の数の掛算は「a を掛ける」後に「a で割る」ことで元に戻せる（$a=0$ の場合は除く）。しかし外積は（内積も）そうはいかない。そもそも外積に対応する「割る」という演算は存在しない。その理由は明白で「違うベクトルなのに $\vec{a}$ と外積を取ると結果が同じになってしまう」、すなわち、

$$\vec{b}\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{a} \qquad \text{であるが、} \qquad \vec{b}\neq\vec{c}$$

ということが（いくらでも）あり得るのである。この点を忘れると、

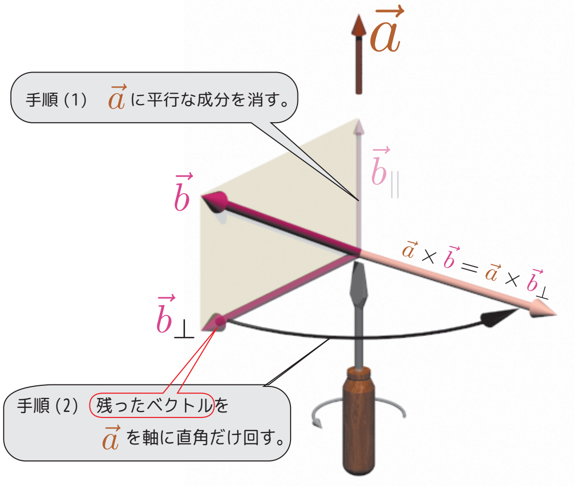
$$\vec{a}\times(\vec{x}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{c} \quad \text{から} \quad \vec{x}+\vec{b}=\vec{c}$$

のような間違った計算を「うっかり」やってしまう。

演算「$\vec{a}\times$」を左から掛ける(つまり、$\vec{b}\rightarrow\vec{a}\times\vec{b}$ という演算) の幾何学的意味を考えてみよう。まずは $|\vec{a}|=1$ の場合から考えることにする。

上でも述べたように、$\vec{a}$ と外積を取ると $\vec{b}$ のうち $\vec{a}$ に平行な成分 $\vec{b}_{\parallel}$ の効果は消えてしまう。外積の結果 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}_{\perp}$ は $\vec{a}$ とも $\vec{b}_{\perp}$ とも直交する方向を向き、長さは $|\vec{b}|$ に等しい（今は $|\vec{a}|=1$）。

これを図に示すと



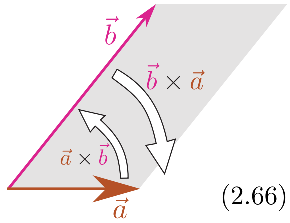
のようになる（p25 の図ではドライバーは $\vec{a}\times\vec{b}$ の向きを示していたが、こちらの図では $\vec{a}$ の向きを示していることに注意せよ）。$|\vec{a}|\neq 1$ の場合は最後にもう一つ手順 (3)　$|\vec{a}|$ を掛ける。が加わる。

$\times\vec{a}$ を右から掛けるときは、回転の方向が逆になる以外は上と同様の演算となる。

外積はこのように「回転」を表現するときにもよく使われる。物理では力のモーメントや角運動量で登場する。

2.5.3　外積の交換・結合・分配法則

外積についても三つの法則が成り立つかどうか考えよう。$\vec{a}\times\vec{b}$ はいわば「$\vec{a}$ というベクトルを $\vec{b}$ の方向に力を加えて回す向き」なのに対し、$\vec{b}\times\vec{a}$ はその逆で「$\vec{b}$ というベクトルを $\vec{a}$ の方向に力を加えて回す向き」であり、この二つは逆の作用である。



しかし、平行四辺形の面積には違いがないので、絶対値は等しい。よって、

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \tag{2.66}$$

が成立する（外積の定義には $\sin\theta$ が含まれているが、$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ からも以上のことはわかる）。3 次元では外積の結果のベクトルが逆を向く。

2 次元の外積は計算結果がスカラーなので $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ のような計算はできないので結合法則にはそもそも意味がない。

3 次元の外積で結合法則は成り立たない例を一つあげておこう[†42]。

$$\vec{\mathbf{e}}_x\times(\vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_y)=0 \tag{2.67}$$

[†42] 法則が成り立つことを示す時は一つの成り立つ例を出してもダメ（他に成り立たない場合があるかもしれない）であるが、成り立たないことを示すのなら、成り立たない例が一つあればそれで十分。

である（括弧の中の $\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_y$ が 0 だから）[†43]。一方、

$$\underbrace{(\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_y)}_{=\vec{\mathbf{e}}_z} \times \vec{\mathbf{e}}_y = \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_y = -\vec{\mathbf{e}}_x \tag{2.68}$$

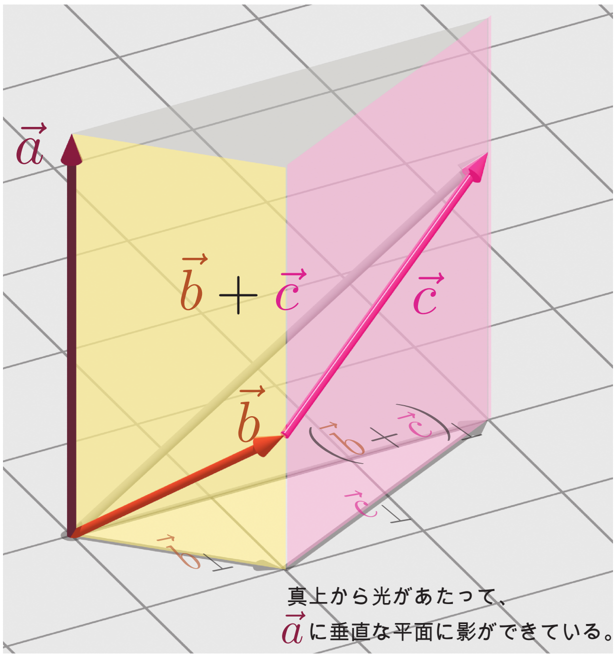
となって 0 ではない。

分配法則は、外積についても成立する。式で書くと

外積の分配法則

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{2.69}$$

である。三つのベクトルを次の図のように考えよう。

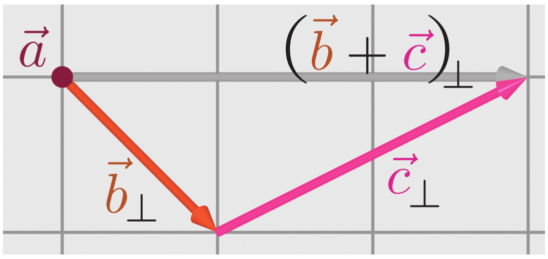


真上から光があたって、
$\vec{a}$ に垂直な平面に影ができている。

アプリのリンク

2 次元の外積の分配法則

外積を取るときに計算に関与してくるのは $\vec{a}$ に垂直な成分のみであるから、図に描いた「影」すなわち $\vec{a}$ に垂直な面への射影が関係してくる。垂直な成分を $_\perp$ をつけて表すと、$\vec{b}_\perp, \vec{c}_\perp$ と $(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ は次の図（上の図を $\vec{a}$ の向かう方向から見下ろしたところと思えばよい）の関係にある。



よって、$(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ は $\vec{b}_\perp + \vec{c}_\perp$ とも書けることに注意しよう。すなわち「足算する」と「射影する」の順番はどちらが先でも結果は同じである。

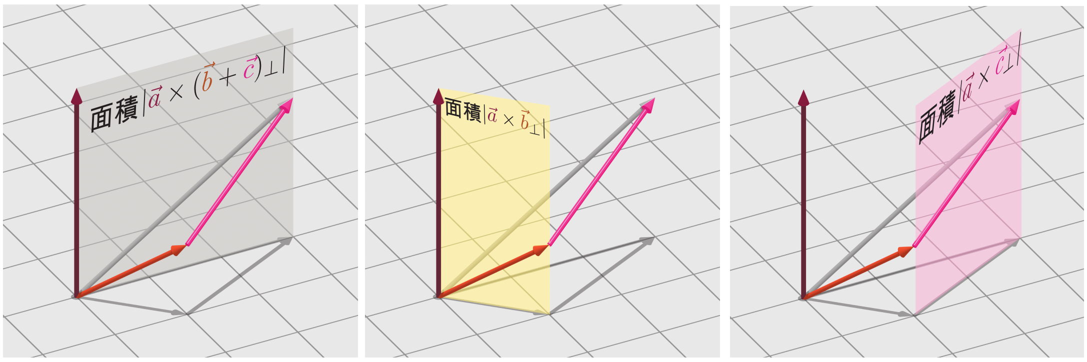
$\vec{a}$ と平行な成分は外積を取る時点で消え（→ p26）てしまうので、分配法則の成立を示すには、

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \vec{a} \times \vec{c}_\perp \tag{2.70}$$

を示せば十分である。

$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}_\perp|}$ のような式が成立するから、(2.70) に現れる三つのベクトルの 大きさ は、

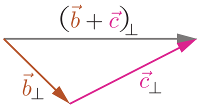
[†43] ここでも、ベクトルが零ベクトル $\vec{0}$ であることを単に $=0$ と表記している。

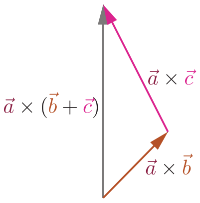


のような三つの長方形の面積となる（(2.70)→ p28のような足算が成立するのは面積ベクトルに対してであって、面積の大きさそのものに対しては成立しないことに注意）。

一番左の図に示した長方形の面積 $|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})_\perp|$ は、$|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})|$ と書いても同じ値である。そしてそれぞれのベクトルの向きは面の法線の方向を向く。我々が示したいのは、(2.70) が成立することである。つまり、外積の分配法則は三角柱の三つの側面の面積に関する法則にもなっているのである。

この式には物理的意味がある。外積は「大きさが面積に比例し、その面積の法線方向を向くベクトル」であるが、物理において面積に比例し面に垂直な量というと、水中の水圧、あるいは空気中の大気圧などを思いつく。つまり三つのベクトル（$\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{c},-\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$）[†44]は、静止した三角柱が水や大気から受ける圧力に比例する。水圧や大気圧のせいで動き出すことはありえないから、各面に働く $\boxed{\text{（力）}=\text{（圧力）}\times\text{（面積）}}$ はつりあうはずである。





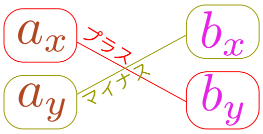
具体的な計算でも確認しておく。三角柱を真上から見た図で考えよう。

三つのベクトル $\vec{b}_\perp,\vec{c}_\perp,(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ が三角形を作っている。$\vec{a}\times\vec{b}_\perp,\vec{a}\times\vec{c}_\perp,\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})_\perp$（$\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{c},\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ と書いても同じ）も三角形を作る。p27 で述べたように、$\vec{b}_\perp$ から $\vec{a}\times\vec{b}$ をつくるという計算は「上から見て反時計回りに 90 度回して、$|\vec{a}|$ を掛ける」[†45]という計算になる（図は $\boxed{|\vec{a}|=1}$ の場合で描いた）。$\vec{c}_\perp,(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ に関しても同様のことが言えるので、$\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{c},\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ というベクトルはちゃんと図のとおりに三角形を作る。これで、(2.69)→ p28が証明できた。

2.5.4　外積の成分表示での計算法

分配法則が成立するおかげで、2 次元ベクトルを $\begin{cases}\boxed{\vec{a}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y}\\ \boxed{\vec{b}=b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y}\end{cases}$ とすると、

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=&\ (a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y)\times(b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y)\\ =&\ \underbrace{a_x\vec{\mathbf{e}}_x\times b_x\vec{\mathbf{e}}_x}_{=0}+a_x\vec{\mathbf{e}}_x\times b_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_y\vec{\mathbf{e}}_y\times b_x\vec{\mathbf{e}}_x+\underbrace{a_y\vec{\mathbf{e}}_y\times b_y\vec{\mathbf{e}}_y}_{=0}\\ =&\ a_xb_y\vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_y+a_yb_x\vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_x=a_xb_y-a_yb_x\end{aligned}\tag{2.71}$$



のように外積が計算できる。2 次元の外積という計算は、ベクトルの成分で言うと「x 成分と y 成分の積を、符号を変えて足す」という量になる。「外積には、同じ方向の成分は効かない」を思い出すと、a_xb_x のような項が出てこないことに納得が行くだろう。

二つの 3 次元ベクトル $\begin{cases}\boxed{\vec{a}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_z\vec{\mathbf{e}}_z}\\ \boxed{\vec{b}=b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y+b_z\vec{\mathbf{e}}_z}\end{cases}$ の外積を計算する。まず

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=&(a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_z\vec{\mathbf{e}}_z)\times(b_x\vec{\mathbf{e}}_x+b_y\vec{\mathbf{e}}_y+b_z\vec{\mathbf{e}}_z)\\ =&\cancel{a_x\vec{\mathbf{e}}_x\times b_x\vec{\mathbf{e}}_x}+a_x\vec{\mathbf{e}}_x\times b_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_x\vec{\mathbf{e}}_x\times b_z\vec{\mathbf{e}}_z\\ &+a_y\vec{\mathbf{e}}_y\times b_x\vec{\mathbf{e}}_x+\cancel{a_y\vec{\mathbf{e}}_y\times b_y\vec{\mathbf{e}}_y}+a_y\vec{\mathbf{e}}_y\times b_z\vec{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

[†44] 最後だけ符号をひっくり返したのは、これが面を押す力になるようにである。これで、すべてのベクトルの和が 0 になる。

[†45] ただし、この場合の「上」は $\vec{a}$ の向きの方向。

$$+a_z\vec{\mathbf{e}}_z\times b_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_z\vec{\mathbf{e}}_z\times b_y\vec{\mathbf{e}}_y+\cancel{a_z\vec{\mathbf{e}}_z\times b_z\vec{\mathbf{e}}_z} \tag{2.72}$$

となる。同じ方向を向いたベクトルどうしの外積は 0 となることを使って消せるところを消した。(2.65) → p26 を使って、

$$a_xb_y\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_y}_{\vec{\mathbf{e}}_z}+a_xb_z\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_z}_{-\vec{\mathbf{e}}_y}+a_yb_x\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_x}_{-\vec{\mathbf{e}}_z}+a_yb_z\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y\times\vec{\mathbf{e}}_z}_{\vec{\mathbf{e}}_x}+a_zb_x\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{\mathbf{e}}_x}_{\vec{\mathbf{e}}_y}+a_zb_y\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{\mathbf{e}}_y}_{-\vec{\mathbf{e}}_x} \tag{2.73}$$

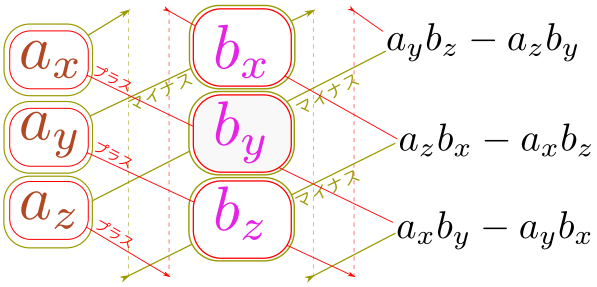
となり、

結果 13: 3 次元の外積

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{\mathbf{e}}_x+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{\mathbf{e}}_y+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{\mathbf{e}}_z \tag{2.74}$$

というのが答えである。

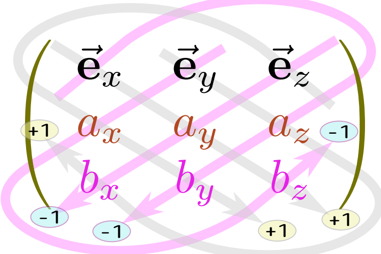
この $\vec{a},\vec{b}$ の成分それぞれについて 1 次の式の形で書けるから、外積にも双線形性 → p19 があること $\boxed{(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\vec{a}\times\vec{c}+\beta\vec{b}\times\vec{c}}$ が納得できる。



たくさんの項があってごちゃごちゃして見えるかもしれないが、この項は一定のルールで作られている。図に示すなら右のような感じだ。x の上が z、z の下が x のような円環構造になっていると思って見てくれるとよい。

数式の方の規則性も見ておこう。すべての項は $a_{\text{い}}b_{\text{ろ}}\vec{\mathbf{e}}_{\text{は}}$ という式になっているが、その下付き添字（い, ろ, は）には x,y,z が 1 個ずつ入っていて、「い→ろ→は」が、$x\to y\to z$ という順番のとき（xyz の偶置換[†46]のとき）はそのまま、$z\to y\to x$ という順番のとき（xyz の奇置換のとき）はマイナス符号をつけて、足すという計算をしている。

「$x\to y\to z$ という順番」とは、x,y,z のどれから始めてもいいが、矢印の順番に三つを踏破する、という意味である（全部書いてしまうと、$x\to y\to z$ と $y\to z\to x$ と $z\to x\to y$ である）。



あるいは右の図のように基底ベクトルとベクトルの成分を並べて、「各行から一つずつ選んで掛け算する」「偶置換の順番のときは +1、奇置換の順番のときは −1 を掛ける」というルールにしたがって可能なすべての組合せを足していく操作を行った結果が外積である、と考えてもよい。

2.5.5 レヴィ・チビタ記号

外積（そしてこれから先に出てくる行列式 → p42）を表現するために便利な記号として、「**レヴィ・チビタ記号（3 次元）(Levi-Civita symbol(3-dim))**」を

定義 7: 3 次元のレヴィ・チビタ記号

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k\text{ が }1,2,3\text{ の偶置換}\\ -1 & i,j,k\text{ が }1,2,3\text{ の奇置換}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{2.75}$$

のように[†47]定義する（ただし 3 次元の場合である）[†48]。

この定義からわかるように、ϵ_{ijk} は、添字 i,j,k の中に同じものがあると 0 になり（例：$\boxed{\epsilon_{113}=0}$）、

[†46] 「1,2,3 の偶置換」とは、1,2,3 から初めて隣同士の交換を偶数回行うことによってたどりつける並びのことである（奇数回でたどりつけるのが奇置換）。たとえば 2,3,1 は、$1,2,3\underbrace{\to}_{\text{交換}}2,1,3\underbrace{\to}_{\text{交換}}2,3,1$ と 2 回でたどりつけるので偶置換。3,2,1 は cj $1,2,3\underbrace{\to}_{\text{交換}}1,3,2\underbrace{\to}_{\text{交換}}3,1,2\underbrace{\to}_{\text{交換}}3,2,1$ と 3 回でたどりつけるので奇置換である。

[†47] レヴィ・チビタ記号として ϵ を使うが、そのままだとちょっと小さいので大きな字にしている。

[†48] なぜかこの記号に「難しい」「ややこしい」という印象を持つ人が多いだが、冷静に中身を見て欲しい。「1 か、0 か、−1 になる数」を表現している記号である。すくなくとも、ややこしさはどこにもない。

結果 14: 3 次元レヴィ・チビタ記号の巡回対称性

$$\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki} \tag{2.76}$$

という性質を持つ（両辺が偶置換でたどりつけることはすぐに確認できる）。隣り合う添字を取り替えると符号が逆になる（$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik},\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{ikj}$）のは定義から明らかであるが、隣り合っていない添字（ϵ_{ijk} の i と k）も同様である。それは

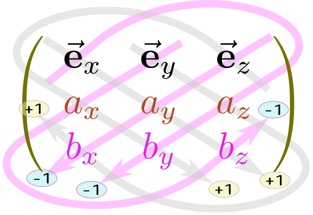
$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=\epsilon_{jki}=-\epsilon_{kji} \tag{2.77}$$

のようにして確認できる。つまり、レヴィ・チビタ記号はどの添字の交換に対しても反対称[†49]である。

この記号を使って書くと、

$$(\vec{a}\times\vec{b})_i=\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}a_jb_k \tag{2.78}$$

と書くことができる。実際 $\boxed{i=1}$ の場合を計算してみると $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})_1=\epsilon_{123}a_2b_3+\epsilon_{132}a_3b_2=a_2b_3-a_3b_2}$ となる(2,3 も同様)。この記号を使って外積を表現すると $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\vec{\mathbf{e}}_ia_jb_k}$ になる。ϵ_{ijk} を掛けて足す操作が、p30 に描いた図の操作と同じことなのである。



定義 8: 2 次元のレヴィ・チビタ記号

$$\epsilon_{ij}=\begin{cases}1 & i=1,j=2\\ -1 & i=2,j=1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{2.79}$$

を使って、2 次元の外積を

結果 15: 2 次元外積をレヴィ・チビタ記号で表現

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sum_{i,j=1}^{2}\epsilon_{ij}a_ib_j \tag{2.80}$$

と書くこともできる。行列の書き方を使っておくと、

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_x & a_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\end{bmatrix} \tag{2.81}$$

となる（2 次元のレヴィ・チビタ記号は行列で表せる）。こうなると 4 次元以上が気になるが、それはずっと後で考えよう。

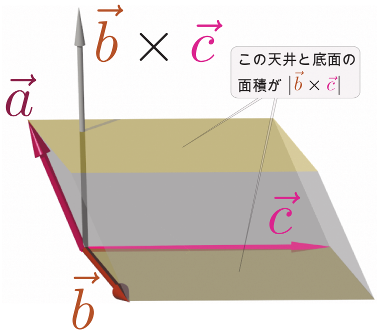
[†49] 交換しても同じであるとき「対称」、交換すると符号が変わる（絶対値は同じ）とき「反対称」と言う。

2.6 内積・外積の公式

結果 16: ベクトルのスカラー 3 重積

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (2.82)$$

という式を考えよう[†50]（ベクトル三つをつかって結果がスカラーなのでこの名前で呼ぶ）。



この式には右の図に描いたような幾何学的意味がある。三つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の根本を揃えた平行六面体を考えると、$\vec{b}\times\vec{c}$ は $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が作る平行四辺形の面積の大きさを持ち、その法線の方向を向いたベクトルである。

それと $\vec{a}$ の内積を取った結果 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ は、$|\vec{b}\times\vec{c}|$ という底面積に、$|\vec{a}|\cos\theta$（θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}\times\vec{c}$ の角度）という高さを掛けたものであるから、この三つのベクトルで作った平行六面体の体積である。どれを底面に選んでも面積は同様に計算できるから、残り二つと等しいこともわかる。 この式は、

$$\vec{a}\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{先に計算}}=\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\text{先に計算}}\cdot\vec{c} \qquad (2.83)$$

というふうに計算の順番を指定して、かつ「先に計算」の方は外積、後から計算する方は内積というルールがあると考えれば、（この掛け算ルールの元における）結合法則を示しているとも言える。

アプリのリンク

スカラー 3 重積

【問い 2-6】 (2.82) が平行六面体の体積であることを反映して、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が線形従属である場合、この値は 0 になる。このことを計算で確認せよ。

ヒント → p140 へ　解答 → p141 へ

(2.82) の三つの式をレヴィ・チビタの記号を使う書き方 → p31 では、右に書いた式のように表現できる。

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\sum_{i,j,k}a_i\epsilon_{ijk}b_jc_k \qquad (2.84)$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\sum_{i,j,k}b_i\epsilon_{ijk}c_ja_k \qquad (2.85)$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\sum_{i,j,k}c_i\epsilon_{ijk}a_jb_k \qquad (2.86)$$

$\sum$ の足し上げに使っている添字 i,j,k はダミー添字 → p21 なので、添字を変えてもよい。

つまり $\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_i(\text{なんとか})_i \text{ と書いても}\\ \displaystyle\sum_j(\text{なんとか})_j \text{ と書いても}\end{array}\right.$ 内容は変わらない。これを使って (2.85) と (2.86) の i,j,k を書き換えると、

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\sum_{i,j,k}a_i\epsilon_{ijk}b_jc_k \qquad (2.87)$$

$i\to j, j\to k, k\to i$ と置換

$$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\overbrace{\sum_{i,j,k}b_j\epsilon_{jki}c_ka_i} \qquad (2.88)$$

$i\to k, j\to i, k\to j$ と置換

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\overbrace{\sum_{i,j,k}c_k\epsilon_{kij}a_ib_j} \qquad (2.89)$$

のように、a,b,c に付いた添字を共通化して $\left\{\begin{array}{l}\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k\\ \epsilon_{jki}a_ib_jc_k\\ \epsilon_{kij}a_ib_jc_k\end{array}\right.$ が和記号の中身になるようにする（つまり、a,b,c の添字を揃える）ことができる。レヴィ・チビタ記号は

$$\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki}=\epsilon_{kij} \qquad (2.90)$$

[†50] 内積は交換するので、この式は $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ と書いても同じこと。

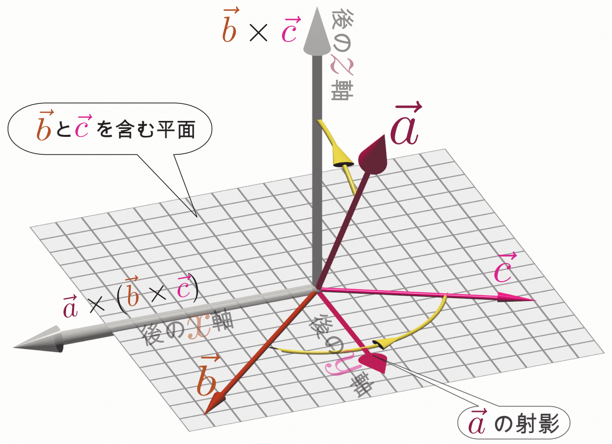
を満たすから、これで (2.82) が示せた。

次に、外積を二回行う計算に関する式

結果 17: ベクトルのベクトル 3 重積

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \qquad (2.91)$$

を示そう。まず立体的に図を描いて考えてみよう。



計算過程で現れる $\vec{b}\times\vec{c}$ は $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を含む平面の法線ベクトル（$\vec{b}\to\vec{c}$ と右ネジを回すときにネジが進む向き）である。計算結果である $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ は $\vec{a}\to(\vec{b}\times\vec{c})$ と右ネジを回すときにネジが進む方向を向く。

その結果は $\vec{b}\times\vec{c}$ と垂直になるはずだから、答えのベクトルはこの平面の上にある[†51]。よってこの答は、後で求める定数 β,γ を使って

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\beta\vec{b}+\gamma\vec{c} \qquad (2.92)$$

という形で書ける。$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ は $\vec{a}$ とも垂直であることを使うと、

$$\beta\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \qquad (2.93)$$

であるから、$\boxed{\beta:\gamma=(\vec{a}\cdot\vec{c}):-(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ である。そこで $\boxed{\beta=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{c}),\gamma=-\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ と置くことにして、以下のように書けることがわかる。

アプリのリンク

ベクトルの 3 重積

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\Big((\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\Big) \qquad (2.94)$$

ここまでは図形で考えたから、どういう座標系で考えるかによらず正しい。最後に残った未知数 α を求めるために、ここで座標系を設定することにしよう。ベクトル $\vec{a}$ の方向に z 軸をとって、$\boxed{\vec{a}=(0,0,a_z)}$ とする。すると左辺の x 成分は

$$-a_z(\vec{b}\times\vec{c})_y=-a_z(b_zc_x-b_xc_z) \qquad (2.95)$$

となる。一方右辺の x 成分は（$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{c}=a_zc_z,\vec{a}\cdot\vec{b}=a_zb_z}$ なので）

$$\alpha\left(a_zc_zb_x-a_zb_zc_x\right) \qquad (2.96)$$

である。見比べると $\boxed{\alpha=1}$ がわかる（y 成分、z 成分についてもこの式が正しいことはすぐに確認できる）。

レヴィ・チビタ記号を使った計算でも、この式を示すことができる。$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ の i 成分は

$$\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}a_j\underbrace{\sum_{mn}\epsilon_{kmn}b_mc_n}_{\vec{b}\times\vec{c}\text{の }k\text{ 成分}} \qquad (2.97)$$

[†51] ここで「$\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行だったらどうしよう？」と思う人もいるかもしれない。その場合、$\boxed{\vec{b}\times\vec{c}=0}$ だから、この後の計算は全く意味がない。しかしその時、右辺の $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ も 0 である（そのことは $\boxed{\vec{c}=k\vec{b}}$ と代入すればすぐに確認できる)。だからその場合でも公式は成り立つので心配はない。

と表すことができる。ここで以下の式 を示すことができる。

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{2.98}$$

【問い 2-7】 まず

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mn} = \delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{k\ell} + \delta_{in}\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{i\ell}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{k\ell} \tag{2.99}$$

を示し、k と ℓ を等しくして足し上げると (2.98) が出てくることを示せ。 ヒント → p140 へ 解答 → p141 へ

こうして $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ の i 成分は

$$\sum_{j,m,n} a_j b_m c_n (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) = \sum_j (a_j b_i c_j - a_j b_j c_i) \tag{2.100}$$

となる。これは $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ の i 成分である[†52]。

次に外積と外積の内積に関する式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{2.101}$$

$\vec{b}\cdot\vec{d}$　$\vec{a}\cdot\vec{c}$　$\vec{b}\cdot\vec{c}$　$\vec{a}\cdot\vec{d}$

を示そう。(2.82) → p32 を使って、

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}\cdot(\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})) \tag{2.102}$$

とする。$\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ に (2.91) → p33 を使えば、以下を得る。

$$= \vec{c}\cdot((\vec{d}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{d}\cdot\vec{a})\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{2.103}$$

(2.101) は、(2.98) を使っても簡単に示すことができる（両辺に $a_i b_j c_m d_n$ を掛けてやればよい）。

最後に以下の式を示そう[†53]。

結果 18: ヤコビ恒等式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \tag{2.104}$$

(2.91) → p33 を使うと、(2.104) の中に $\vec{a}$ と同じ方向を向くベクトル $\begin{cases} \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) \text{ から来る } -(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \\ \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \text{ から来る } (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} \end{cases}$ があり、これらが消し合うことがわかる。$\vec{b},\vec{c}$ と同じ方向を向いた項についても同様なので、(2.104) が成り立つことが証明できる。外積に限らず、(2.105) のような「3 つの項に 2 項演算を施す順番を変えて輪を取ると 0 になる」形の式が成り立つとき、それは「**ヤコビ恒等式 (Jacobi identity)**」と呼ばれる。

(2.104) は $\vec{c}$ が常に最後に来るように順番を変えることで、

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) - \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \tag{2.105}$$

と書き直せる。

この式は、$\vec{c}$ に対して $\boxed{\vec{a}\times}$ という演算と $\boxed{\vec{b}\times}$ という演算を左から施すときに、順番を替えたことによる差が $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times}$ という演算になる、と言っている。この「演算子を掛ける順番を交換して差を取る」操作をした結果を表す演算

[†52] $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ では、$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は内積だから「a と b のダミーの添字は足しあげられている」と表現する。一方、$-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ の方では「a と b のダミーの添字は足し上げられている」となる。ダミーの添字が足し上げられていることをよく（「添字」を「脚」と表現して）「脚が潰れている」と表現する。逆に $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ では、「b の脚は潰れていない」し、$-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ では「c の脚は潰れていない」と言う。

[†53] 同じ式を、$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = 0}$ と書いてもよい。

定義 9: 交換関係

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A} \tag{2.106}$$

を「**交換関係 (commutation relation)** または**交換子 (commutator)**」と呼ぶ[†54]。

後ろに f という量がある場合なら、

$$\hat{A}(\hat{B}f)-\hat{B}(\hat{A}f)=\left[\hat{A},\hat{B}\right]f \tag{2.107}$$

である。交換関係の表記を使うと、$\underset{\to\ \text{p34}}{(2.105)}$は

$$\left[\boxed{\vec{a}\times},\boxed{\vec{b}\times}\right]\vec{c}=\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times}\,\vec{c} \tag{2.108}$$

と書くことができる。ヤコビ恒等式が成り立つことは、「二つの演算の交換関係が、別のパラメータを使った同種の演算になる」（外積の場合なら「$\vec{a},\vec{b}$ との外積の交換関係は $\vec{a}\times\vec{b}$ との外積」）を示している。

2.7　N 次元への拡張

より一般的には、3 より大きい次元（N 次元）のベクトルの演算を考える必要がある。$N=4$ なら $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$ のように 4 つの成分を持つベクトルを考えるべきだろう和、差、スカラー倍に関しては、全く同様に成分ごとの和として定義できる。

内積も同様で、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{N}a_ib_i \tag{2.109}$$

のように「成分ごとの積の和」で定義される。

問題は外積で、2 次元で 1 成分（スカラー量）、3 次元では 3 成分（ベクトル量）であったように次元によって変わる。外積の成分が $a_ib_j-a_jb_i$ という形であった（同じでない添字 i,j を一つ選ぶと外積の成分が一個できる）ことを考えると、

定義 10: N 次元で使える外積の定義

一般の次元で使える「外積」の計算結果は、添字が 2 個ある量（テンソル）である。

$$C_{ij}=a_ib_j-a_jb_i \tag{2.110}$$

のように定義することにより、N 次元では $\dfrac{N(N-1)}{2}$ 成分の量になることがわかる。$\dfrac{N(N-1)}{2}$ は 2 次元では 1、3 次元では 3、4 次元では 6 である。普通の人間にはないけど、3 次元以上の空間を思い浮かべる能力がある人は、N 次元空間の中で「回転軸」が $\dfrac{N(N-1)}{2}$ 個あることを思い浮かべて欲しい（普通の人でも、2 次元と 3 次元はできるはず)。

本講義ではこれ以上は立ち入らないが、スカラーやベクトルも含んでいるより広い概念として N 次元でも使える「n-form」というものがあり、上の「N 次元でも使える外積」は「1-form と 1-form から 2-form」を作る演算」になっている。

2.8　章末演習問題

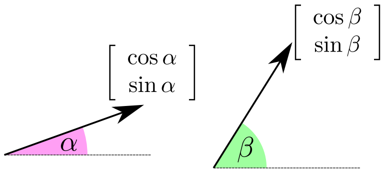
★【演習問題 2-1】

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{2.111}$$

[†54] この交換関係という計算、量子力学で頻出する。

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{2.112}$$

という式があるが、これは $\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{bmatrix}$ の和のベクトルが長さが $2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ で x 軸との角度が $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であることを意味する。



$\boxed{0\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}}$ の場合について、上の図を参考にベクトルの図を描いてこのことを確認せよ（上のベクトルの長さはどちらも 1 であるとする)。

ヒント → p147 へ　解答 → p148 へ

★【演習問題 2-2】

平面上のベクトルは、$\begin{cases}\text{直交座標では } x\vec{\mathbf{e}}_x+y\vec{\mathbf{e}}_y\\ \text{極座標では } r\vec{\mathbf{e}}_r\end{cases}$ と書かれる。つまり $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_r=\dfrac{x}{r}\vec{\mathbf{e}}_x+\dfrac{y}{r}\vec{\mathbf{e}}_y}$ である。$\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y$ は場所にも時間にも依存しない。しかし、$\vec{\mathbf{e}}_r$ は x,y に依存している。そこで、この問題では $\vec{\mathbf{e}}_r(t)$ と書くことにしよう。

いまある物体の位置が $\boxed{\vec{P}(t)=x(t)\vec{\mathbf{e}}_x+y(t)\vec{\mathbf{e}}_y}$ および $\boxed{\vec{P}(t)=r(t)\vec{\mathbf{e}}_r(t)}$ のように書かれるとき、$\vec{P}(t)$ の t による微分を二つの座標で求めよ。

ヒント → p147 へ　解答 → p148 へ

第 3 章　行列の演算

第 1 章 → p1 ではざっと「行列ってこんなもの」と紹介したが、この章で具体的にきっちりと行列とその演算を定義していこう。

3.1　行列が表すもの

3.1.1　1 次式による計算を行列で表現する

1.2 → p1 節で考えた、小学校の算数のような問題を（りんごを A 個とバナナを B 個買うと考えて）

$$\begin{cases} 100A+60B=600 \\ \quad\; A+\quad B=8 \end{cases} \tag{3.1}$$

という連立 1 次方程式と考えたことを思い出そう。この問題はたとえば 1 個 30 円のさくらんぼも買うことにすれば

$$\begin{cases} 100A+60B+30C=600 \\ \quad\; A+\quad B+\quad C=8 \end{cases} \tag{3.2}$$

のように変わる（さくらんぼの数を C にした）。ちなみにこの問題は「解が一意でない」のだが、そうなることはどのように判定できるのか、というのも今後考えていきたい点の一つである。

さらにりんご、バナナ、さくらんぼがそれぞれ 40g,80g,10g の重さがあるとして全部で 1kg 買うのだとすれば、

$$\begin{cases} 100A+60B+30C=600 \\ \quad\; A+\quad B+\quad C=8 \\ \; 40A+80B+10C=1000 \end{cases} \tag{3.3}$$

と問題が変わるだろう。これらの問題はすべて 1 次式で表現できている。これら三つの式をそれぞれ、

$$(3.1) \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 100 & 60 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 8 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$(3.2) \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 8 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$(3.3) \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 1 & 1 & 1 \\ 40 & 80 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 8 \\ 1000 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

と書いてしまうのが行列による表現である。

行列による計算はベクトルの内積の計算の繰り返しになっている。たとえば上の最後の式は、

$$\begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =600, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =8, \tag{3.8}$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 80 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =1000 \tag{3.9}$$

という三つの「行ベクトルと列ベクトルの内積を取る」という計算を一つの式で表現していると見ることもできる。

こういう説明を聞いていると、「簡単すぎてつまらない」と思うかもしれないが、それはもちろん「導入」の段階だからである。行列を使う意義は前に → p6 も述べたように、$\boxed{\boxed{\text{操作}} \times \boxed{\text{入力}} = \boxed{\text{出力}}}$ のように、式の上で「入力」「操作」

「出力」が分離されることにある。上の例では入力がりんごだったり、出力が金額だったりするが、もっと複雑な量になっても、ここで考えた計算が使える場合がある。

なんらかの「入力」から入力に対応した一つの「出力」を得ることを数学では一般的に「写像」というが、上で書いた「操作」は写像の一種である。物理現象の多くが、この「操作」の部分に対応する。たとえばある物理的状態があるとする。その状態に「平行移動」「回転」のような変換を行ったり、「時間発展（ある物理的状態の「現在」から「未来」の状態を得る）」させたりする「操作」は、実は「線形写像」として表現できる。解析力学や量子力学という分野では、まさにこの考え方を使う[†1]。次項で示すように、線形写像だということは実は「行列で書ける」ことなのである[†2]。

行列で書く「御利益」は「計算」部分の一箇所への集中である。後で考えるが、我々は行列を見ることで「この問題の解は一意じゃない」「この問題には解がない」などを判定できる（それが線形代数の使い途の一つである）。

3.1.2　行列による線形写像

行列はある種の変換を表すが、なんでも表現できるわけではない。行列を使って表現できるのは2.3.3 節（→ p18）で述べた「線形写像 (linear mapping)」である。

(2.27)（→ p19）の X_1, X_2 に入るもの（写像元）は実数や複素数はもとより、ベクトルであってもよい。ベクトル → ベクトルの線形写像は常に行列で表現できる（だから行列は便利なのだ！）ことを以下で示そう。

一般のベクトルは基底（→ p12）を使って $\vec{x} = x_1\vec{v}^1 + x_2\vec{v}^2 + \cdots + x_m\vec{v}^m$ のように表せる。

写像先の方を $\vec{y} = y_1\vec{v}^1 + y_2\vec{v}^2 + \cdots + y_m\vec{v}^m$ としよう。つまり

$$\vec{y} = T(\vec{x}) = T(x_1\vec{v}^1 + x_2\vec{v}^2 + \cdots + x_m\vec{v}^m) \tag{3.10}$$

とするのだが、写像 $\vec{x} \mapsto T(\vec{x})$ は線形なので、

$$\vec{y} = T(\vec{v}^1)x_1 + T(\vec{v}^2)x_2 + \cdots + T(\vec{v}^m)x_m \tag{3.11}$$

のように「写像してから線形結合」の形に書き直すことができる。上の式の中で、$\vec{y}$ と $\{T(\vec{v}^*)\}$ はベクトルなので、それらを成分表示で書くことにすれば、

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}^{\vec{y}} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}}^{T(\vec{v}^1)} x_1 + \overbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}}^{T(\vec{v}^2)} x_2 + \cdots + \overbrace{\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}}^{T(\vec{v}^m)} x_m \tag{3.12}$$

となる（$T(\vec{v}^j)$ の i 番目の成分を a_{ij} と書くことにした）。

上の式を、（操作にあたる部分を左側にまとめて）

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{T(\vec{v}^1)} & \boxed{T(\vec{v}^2)} & \cdots & \boxed{T(\vec{v}^m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

と書いてしまうというのが「線形写像の行列による表現」である。

$\left\{\begin{array}{l} j\text{ 番目の成分だけが }1 \\ \text{残りの成分は }0 \end{array}\right.$ のベクトル $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ を変換すると第 j 列 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ になるように行列を並べた、と考えてもよい。

[†1] ってことは物理的状態ってのは一種のベクトルなのである。この後、ベクトルという言葉の意味をぐっと広げる。もはや「向きと大きさのある矢印」のようなものではないものに対しても線形代数の考え方が使えるのだ。

[†2] 量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式はまさに、$\boxed{\text{操作}} \times \boxed{\text{入力}} = \boxed{\text{出力}}$ のような式なのだが、この $\boxed{\text{操作}}$ も（微分演算子なのだが）一種の行列と考えることができる。

3.1.3 行列とその成分

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & \text{第}1\text{列} & & \text{第}j\text{列} & & \text{第}n\text{列} \\
\hline
\text{第}1\text{行} & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{第}i\text{行} & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{第}m\text{行} & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

のように二つの添字をつけて「i 行 j 列の成分」[†3]を a_{ij} と表すことにする。

縦に n 行、横に m 列の数字が並んでいる行列を「n 行 m 列の行列」と呼ぶ。この行列は

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
 & \vdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\left(\vec{W}_1\right)^\top \\
\left(\vec{W}_2\right)^\top \\
\vdots \\
\left(\vec{W}_n\right)^\top
\end{bmatrix}
\tag{3.14}
$$

のように「m 成分の横ベクトルが n 行並んでいる」と解釈することも、

$$
\begin{bmatrix}
\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} &
\cdots &
\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \cdots & \vec{V}_m
\end{bmatrix}
\tag{3.15}
$$

のように「n 成分の縦ベクトルが m 列並んでいる」と解釈することもできる[†4]。

上では、$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix}$ を $(\vec{W}_i)^\top$ と略記し、$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ を $\vec{V}_j$ と略記した。つまり、$\vec{W}_i$ は $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ である（$\vec{V}_i$ と $\vec{W}_i$ では足の付き方が違うことに注意。$\vec{W}$ の方は上の式では転置した形で登場している）。

こうして分割して考えると、行列の掛け算は（(3.12) → p38 と同様の式だが）

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
&=
\begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \cdots & \vec{V}_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\
&= \vec{V}_1 x_1 + \vec{V}_2 x_2 + \cdots \vec{V}_m x_m
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

のように「$\{\vec{V}_*\}$ の線形結合」と考えることもできるし、

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\left(\vec{W}_1\right)^\top \\
\left(\vec{W}_2\right)^\top \\
\vdots \\
\left(\vec{W}_n\right)^\top
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vec{W}_1 \cdot \vec{x} \\
\vec{W}_2 \cdot \vec{x} \\
\vdots \\
\vec{W}_n \cdot \vec{x}
\end{bmatrix}
\tag{3.17}
$$

[†3] この「i 行 j 列の成分」がちょうど「行列」という並びであることに関しては、日本に生まれた幸運を噛みしめるべきだろう。英語の matrix は mat と rix に分かれて意味を持ったりしない。

[†4] (3.12) → p38 はまさに (3.15) の列ベクトルの線形結合を取っている計算である。

のように「それぞれの $\{\vec{W}_*\}$ との内積」と考えることもできる（どちらの見方も重要である）。

3.2　行列の演算:2×2 行列

3.2.1　連立 1 次方程式を解く

1.2 → p1 節でやった「連立 1 次方程式を解く」という計算を、一般の 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現された連立 1 次方程式の場合で行ってみよう。すなわち、$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}$ を解いて x, y を求める。

まずは先に考えたように、行列を列ベクトルが並んでいるものと考えて、

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

と書き直す。まず、「x を求めたいから y を消したい」と考える。そのためには、$\begin{bmatrix} d & -b \end{bmatrix}$ との内積を取ればよい（あるいは、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ との外積を取ればよい）。結果は内積を使う計算なら

$$\begin{bmatrix} d & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} d & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}_{=0} y = \begin{bmatrix} d & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

で、外積を使う計算なら

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}_{=0} y = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

であり、結果はどちらにしても

$$(ad - bc)x = dX - bY \tag{3.21}$$

になる。同様に「y を求めたいから x を消したい」という動機のもと、$\begin{bmatrix} -c & a \end{bmatrix}$ との内積を取って（あるいは $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ との外積を取って）、

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}}_{=0} x + \begin{bmatrix} -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

または

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}}_{=0} x + \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

を得る。今出した二つの式は（まとめやすいので内積の方を使う）

$$(ad - bc)x = \begin{bmatrix} d & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$(ad - bc)y = \begin{bmatrix} -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

だからまとめて書くと以下のようになる。

$$\underbrace{(ad - bc)}_{=D}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

以上をベクトルの記号を使って $\boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \vec{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}$ として書くと

元の式
$$\vec{v}_1 x + \vec{v}_2 y = \vec{X} \tag{3.27}$$

$\vec{v}_2$ と外積
$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 x + \underbrace{\vec{v}_2 \times \vec{v}_2}_{=0} y = \vec{v}_2 \times \vec{X} \tag{3.28}$$

$\vec{v}_1$ と外積
$$\underbrace{\vec{v}_1 \times \vec{v}_1}_{=0} x + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 y = \vec{v}_1 \times \vec{X} \tag{3.29}$$

まとめて

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \times \vec{X} \\ \vec{v}_1 \times \vec{X} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

と考えてもよい（今 2 次元なので外積の結果はスカラーであることに注意）。

3.2.2　逆行列（2×2）

以上で我々が証明したことは、$\boxed{ad - bc \neq 0}$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{ならば} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

ということである。これを x, y を求める方程式を解く問題と見るならば、その問題は $\boxed{ad - bc \neq 0}$ ならば確実に解ける。

この $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ を、$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の「**逆行列 (inverse)**」と呼ぶ。行列 $\mathbf{A}$ の逆行列は $\mathbf{A}^{-1}$ という記号で表現することにする。「-1 乗」の記号を借用しているが、単なる「逆数」という意味ではないことはもちろんである。本によっては大胆に分数の記号を借用して $\dfrac{1}{\mathbf{A}}$ と書く。これも単なる「割り算」という意味ではない。

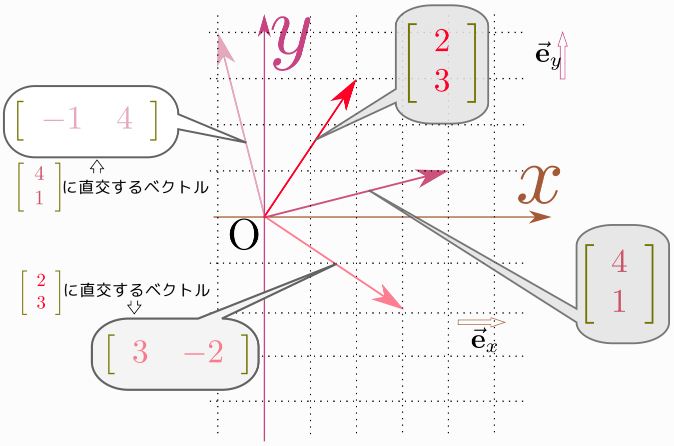
$\dfrac{1}{\mathbf{A}}$ という記号は $\boxed{\dfrac{1}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$ によって定義される。これはもちろん「単なる割り算」ではない。

上の計算からわかるように、すべての行列に対応する逆行列があるわけではない。具体的には、$\boxed{ad - bc = 0}$ だったら (3.31) の右の式は意味がない。逆行列が存在する行列は「**正則 (regular)** である」あるいは「**非特異 (non-singular)** である」などと言う。「逆が取れる (invertible)」という言葉で表すこともある。

実数の場合に「x を掛ける」操作を打ち消すのが「x^{-1} を掛ける」だったり「x で割る」だったりすることと同じ表記を使っている。行列の逆は、実数や複素数の「逆数」とは、似ている点はあるがまったく同じ操作ではない（関数 f と逆関数 f^{-1} の関係だってそうだ）ことに注意が必要である。「x で割る」操作は $\boxed{x = 0}$ のときは実現できなかった。同様に、$\mathbf{A}^{-1}$ という操作は、$\mathbf{A}$ がある条件（2×2 の場合はすでに述べたように、$\boxed{ad - bc \neq 0}$）を満たしてないと実現しない。

以下に行列 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$（この行列は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ に、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ に変換する）に対する逆行列を求める過程を示す。

まず行列を二つの列ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に分けて考える。$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直な行ベクトルとして、$\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$ を、$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に垂直な行ベクトルとして、$\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$ をもってくる。



$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

これら二つの行ベクトルを並べて $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ を作る。こうして作った行列の掛け算をやってみると、

$$\begin{bmatrix}3&-2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&-2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix} \tag{3.32}$$

となる。よって、求めた行列を 10 で割った行列 $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3&-2\\-1&4\end{bmatrix}$ は、を $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ に、$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ に変換する。すなわち、逆行列が求められた。

以上でやったのは、行列を $\begin{bmatrix}\boxed{\vec{v}^1} & \boxed{\vec{v}^2}\end{bmatrix}$ と 2 本の列ベクトルを並べたものと考えて、この二つの列ベクトルを基底としたときの双対基底 → p22（つまり $\boxed{\vec{w}_i\cdot\vec{v}^{\,j}=\delta_i^{\ j}}$ が成り立つベクトル）$\vec{w}_1,\vec{w}_2$ を見つけて行ベクトルにして並べて逆行列 $\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{w}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{w}_2)^\top}\end{bmatrix}$ を作ったということ。

上で考えた「二つの列ベクトル」が平行だと、逆行列が存在できなくなる。なぜならその場合「$\vec{v}_1$ に垂直なベクトル」を考えると、$\vec{v}_2$ にも垂直なのだから。

3.2.3　行列式

$\boxed{D=ad-bc}$ のことを「2×2 行列の**行列式 (determinant)**」と呼ぶ[†5]。

記号として det を使い、$\mathbf{A}$ の行列式は $\det\mathbf{A}$ と書く。後で、3×3 行列やそれより次元の高い $n\times n$ 行列でも同様の式を考えるが、それらも「行列式（ディターミナント）」と呼び記号 det を使う。

行列式は行列の要素すべてで決まるから、$\det\mathbf{A}$ は（2×2 行列の場合）4 個の変数 A_{ij} の関数だと言えるが、見方によっては、「2 本の列ベクトル $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ の関数」と見てもよいし、「2 本の行ベクトル $(\vec{w}_1)^\top,(\vec{w}_2)^\top$ の関数」と見てもよい。

- $\boxed{\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}}$ の行列式を $\det(A_{11},A_{12},A_{21},A_{22})$ と、
- $\boxed{\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\boxed{\vec{v}_1}&\boxed{\vec{v}_2}\end{bmatrix}}$ の行列式を $\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2]$ と、
- $\boxed{\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{w}_1)^\top}\\\boxed{(\vec{w}_2)^\top}\end{bmatrix}}$ の行列式を $\det\begin{bmatrix}\vec{w}_1,\\\vec{w}_2\end{bmatrix}$ と

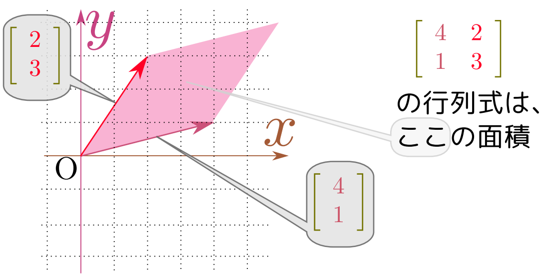
を、それぞれ考えることもできる（ここで、ベクトルを関数の引数にとる場合は括弧を [ ] にして区別した）。

2×2 行列の行列式は外積と同じ計算をする（つまりは右の図で描いた面積という意味を持つ）ので、

$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2]=\vec{v}_1\times\vec{v}_2, \tag{3.33}$$

$$\det\begin{bmatrix}\vec{w}_1,\\\vec{w}_2\end{bmatrix}=\vec{w}_1\times\vec{w}_2 \tag{3.34}$$

が成り立つ。



外積には（内積にも）双線形性 → p19 があった。同様に 2×2 行列の行列式にも双線形性

$$\det[\lambda\vec{v}_1,\vec{v}_2]=\overset{\text{出す}}{\lambda}\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2], \tag{3.35}$$

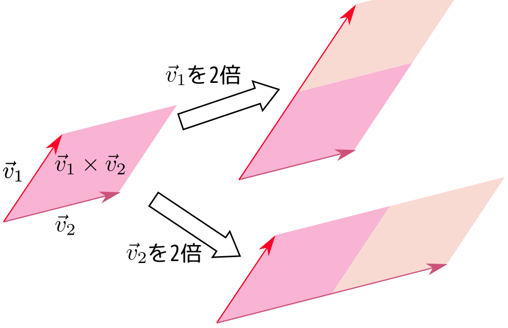
$$\det[\vec{v}_1,\lambda\vec{v}_2]=\overset{\text{出す}}{\lambda}\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2], \tag{3.36}$$

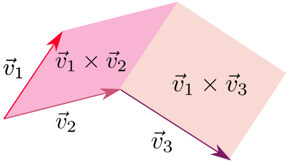
$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2+\vec{v}_3]=\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2]+\det[\vec{v}_1,\vec{v}_3], \tag{3.37}$$

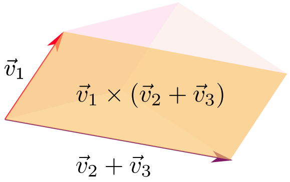
[†5] 「行列式」は「行列でできた式」の意味と勘違いされやすく、あまりよい命名ではない。よって「ディターミナント」とカタカナ読みすることも多い。determinant は「これで行列の性質が決まる！」意味を含ませた命名である。

$$\det[\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_3] = \det[\vec{v}_1,\vec{v}_3]+\det[\vec{v}_2,\vec{v}_3] \tag{3.38}$$

がある。つまり、$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2]$ と書いたときの前の引数に対しても後ろの引数に対しても「線形結合してから計算しても、計算してから線形結合を取っても結果は同じ」である。図で表現すると以下のようになる。





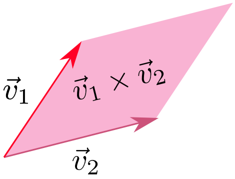


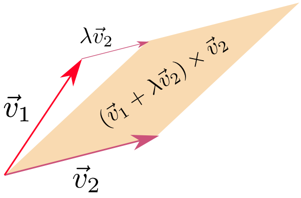
性質「同じベクトルどうしの外積は 0」があったので、$\boxed{\det[\vec{v}_1,\vec{v}_1]=0}$ であり、これに線形性を組み合わせると

$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2+\lambda\vec{v}_1] = \det[\vec{v}_1,\vec{v}_2], \tag{3.39}$$

$$\det[\vec{v}_1+\lambda\vec{v}_2,\vec{v}_2] = \det[\vec{v}_1,\vec{v}_2] \tag{3.40}$$

が成り立つこともわかる。つまり、$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2+\cancel{\lambda\vec{v}_1}]$ のように「同じ方向を向いたベクトルは消す」ことができる。これは右の図のような面積の変わらない変形だと解釈できる。





また、入れ替えに対して反対称

$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2] = -\det[\vec{v}_2,\vec{v}_1] \tag{3.41}$$

でもある（これも外積の性質）。これらの性質は「行ベクトルの関数」と考えたときも「列ベクトルの関数」と考えたときも、同様に成り立つ。

3.2.4　行列の積

行列は何のためにあるのかについては最初に力説したが、「ベクトルで表された量に対するなんらかの操作」を表すためのものであり、それはたとえば (x,y) から (x',y') への変換が

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}}^{\text{変換の表現}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \quad \text{行列を使わずに書けば、} \quad \begin{cases}x'=ex+fy\\y'=gx+hy\end{cases} \tag{3.42}$$

のように表現できる、という形を取る。ここで、続けて (x',y') から (x'',y'') への変換

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}^{\text{変換の表現}}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} \quad \text{行列を使わずに書けば、} \quad \begin{cases}x''=ax'+by'\\y''=cx'+dy'\end{cases} \tag{3.43}$$

を行ったとしよう。二つの変換をまとめて書くと

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\rlap{$\overbrace{\phantom{\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}}^{\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}}$}\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}}_{\text{二つの変換の表現}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \tag{3.44}$$

となる。これを行列を使わずに書けば、

$$x'' = a\overbrace{(ex+fy)}^{x'}+b\overbrace{(gx+hy)}^{y'} = (ae+bg)x+(af+bh)y \tag{3.45}$$

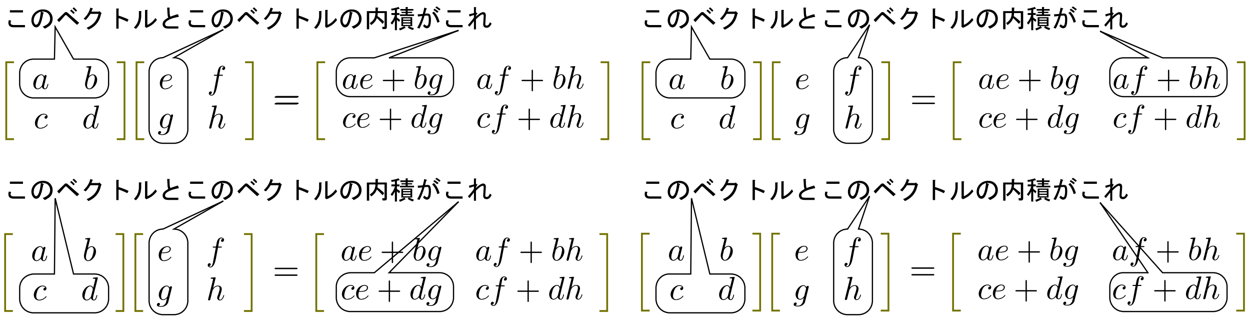
$$y'' = c\overbrace{(ex+fy)}^{x'}+d\overbrace{(gx+hy)}^{y'} = (ce+dg)x+(cf+dh)y \tag{3.46}$$

となるから、上に「二つの変換」と書いた 2 種類の行列を次々と掛ける計算は、1 個の行列 $\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$ を掛けることと同じである。すなわち、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

という等式が成立することにすれば、二つの変換を続けて行うことを、一個の行列を掛けるという一回の計算で済ませることができる。

ここで行っている計算は、下の図に示した、四つの「ベクトルの内積」である。



行列と行列の積 (3.47) は、$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg \\ ce+dg \end{bmatrix}} \\ \boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} af+bh \\ cf+dh \end{bmatrix}} \end{array}\right.$ という二つの行列とベクトルの積を一挙にやっているとみなすこともできる。

これで「行列と行列の積」が (3.47) で定義された。行列を $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}$ のように行番号と列番号の添字をつかって表すならば、

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{2} A_{ij}B_{jk} \tag{3.49}$$

となる。$\boxed{C_{ik} = \sum_{j=1}^{2} A_{ij}B_{jk}}$ の書き方では、掛算の前にある行列の要素 A_{ij} の後ろの添字（j）と後ろにある行列の要素 B_{jk} の前の添字（やはり j）が 1 から 2 まで足されている。

ここで考えたのは 2×2 行列だが、$\ell \times m$ 行列と $m \times n$ 行列の積は

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jk} \tag{3.50}$$

のように定義する。前の行列の列の数と後ろの行列の行の数が等しくないと掛け算自体が書けない。

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = ? \tag{3.51}$$

のような計算は定義されてない。

行列の掛算は順番を変えると一般に違う結果になる（一般に $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ）。これを「行列の積は可換ではない」と言う。通常の数の掛算は常に $\boxed{ab = ba}$ なので可換である。

(3.49) の A_{ij} と B_{jk} は行列の一つの要素であり、数である。よって、

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{2}\underbrace{A_{ij}B_{jk}}_{}=\sum_{j=1}^{2}\underbrace{B_{jk}A_{ij}}_{} \tag{3.52}$$

は正しい式である。疑わしいと思う人は、上の式を和記号を使わずに書いた

$$C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}=B_{1k}A_{i1}+B_{2k}A_{i2} \tag{3.53}$$

という式を見よう。この式は、何も悪いことをしていないことを確認して欲しい。

一方、行列の掛け算の順序をひっくり返した $\mathbf{D}=\mathbf{BA}$ という式を成分で書けば

$$\begin{aligned}D_{ik}&=\sum_{j=1}^{2}\underbrace{B_{ij}A_{jk}}_{}=B_{i1}A_{1k}+B_{i2}A_{2k}\\&=\sum_{j=1}^{2}\underbrace{A_{jk}B_{ij}}_{}=A_{1k}B_{i1}+A_{2k}B_{i2}\end{aligned} \tag{3.54}$$

である。これは(3.52)→ p45や(3.53)→ p45とは別の式である。

行列の掛算をどのように行ったかは「走る添字 j」の位置で決っている。だから各要素の積の順番を逆にしても（$A_{ij}B_{jk}\to B_{jk}A_{ij}$）、行列の積としての順番は変えてないので、心配無用である。なぜわざわざこんなことを書くかというと、ときどき行列の積は可換ではないという言葉の上っ面だけを捉えて、(3.52)→ p45は行列の積の順番を変えているから間違っている！と言う人がいるからである[6]。

この項が始まるまでは、(3.42)→ p43のような形で「行列とベクトルの積」が定義されていた。「行列とベクトルの積」という計算を 2 回行なうことと、「行列と行列の積」を行った後で「行列とベクトルの積」を行なうという計算が同じ結果になる（これは広い意味での「結合法則」→ p17である）という要請から「行列と行列の積」が(3.47)→ p44で定義された。

3.2.5　行列と逆行列の積

(3.31)→ p41で現れた行列 $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ が行列 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ の「逆操作」であることは、

$$\underbrace{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}}_{\text{逆操作}}\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{\text{操作}}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{3.55}$$

と具体的に計算することでも確認できる。

今後、$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ という何もしない操作を表す行列を $\mathbf{I}$ と書く。$\mathbf{I}$ は「**単位行列**」と呼ばれる。

単位行列 $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ は、「掛算しても変わらない行列」である。つまり、

$$\begin{aligned}&\overbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}^{\mathbf{I}}\overbrace{\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}}^{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1\times B_{11}+0\times B_{21}&1\times B_{12}+0\times B_{22}\\0\times B_{11}+1\times B_{21}&0\times B_{12}+1\times B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{B}\\&\overbrace{\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}}^{\mathbf{C}}\overbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}^{\mathbf{I}}=\begin{bmatrix}C_{11}\times1+C_{12}\times0&C_{11}\times0+C_{12}\times1\\C_{21}\times1+C_{22}\times0&C_{21}\times0+C_{22}\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{C}\end{aligned} \tag{3.56}$$

である。「単位」とはつまり「1」のことだと思えばよい[7]。

---

[6] これに限らず、ルールを「なぜそうなのか？」を考えもせず字面だけを見て「これはダメ、あれは OK」と判断してしまうことは大変危険であるからやめた方がよい。「なぜこういうルールにするか」を納得して使おう。納得できないルールは受け入れてはいけない。

[7] 単位行列の記号には $\mathbf{I}$（Identity の I から）の他、$\mathbf{E}$（ドイツ語で 1 を表す接頭辞が ein-であることに由来する）が使われることもある。また、$\mathbf{1}$ のように数字の 1 で代用することもある。もっと簡単に、普通に 1 と書いてある場合もあり、そのような書き方をしている場合は 3 と書いてあっても 3$\mathbf{I}$（単位行列の 3 倍のこと）の意味である場合がある。

(3.55) はつまり $\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}}$ である。操作の順序が逆である $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ も

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\tag{3.57}$$

となって、$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}}$ を満たす[†8]。

単位行列同様に特別な行列として、「零行列」と呼ばれる $\boxed{\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}$ がある。数字の 0 同様「前から掛けても後ろから掛けても結果は $\mathbf{0}$」という行列である。

3.3　行列の和と差とスカラー倍

行列の掛算[†9] が定義できたのだから、足し算やスカラー倍も定義しよう。

3.3.1　行列の和

$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\mathbf{A}\text{ を }\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\text{ に掛けた結果}\\ \mathbf{B}\text{ を }\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\text{ に掛けた結果}\end{array}\right.\text{ の和}}$ と $\boxed{\mathbf{A}\text{ と }\mathbf{B}\text{ の和を }\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\text{ に掛けた結果}}$ が一致するようにするには、行列の和を、それぞれの成分どうしの和で定義すればよい。すなわち

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12}\\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{bmatrix}\tag{3.58}$$

である（これで OK なことはすぐに確認できるから、気になる人はやってみること）。

新しい行列 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を $\mathbf{C}$ と書いて、その成分を C_{ij} とすれば、これは成分ごとの足し算の結果だから

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\tag{3.59}$$

と書くことができる。 同様に引算を成分どうしの差すなわち

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}-B_{11} & A_{12}-B_{12}\\ A_{21}-B_{21} & A_{22}-B_{22}\end{bmatrix}\qquad(3.60)\\ C_{ij}&=A_{ij}-B_{ij}\qquad(3.61)\end{aligned}$$

と定義する（「行列を掛けてから引き算」と「行列の引き算してから掛ける」の答えが一致する）。

3.3.2　スカラー倍

同様にスカラー倍は、

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\text{ のとき、 }\lambda\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda A_{11} & \lambda A_{12}\\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22}\end{bmatrix}\tag{3.62}$$

と定義される。上で定義した引算は $\boxed{-1\text{ 倍してから足す}}$ 計算になる（実数や複素数の場合となんら変わりはない）。

以上で定義した加法とスカラー倍は、以下の法則を満たす。

結果 19: 行列の加算とスカラー倍に関する定理

$$\begin{aligned}\text{交換法則：}\quad&\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}\\ \text{結合法則：}\quad&(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\\ \text{スカラー積の結合法則：}\quad&\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}\\ \text{行列の和の分配法則：}\quad&\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}\\ \text{スカラー和の分配法則：}\quad&(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}\end{aligned}\tag{3.63}$$

[†8] 行列の掛け算は一般には逆順にすると答えが変わる（これを「可換ではない」と言う）ので、こうなるには理由がちゃんとある。3.4.2 項を参照 → p47

[†9] この「掛算」は実数の掛算よりはベクトルの内積に似ている掛算だった。

以上は**結果 2** → p14 とほぼ同じである。$m \times n$ 行列を「mn 個の数が並んでいるもの」と捉えれば、それは納得できる。

3.3.3　行列の和、スカラー倍と行列式

2×2 行列の行列式は、行列がスカラー倍されたとき、(そのスカラー)^2 倍になる。$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$ という変換（$\mathbf{A} \to \lambda\mathbf{A}$ という変換）により、$\boxed{D = ad - bc}$ は $\boxed{\lambda^2 D = \lambda a \times \lambda d - \lambda b \times \lambda c}$ と変化するわけである。

一方、足し算の方に関しては簡単な関係はない。一般に $\boxed{\det[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}}$ である[†10]。

$\det \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ という量を考えてみれば、これが $a_1 d_1 - b_1 c_1$ や $a_2 d_2 - b_2 c_2$ では表せないことはすぐにわかるだろう。

3.4　行列の演算が満たす法則、満たさない法則

行列の積が交換法則を満たさないことはすでに述べた → p44。他の法則はどうだろうか。

3.4.1　行列の積の結合法則

前項では当然のように、行列と行列とベクトルの積(3.44) → p43 の計算において二つの計算方法での結果が同じであると考えた。行列三つの積 $\mathbf{ABC}$ についても同様に、$\mathbf{AB}$ の方を先に計算しても $\mathbf{BC}$ を先に計算しても結果が同じ、すなわち、

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) \tag{3.64}$$

が言える。これを行列の積の結合法則という。証明は、行列 $\mathbf{ABC}$ の i, j 成分が

$$(\mathbf{ABC})_{ij} = \sum_{k,\ell} A_{ik} B_{k\ell} C_{\ell j} \tag{3.65}$$

と書けることを考えるとすぐにわかる。結合法則は、行列が何行何列の行列であっても成り立つ[†11]。

3.4.2　左逆行列と右逆行列 skip

3.2.5 項 → p45 で $\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}}$ という式と $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}}$ という式を示したが、この「左から掛ける逆行列」と「右から掛ける逆行列」が等しい保証はあるだろうか？ —上で考えた $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ に、逆行列 $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$ を左から掛けても右から掛けても単位行列になることは、すぐに確認できる。とはいえ、何行何列の行列でも大丈夫なのかは証明が必要だろう。

この二つの行列が違う可能性を考えて、

$$\text{左逆行列：} \qquad \mathbf{A}_{\langle}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \text{ を満たす } \mathbf{A}_{\langle}^{-1} \tag{3.66}$$

$$\text{右逆行列：} \qquad \mathbf{A}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1} = \mathbf{I} \text{ を満たす } \mathbf{A}_{\rangle}^{-1} \tag{3.67}$$

を定義してみよう。左逆行列の記号 $_{\langle}$ は「記号 $_{\langle}$ の右から $\mathbf{A}$ を掛けてね」を意味している（$_{\rangle}$ も同様)。

$\mathbf{A}$ が $m \times n$ 行列だとすると左逆行列も右逆行列も（存在するならば）$n \times m$ 行列でなくてはいけない。

$$\underbrace{\boxed{\mathbf{A}_{\langle}^{-1}}}_{m\times n}\underbrace{\boxed{\mathbf{A}}}_{n\times m} = \underbrace{\boxed{\mathbf{I}}}_{m\times m}, \qquad \underbrace{\boxed{\mathbf{A}}}_{n\times m}\underbrace{\boxed{\mathbf{A}_{\langle}^{-1}}}_{m\times n} = \underbrace{\boxed{\mathbf{I}}}_{n\times n} \tag{3.68}$$

のように行と列の数が決まる（二つの式の $\mathbf{I}$ はどっちも単位行列だが、次元が違う)。

ここまでは 2×2 行列しか考えてないが、行数と列数が等しい行列（$n \times n$ 行列）のことを「正方行列」と呼ぶことにする。以下は正方行列について考えることにする。

[†10] $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ と $\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}}$（どちらも行列式は 0）のような例を考えるとすぐにわかる。

[†11] もちろん、掛け算が成立するためには $\mathbf{A}$ の列数と $\mathbf{B}$ の行数は（$\mathbf{B}$ の列数と $\mathbf{C}$ の行数も）一致しなくてはいけない。

$\mathbf{A}$ を左逆行列と右逆行列で挟んだ $\mathbf{A}_{\langle}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}$ を考えると、

$$\mathbf{A}_{\langle}^{-1}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}}_{\text{先に計算}} = \mathbf{A}_{\langle}^{-1} \tag{3.69}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}_{\langle}^{-1}\mathbf{A}}_{\text{先に計算}}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1} = \mathbf{A}_{\rangle}^{-1} \tag{3.70}$$

となる。結合法則により上の二つは等しいから[†12]、

結果 20: 左逆行列と右逆行列は等しい

正方行列 $\mathbf{A}$ に対し左右の逆行列がともに存在するならば

$$\mathbf{A}_{\langle}^{-1} = \mathbf{A}_{\rangle}^{-1} \tag{3.71}$$

である。左逆行列と右逆行列を区別する必要はない。

が言えて、左右の逆行列がともに存在するのは正方行列の場合のみだとわかる。正方でない行列の場合、どちらかの逆行列が存在しないことは、次で示そう。

3.4.3 正方でない行列の逆 skip

正方行列でない場合を考えよう。たとえば $\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}$ のような 3×2 の行列では、左逆行列は

$$\overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{\langle}^{-1}}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$m \times n$ 行列の左逆行列は $n \times m$ 行列で、演算の結果は $m \times m$ の単位行列

右逆行列は

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

$m \times n$ 行列の右逆行列は $n \times m$ 行列で、演算の結果は $n \times n$ の単位行列

となるような行列であろう。

実は $\boxed{m > n}$ のとき左逆行列は存在しないことが以下のようにしてわかる。

3×2 行列の例で示そう。$\mathbf{A}$ を $\begin{bmatrix} \boxed{\vec{v}_1} & \boxed{\vec{v}_2} & \boxed{\vec{v}_3} \end{bmatrix}$ のように 3 本の 2 次元列ベクトルを並べたものと解釈する。2 次元で 3 本のベクトルが線形独立であることは有り得ないから、$\boxed{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = 0}$ となるようなすべてが 0 ではない係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在する（線形従属である）。ゆえに

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\vec{v}_1} & \boxed{\vec{v}_2} & \boxed{\vec{v}_3} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.74}$$

となるベクトル $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ が存在する。ゆえに $\mathbf{A}$ に左逆行列はない。あったとすると、$\boxed{\underbrace{\mathbf{A}_{\langle}^{-1}\mathbf{A}}_{=\mathbf{I}?}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0}$ となるが、これは矛盾する式である。

$\boxed{m > n}$ なら以上の話は同様に成り立つ。

上のことから、$\boxed{m > n}$ のとき右逆行列はユニークに決まらないこともわかる。というのは、もし右逆行列を一つ $\boxed{\mathbf{A}_{\rangle}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}}$ のように見つけたとすると、この行列のどちらかの列に $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ を足した行列も、

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} B_{11} + \alpha_1 & B_{12} \\ B_{21} + \alpha_2 & B_{22} \\ B_{31} + \alpha_3 & B_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{3.75}$$

となって、右逆行列になってしまうからである。$\boxed{m > n}$ のときは左右が逆転するだけで同様のことが成立する。

[†12] 少し先の話だが、【問い B-1】→ p131 では同様にして、ベクトル空間（これの説明は後）において逆元がユニークであることを示す 。結合法則が成り立つことが重要だ。

$\infty \times \infty$ 行列[†13] の場合、右逆行列と左逆行列は等しくないことがある（これは、無限次元の行列の積は結合法則を満たさないことを示している）。たとえば、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

いう行列を考えると、この行列は $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} b \\ c \\ \vdots \end{bmatrix}$ にする。つまり「成分を一つ上に上げる行列」である。右逆行列は

$$\mathbf{A}_{\rangle}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

で、この行列は $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ \vdots \end{bmatrix}$ にする、「成分を下げる行列」である。$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1} = \mathbf{I}}$ であることはすぐ確認できる。しかし、左逆行列はない。つまり「下げてから上げると元に戻るが、上げてから下げると元に戻らない」のである。このことは「上げる操作が a の情報を消してしまう」ことからも理解できる。

【問い 3-1】 (3.76) の $\mathbf{A}$ の右逆行列はユニークではない（つまり、(3.77) 以外にもある）ことを示せ。 解答 → p142 ↖

3.4.4 行列の積に関する法則

結果 21: 行列の積に関する定理

- 結合法則：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- 分配法則（後の因子に関して）：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
- 分配法則（前の因子に関して）：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- スカラー倍の結合法則：$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

分配法則が成り立つことは成分で書けば $\boxed{\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left(B_{jk}+C_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jk} + \sum_{j=1}^{m} A_{ij}C_{jk}}$ となることからすぐわかる。スカラー倍についても同様である。

3.5 3 × 3 行列

3.5.1 逆行列

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

から x, y, z を求めるために、この行列 $\mathbf{A}$ の逆行列を求める方法を考えよう。2×2 の経験からこの式を

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}}_{\vec{A}_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix}}_{\vec{A}_2} y + \underbrace{\begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix}}_{\vec{A}_3} z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

[†13] これを「正方行列」と呼んでいいのかは疑問である。二つの ∞ を「どっちも無限だから等しい」と考えるのは乱暴すぎる。

と書き直す。そして、たとえば「z を求めるために x と y を消す」操作を行なうためには、$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_2$ に直交するベクトルを持ってきて内積を取ればよい（x, y を求めるときも同様）

では、$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_2$ の両方に直交するベクトルはどうやって作るか。外積は元のベクトルと直交する（たとえば、$\boxed{(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_1 = 0}$）から、$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ が「$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_2$ の両方に直交するベクトル」である。

同様に、$\begin{cases} \boxed{\text{$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_3$ に垂直なベクトル}}\text{として } \vec{A}_3 \times \vec{A}_1 \\ \boxed{\text{$\vec{A}_2$ と $\vec{A}_3$ に垂直なベクトル}}\text{として } \vec{A}_2 \times \vec{A}_3 \end{cases}$ を持ってくればよい[†14]。すなわち、

$$\begin{array}{r} \vec{A}_2, \vec{A}_3 \text{ に垂直} \\ \vec{A}_1, \vec{A}_3 \text{ に垂直} \\ \vec{A}_1, \vec{A}_2 \text{ に垂直} \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3)^\top} \\ \boxed{\lambda_2(\vec{A}_3 \times \vec{A}_1)^\top} \\ \boxed{\lambda_3(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)^\top} \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

のように行ベクトル（これらが双対基底 → p22 となる）を並べると逆行列ができる。ただし、係数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は結果が単位行列になるように調整する因子である（実は $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3}$ であることがすぐわかる）。

行列の掛算をやってみると、

$$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3)^\top} \\ \boxed{\lambda_2(\vec{A}_3 \times \vec{A}_1)^\top} \\ \boxed{\lambda_3(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)^\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\vec{A}_1} & \boxed{\vec{A}_2} & \boxed{\vec{A}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) \cdot \vec{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\vec{A}_3 \times \vec{A}_1) \cdot \vec{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

となる（外積の性質から 0 となる成分は最初から 0 と書いた）。よって

$$\lambda_1(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) \cdot \vec{A}_1 = \lambda_2(\vec{A}_3 \times \vec{A}_1) \cdot \vec{A}_2 = \lambda_3(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 = 1 \tag{3.82}$$

とすれば (3.80) が $\mathbf{A}$ の逆行列になる。

結果 16 → p32 $\boxed{(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) \cdot \vec{A}_1 = (\vec{A}_3 \times \vec{A}_1) \cdot \vec{A}_2 = (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3}$ より、

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) \cdot \vec{A}_1} \tag{3.83}$$

がわかるので、以下の式を得る。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) \cdot \vec{A}_1} \begin{bmatrix} \boxed{\Big((\vec{A}_2 \times \vec{A}_3)\Big)^\top} \\ \boxed{\Big((\vec{A}_3 \times \vec{A}_1)\Big)^\top} \\ \boxed{\Big((\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)\Big)^\top} \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

ここに現れた因子 $\vec{A}_1 \cdot \left(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3\right)$ は、2×2 行列のときの $ad - bc$ に対応するものだから、「3×3 行列の行列式 (determinant)」である（$\det \mathbf{A}$ で表す）。$\det \mathbf{A}$ すなわち $\vec{A}_1 \cdot \left(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3\right)$ は、$\vec{A}_2, \vec{A}_3$ が作る平行四辺形を「底面」として、$\vec{A}_1$ の方向へと伸びる斜め角柱の体積に等しい（添字 $_{1,2,3}$ をサイクリック置換 → p26 してもよい）。2×2 の行列式が「ベクトルの作る面積」だったことに対応している。

3.5.2 レヴィ・チビタ記号を使って求める逆行列

2×2、3×3 の行列に対して逆行列を求める方法がわかった。ここまでは「図形で考える」ことが比較的可能であるが、4×4 以上になると難しい（普通の人間は 4 次元以上のベクトルを思い浮かべられない）。いずれ次元が上がっていくことも考えて、図形でなく、次元が上がっても通用する形の式を使って逆行列や行列式を表しておきたい。

[†14] 「$\vec{A}_1$ と $\vec{A}_3$ に垂直なベクトルは $\vec{A}_1 \times \vec{A}_3$ じゃないの？」と思う人もいるかもしれない（実はそっちにしてもよい）。「サイクリック置換 → p26 で対称な形の方がいいだろう」と考えると、この順番になる。実はこの順番にしておいたおかげで $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3}$ になった。

2×2 行列の場合は行列を 2 本の列ベクトルを並べたものと考えたときの $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ が行列式であり、3×3 行列の場合は行列を 3 本の列ベクトルを並べたものと考えたときの $(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)\cdot\vec{A}_3$ が行列式だった。スカラー 3 重積は $\displaystyle\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}(\vec{A}_1)_i(\vec{A}_2)_j(\vec{A}_3)_k$ とも表現できたので、→ p32 $\begin{bmatrix} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \vec{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ の行列式は

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \tag{3.85}$$

と書くことができる。これがレヴィ・チビタ記号を使った行列式の表現である。

2 次元の場合も 2 次元のレヴィ・チビタ記号 → p31 を使って以下のように書くことができる。

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} A_{i1} A_{j2} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \tag{3.86}$$

では、逆行列をどう表現するか？ —(3.84) → p50 を見て、まずは雰囲気をつかむと、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{行列式}} \begin{bmatrix} \left(\text{行列式から}\vec{A}_1\text{を外したもの}\right)^\top \\ \left(\text{行列式から}\vec{A}_2\text{を外したもの}\right)^\top \\ \left(\text{行列式から}\vec{A}_3\text{を外したもの}\right)^\top \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

のようになっている。「行列式から $\vec{A}_1$ を外したもの」とは、$\vec{A}_2 \times \vec{A}_3$ のことである。行列式は $(\vec{A}_2 \times \vec{A}_3)\cdot\vec{A}_1$ と書けるから、「$\vec{A}_1$ と内積を取るのをやめた（$\vec{A}_1$ を外した）」結果だと考えることができる（2 行目、3 行目も同様）。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

と表現したとき、以下のように書ける。

$$\tilde{A}_{1k} = \frac{\partial}{\partial A_{k1}} \det \mathbf{A} = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} \overbrace{\boxed{A_{k1}}}^{\text{外す}} A_{i2} A_{j3} \tag{3.89}$$

$$\tilde{A}_{2k} = \frac{\partial}{\partial A_{k2}} \det \mathbf{A} = \sum_{i,j} \epsilon_{ikj} A_{i1} \overbrace{\boxed{A_{k2}}}^{\text{外す}} A_{j3} = \overbrace{\sum_{i,j} \epsilon_{kji} A_{j3} A_{i1}}^{k\text{ が }\epsilon\text{の最初の添字になるよう順番変更}} \tag{3.90}$$

$$\tilde{A}_{3k} = \frac{\partial}{\partial A_{k3}} \det \mathbf{A} = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} \overbrace{\boxed{A_{k3}}}^{\text{外す}} = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} A_{i1} A_{j2} \tag{3.91}$$

微分する A_{k1} と結果の $\tilde{A}_{1k}$ で添字の順序が入れ替わっていることに注意しよう。

上の三つの式の二つめの等号では、微分を使って「外す」という操作を実現している。$\det \mathbf{A}$ の中に、ある行列要素 A_{ij} は 1 次式でしか現れないことに注意しよう。つまり、任意の i, j に対し、

$$\det \mathbf{A} = (A_{ij}\text{を含まない係数})A_{ij} + (A_{ij}\text{を含まない項}) \tag{3.92}$$

である。これを A_{ij} で微分すれば $(A_{ij}\text{を含まない係数})$ になる。

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ が単位行列に比例することを確認するために、まず、1 行 2 列成分の $\displaystyle\sum_i \tilde{A}_{1i} A_{i2}$ を計算しておこう。

$$\sum_i \tilde{A}_{1i} A_{i2} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_{j2} A_{k3} A_{i2} \tag{3.93}$$

となり、これは 0 である。なぜならば、式の ϵ_{jki} は $i \leftrightarrow j$ の交換に関して反対称、$A_{j2}A_{k3}A_{i2}$ の部分は $i \leftrightarrow j$ の交換に関して対称になっていて、和をとると逆符号の項が 1 回ずつ現れる（たとえば $\boxed{i=1,j=2}$ の項と $\boxed{i=2,j=1}$ の項が逆符号[†15]）ことになり、消える。同様に計算結果の行番号と列番号が違う成分（「非対角成分」と呼ぶ）はすべて 0 になる。また、1 行 1 列成分は

$$\sum_i \tilde{A}_{1i}A_{i1} = \sum_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_{j2}A_{k3}A_{i1} \tag{3.94}$$

となって行列式に等しい。同様に、対角成分はすべて行列式になる。

(3.89)→ p51 から(3.91)→ p51 までをまとめると

$$\tilde{A}_{ik} = \frac{\partial}{\partial A_{ki}} \det \mathbf{A} \tag{3.95}$$

となる（念の為、A_{ki} と $\tilde{A}_{ik}$ で添字の位置の逆転に注意）。

$\tilde{A}_{ik}$ を「A_{ki} の**余因子 (cofactor)**」[†16]と呼び、$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}$ を「**余因子行列 (adjugate matrix)**」と言う[†17]。余因子行列を行列式で割ったものが逆行列となる。

3.5.3　3 × 3 行列の行列式の性質

2 × 2 行列の行列式には双線形性があったように、3 × 3 行列の行列式には「3 重線形性」がある。すなわち、行列式を 3 本の列ベクトルの関数とみたとき、

$$\det\left[\lambda_1\vec{v}_1^{(1)} + \lambda_2\vec{v}_1^{(2)}, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] = \lambda_1 \det\left[\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] + \lambda_2 \det\left[\vec{v}_1^{(2)}, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] \tag{3.96}$$

$$\det\left[\vec{v}_1, \lambda_1\vec{v}_2^{(1)} + \lambda_2\vec{v}_2^{(2)}, \vec{v}_3\right] = \lambda_1 \det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2^{(1)}, \vec{v}_3\right] + \lambda_2 \det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2^{(2)}, \vec{v}_3\right] \tag{3.97}$$

$$\det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \lambda_1\vec{v}_3^{(1)} + \lambda_2\vec{v}_3^{(2)}\right] = \lambda_1 \det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3^{(1)}\right] + \lambda_2 \det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3^{(2)}\right] \tag{3.98}$$

のように、どの引数に対しても線形性がある。

また、2 × 2 同様に成り立つ式として、

$$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 + \underbrace{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2}_{\text{1 列めと 2 列めの線形結合}}] = \det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] \tag{3.99}$$

という式、すなわち $\vec{v}_3$ に他の 2 本のベクトルの線形結合を足しても、行列式の値は不変であるという式も成り立つ（上では 3 番目の引数つまり第 3 列について書いたが、第 1 列、第 2 列にも同様の式が成り立つ）。証明はレヴィ・チビタ記号を使うなら、

アプリのリンク

3 × 3 行列の行列式を不変にする変形

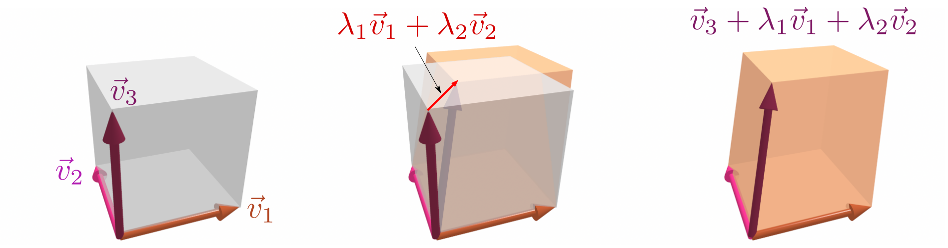
$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}\left(A_{k3} + \lambda_1 A_{k1} + \lambda_2 A_{k2}\right) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \tag{3.100}$$

を示せばよい（$\boxed{(3.93) = 0}$ → p51 と同様に示せる）。行列式は平行六面体の体積だったから、上の式は

[†15] $\boxed{i=1,j=1}$ の項は（レヴィ・チビタ記号のおかげで）最初からない。

[†16] ちょっとわかりにくい表現だが、(3.92)→ p51 の（A_{ij} を含まない係数）が $\tilde{A}_{ji}$ なので、「行列式から A_{ij} を外すと残る因子」という意味で「余因子」と呼んでいると思えばよい。「余」（英語では「co-」）は sine → cosine のように、「対になっているもののもう片方」というときに使われる接頭詞。

[†17] 「cofactor matrix」ではないことに注意。この「adjugate」という単語はここぐらいでしか使わないかも。本によっては、「cofactor matrix」を $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}$（添え字を逆転してない行列）の名前として使っている。



のように「天井を平行移動させる」操作では体積が変わらないことに対応している。

もう一つよく使われる性質は、列ベクトルの交換に関する反対称性

$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]=-\det[\vec{v}_2,\vec{v}_1,\vec{v}_3]=-\det[\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_2]=-\det[\vec{v}_3,\vec{v}_2,\vec{v}_1] \tag{3.101}$$

とサイクリック置換で不変であること → p26

$$\det[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]=\det[\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_1]=\det[\vec{v}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_2] \tag{3.102}$$

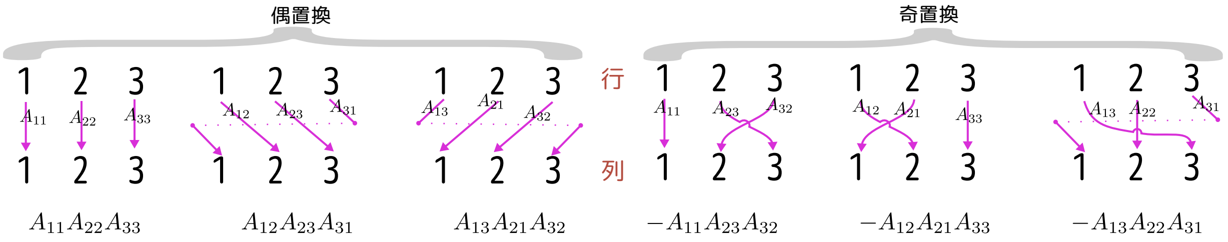
である。これも証明は優しい（レヴィ・チビタ記号の性質からくる）。

行列式を行ベクトルの関数とみた場合も、上と同様の性質がある。それは、

$$\sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}=\sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \tag{3.103}$$

が成り立つからである（二つの式で A の添字の付き方が逆であることに注意）。

この式が成り立つことを示すには、ϵ_{ijk} が 0 でないのは $\epsilon_{123},\epsilon_{231},\epsilon_{312}$（以上 $+1$）と $\epsilon_{132},\epsilon_{213},\epsilon_{321}$（以上 -1）の 6 通りしかなく、下の図に示した 6 種類の項の足し算となる（上の式の左辺でも右辺でも！）ことを確認すればよい。



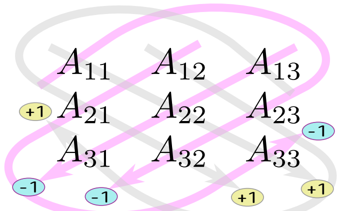
もう一つ、

$$\det\mathbf{A}=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k,\ell,m,n}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mn}A_{i\ell}A_{jm}A_{kn} \tag{3.104}$$

という書き方もある（これも等しい）。これが同じ式であることを証明するには、i,j,k に $1,2,3$ の 6 種の置換（偶置換 3 と奇置換 3）を代入したものを足し上げればよい。

以上の性質を使うと、行列式の計算を簡単化することができる。地道にやるための公式としては、

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}&\\=&\underbrace{A_{11}A_{22}A_{33}+A_{12}A_{23}A_{31}+A_{13}A_{21}A_{32}}_{\text{右下がりに掛け算}}\\&\underbrace{-A_{11}A_{23}A_{32}-A_{12}A_{21}A_{33}-A_{31}A_{22}A_{13}}_{\text{右上がりに掛け算}}\end{aligned} \tag{3.105}$$



がある（図で表現したのが右の図である）が、以下の操作をしても行列式が不変であることを使うと、少し計算を省力化できる。ここでは 3×3 行列の場合で説明したが、以下の結果は任意の正方行列で正しい。

結果 22: 行列式を不変にする変形

(1)ある行に別の行の定数倍を足す。

(2)ある列に別の列の定数倍を足す。

(3)ある行と別の行を交換し、どちらか片方の行を -1 倍する（行列式全体の符号を反転してもよい）。

(4)ある列と別の列を交換し、どちらか片方の列を -1 倍する（行列式全体の符号を反転してもよい）。

実は複数回の (1) の組合せで (3) は実現できる（(2) と (4) も同様）ので、本質的なのは (1) と (2) である。

【問い 3-2】 (1) を繰り返すと (3) が実現できることを確認せよ。

ヒント → p140 へ　解答 → p142 へ

【問い 3-3】 上のうち、行に関する操作である (1) と (3) を使うと、行列をかならず上三角行列にできることを示せ。「上三角行列」とは、$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ の形の行列である。

ヒント → p140 へ　解答 → p142 へ

上の問いの答えから、列に対する操作 (2) と (4) を同様に行なうと「下三角行列 $\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$」にできることも示せる。

よって全操作を使うと、「対角行列 $\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$」にできる。

アプリのリンク

ここで示した計算方法で行列式を求める

上の変形の例を式で書くと、以下のようになる。

$$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det[\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \alpha\vec{v}_1, \vec{v}_3] \tag{3.106}$$

$$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det[\vec{v}_1, \vec{v}_3, -\vec{v}_2] = -\det[\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2] \tag{3.107}$$

3×3 行列の場合、サイクリック置換で不変 → p26

$$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det[\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \tag{3.108}$$

も言える[†18]。

行に対する「行列式を不変にする変形」を繰り返すと行列を上三角行列 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$ にできるが、この行列の行列式は $A_{11}A_{22}A_{33}$ となる（計算が簡単）。ここで行列式が 0 でないならこの A_{11}, A_{22}, A_{33} はどれも 0 ではない。このとき 3 本のベクトル $\begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix}$ は独立である（A_{11}, A_{22}, A_{33} のどれかが 0 なら独立ではなくなる）。下で示すようにこの逆も正しいので、「行列式が 0 である」と「3 本のベクトルが独立でない」は同値関係である。

【問い 3-4】 3×3 行列を 3 本の列ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を並べたものとみなしたとき、この 3 本のベクトルが独立でなければ、行列式が 0 となることを示せ。

ヒント → p140 へ　解答 → p142 へ

簡単な例をやってみよう。

(1) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

（1 行めの −4 倍を 2 行めに足す）

(2) $$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

（1 行めの −7 倍を 3 行めに足す）

(3) $$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

（1 列めの −2 倍, −3 倍を 2 列め、3 列めに足す）

(4) $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

（2 列めの −2 倍を 3 列めに足す）

(5) $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

（2 行めの −2 倍を 3 行めに足す）

(6) $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

となって、この行列の行列式は 0 となる。0 となることは (5) の段階でわかる。あるいは目ざとい人なら、(4) の段階で 2 行目と 3 行目が独立でないことに気づいて、行列式が 0 であることがわかったかもしれない。

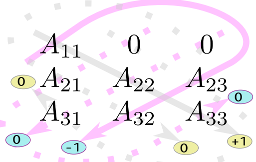
[†18] 2 次元では $\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = -\det[\vec{v}_2, \vec{v}_1]$ となるのでサイクリック置換で不変でない。奇数次元か偶数次元かで違う。

3 重線形性を使うと、$\boxed{\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & A_{12} & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & A_{13}\end{bmatrix}}$ というベクトルの分解を使って、

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}
&= \det\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}
+ \det\begin{bmatrix}0 & A_{12} & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}
+ \det\begin{bmatrix}0 & 0 & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}\\
&= \det\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}
\overbrace{-\det\begin{bmatrix}A_{12} & 0 & 0\\ A_{22} & A_{21} & A_{23}\\ A_{32} & A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}}^{\text{1 列めと 2 列めを入れ替えた}}
\overbrace{+\det\begin{bmatrix}A_{13} & 0 & 0\\ A_{23} & A_{21} & A_{22}\\ A_{33} & A_{31} & A_{32}\end{bmatrix}}^{\text{3 列めを 1 列めに持ってきた}}\\
&= A_{11}\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix} + A_{12}\left(-\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{23}\\ A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}\right) + A_{13}\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

のような行列式の分解ができる。

上の式の一つめの等号では、1 行目の行ベクトルを 3 本に分解した。

三つめの等号では、

のように行列式の計算を考えれば 2×2 行列の行列式の計算が出てくることがわかる（図では、0 になる積を点線で表現した）のでそれを使った。実線のまま残っている部分の計算結果が上の式の第 1 項の $A_{11}\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$ となる（第 2 項以降も同様）。

(3.110) の最後の式には

$$
\underbrace{A_{11}\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{11}} + A_{12}\underbrace{\left(-\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{23}\\ A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}\right)}_{\tilde{A}_{21}} + A_{13}\underbrace{\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{31}}
\tag{3.111}
$$

のように余因子が現れている。

以上から、A_{ij} の余因子が計算したければ、行列式から出発して

(1)A_{ij} が 1 行 1 列めになるように行と列を置換していく（以下は A_{22} の場合の例）。置換するごとにマイナス符号が出ることに注意。

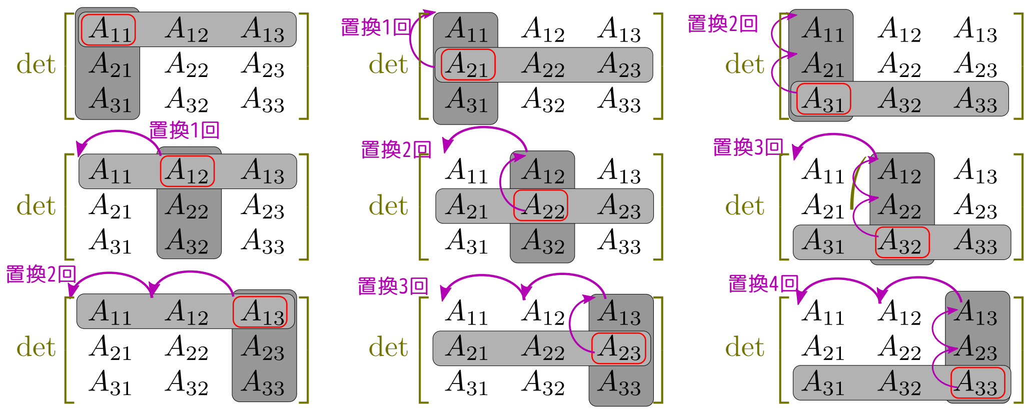
$$
\det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{21} & A_{23}\\ A_{12} & A_{11} & A_{13}\\ A_{32} & A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}
$$

(2)1 行目と 1 列目を消す。

$$
\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{21} & A_{23}\\ A_{12} & A_{11} & A_{13}\\ A_{32} & A_{31} & A_{33}\end{bmatrix} \to \det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{13}\\ A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}
$$

のようにすればよいことがわかる。

このようにして、3×3 行列の行列式を、2×2 行列の行列式（小行列式）に分解して計算することができる。以上をまとめると、3×3 余因子行列の計算は、以下の図で表現される。



▢は、余因子を計算するときに微分される成分

▬と▮にある成分は、微分の結果に現れない。

以上の計算の結果、余因子行列は

$$\begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

である（微分の前に行と列を置換することによる符号が出ることに注意）。

$$\tilde{A}_{qp} = (-1)^{(p-1)(q-1)} \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}\text{ から第 }p\text{ 行と第 }q\text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

のように計算してもよい（この式は任意の N に対する $N \times N$ 行列で正しい）。

下の式は一つ一つ成分を丁寧に計算すれば確認できるので、やってみよう。

$$\begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I} \tag{3.114}$$

3.6　$N \times N$ 行列の行列式と逆行列

3.6.1　行列式

ここまで来ると $N \times N$ 行列の det は同様にレヴィ・チビタ記号を使って定義できそうだ。まず任意次元のレヴィ・チビタ記号を定義しよう。

定義 11: 任意次元のレヴィ・チビタ記号

(1)N 次元のレヴィ・チビタ記号は N 個の添字を持つ（$\epsilon_{\underbrace{ij\cdots k}_{N\text{ 個}}}$）。たとえば 2 次元では ϵ_{ij}、3 次元では ϵ_{ijk} のように。

(2)レヴィ・チビタ記号の隣り合う二つの添字を入れ替えると、符号が反対になる。

$$\epsilon_{\cdots ij\cdots} = -\epsilon_{\cdots ji\cdots} \tag{3.115}$$

(3)添字が 1 ずつ増えていく場合のレヴィ・チビタ記号の値を 1 と定める。

$$\epsilon_{123\cdots N} = 1 \tag{3.116}$$

(2) は隣り合う二つの添字に対する式だが、たとえば隣の隣と入れ替える（下の式では i と k を入れ替える）のであれば、

$$\epsilon_{\cdots ijk\cdots} = -\epsilon_{\cdots jik\cdots} = \epsilon_{\cdots jki\cdots} = -\epsilon_{\cdots kji\cdots} \tag{3.117}$$

のように隣との入れ替えごとに符号が出て、やはり符号は反転する。今入れ替えた i と k の間に M 個の添字 ($j_1 j_2 \cdots j_M$) があったとしても、

$$\epsilon_{\cdots \overset{\text{M 個飛び越え}}{i j_1 j_2 \cdots j_M k}\cdots} = (-1)^M \epsilon_{\cdots j_1 j_2 \cdots j_M ik\cdots} = -(-1)^M \epsilon_{\cdots \overset{\text{M 個飛び越え}}{j_1 j_2 \cdots j_M k}i\cdots} = -\epsilon_{\cdots k j_1 j_2 \cdots j_M i\cdots} \tag{3.118}$$

となって、やはり符号は反転する。よって

結果 23: レヴィ・チビタ記号の完全反対称性

(2') レヴィ・チビタ記号の任意の二つの添字を入れ替えると、符号が反対になる。

$$\epsilon_{\cdots i\sim j\cdots} = -\epsilon_{\cdots j\sim i\cdots} \tag{3.119}$$

と表現しても同じ。 この **結果 23** により、レヴィ・チビタ記号は同じ添字が二つ以上あると 0 になる。

以上のようなレヴィ・チビタ記号を使って、

結果 24: $N \times N$ 行列の行列式

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_N} \epsilon_{i_1, i_2, \cdots, i_N} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_N N} \tag{3.120}$$

と定義する（これを使って逆行列も後で定義する）。たとえば 4 × 4 ならば 4 次元のレヴィ・チビタ記号を $\epsilon_{ijk\ell}$ を使って、 $\boxed{\det \mathbf{A} = \sum_{i,j,k,\ell} \epsilon_{ijk\ell} A_{i1} A_{j2} A_{k3} A_{\ell 4}}$ と行列式が定義される。この式は

結果 25: $N \times N$ 行列の行列式の別の形

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{N!} \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_N} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_N} \epsilon_{i_1, i_2, \cdots, i_N} \epsilon_{j_1, j_2, \cdots, j_N} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_N j_N} \tag{3.121}$$

と書いてもよい。(3.120) と (3.121) が等しいことは、レヴィ・チビタ記号の反対称性からわかる。

この計算式から、以下が成り立つことはすぐわかる。

結果 26: 転置は行列式を変えない

$$\det \mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}^\top\right) \tag{3.122}$$

3 × 3 行列の行列式に 3 重線形性があったように、

結果 27: $N \times N$ 行列の行列式の N 重線形性

$$\det \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \lambda_1 \vec{v}_i^{(1)} + \lambda_2 \vec{v}_i^{(2)} & \cdots & \vec{v}_N \end{bmatrix}$$

$$= \overset{\text{出す}}{\lambda_1} \det \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_i^{(1)} & \cdots & \vec{v}_N \end{bmatrix} + \overset{\text{出す}}{\lambda_2} \det \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_i^{(2)} & \cdots & \vec{v}_N \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

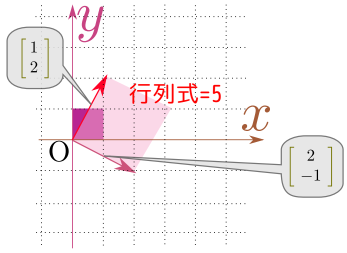
が成り立つ（行ベクトルの方についても同様である）。これがあるので行列式を不変にする変形 **結果 22** は $N \times N$ の場合でも同様に使える。

→ p53

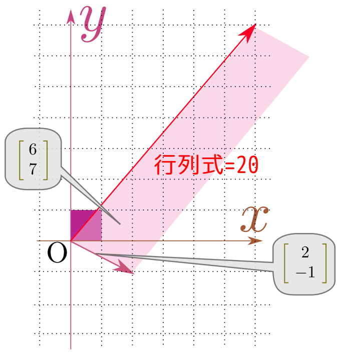
3.6.2 行列式の幾何学的意味

2×2 行列の行列式は「列ベクトル 2 本の作る平行四辺形の体積」であり、3×3 行列の行列式は「列ベクトル 3 本の作る平行六面体の体積」であった。類推から、$N \times N$ 行列の行列式は「列ベクトル N 本の作る N 次元立体の ‘体積’」となる。より正確に言うと行列式は「その行列の表す線形写像によってその空間の 体積 が何倍になるか」を表す量だと言える。2 次元の場合で描いたのが下の図である。

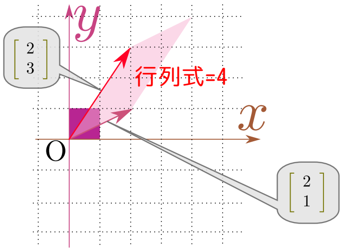
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ による写像



$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ による写像



$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ による写像



$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

このことから直観的に、以下が成り立つことがわかる。

結果 28: 行列の積の行列式は行列式の積

任意の同じ次元の正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について以下が成り立つ。

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \tag{3.124}$$

これを具体的に行列式の定義に代入して計算して確かめようとすると少し面倒だが、行列式の N 重線形性を使うと比較的計算量少なく証明できる。

まず行列 $\mathbf{B}$ を $\begin{bmatrix} \vec{B}_1 & \vec{B}_2 & \cdots & \vec{B}_N \end{bmatrix}$ のように列ベクトルを並べたものとみなして考えよう。すると、行列の積 $\mathbf{AB}$ は「各々の $\vec{B}_k$ に $\mathbf{A}$ が左から掛かっていく」と解釈できるので、

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\vec{B}_1 & \mathbf{A}\vec{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}\vec{B}_N \end{bmatrix} \tag{3.125}$$

と表現できる。次に行列 $\mathbf{A}$ の方も $\begin{bmatrix} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \cdots & \vec{A}_N \end{bmatrix}$ のように列ベクトルを並べたものとして見ると、$\mathbf{A}\vec{B}_k$ という

ベクトルを

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \cdots & \vec{A}_N \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} B_{k1} \\ B_{k2} \\ \vdots \\ B_{kN} \end{bmatrix}}^{\vec{B}_k} = \vec{A}_1 B_{k1} + \vec{A}_2 B_{k2} + \cdots + \vec{A}_N B_{kN} = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i B_{ki} \tag{3.126}$$

のように $\{\vec{A}_*\}$ の線形結合で表現できるので、

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\left[\sum_{j_1} \vec{A}_{j_1} B_{1j_1}, \sum_{j_2} \vec{A}_{j_2} B_{2j_2}, \cdots, \sum_{j_N} \vec{A}_{j_N} B_{Nj_N}\right] \tag{3.127}$$

となる。ここで、N 重線形性を使えば $\vec{A}_j$ の係数であるところの B_{ij} を

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\left[\sum_{j_1} \vec{A}_{j_1} B_{1j_1}, \sum_{j_2} \vec{A}_{j_2} B_{2j_2}, \cdots, \sum_{j_N} \vec{A}_{j_N} B_{Nj_N}\right] \tag{3.128}$$

のようにどんどん外に出していくことができる。結果は

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{j_1, j_2, \cdots j_N = 1}^{N} B_{1j_1} B_{2j_2} \cdots B_{Nj_N} \det\left[\vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \cdots, \vec{A}_{j_N}\right] \tag{3.129}$$

の形になる。ここで、後ろの $\det\left[\vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \cdots, \vec{A}_{j_N}\right]$ は $j_1, j_2, \cdots, j_N$ が $1, 2, \cdots, N$ の置換でない限り 0 になる（添字が同じ値になると、行列式の反対称性から 0）。この置換が偶置換なら結果は $\det\left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_N\right]$ になり、奇置換なら結果は $-\det\left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_N\right]$ となる。それはつまり、$j_1 j_2 \cdots j_N$ の置換の偶奇性により ± 1 が出るということで、Levi-Civita 記号が出てくる。よって

$$\det\left[\vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \cdots, \vec{A}_{j_N}\right] = \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N} \det\left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_N\right] \tag{3.130}$$

が成り立つから、

$$\det(\mathbf{AB}) = \underbrace{\sum_{j_1, j_2, \cdots j_N = 1}^{N} B_{1j_1} B_{2j_2} \cdots B_{Nj_N} \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}}_{\det \mathbf{B}} \overbrace{\det\left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_N\right]}^{\det\left[\vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \cdots, \vec{A}_{j_N}\right]} \tag{3.131}$$

となり、証明された。

3.6.3 ブロック行列の行列式

結果 29: ブロック行列の行列式は各ブロックの行列式の積

$N_1 \times N_1$ 行列 $\mathbf{A}$ と $N_2 \times N_2$ 行列 $\mathbf{D}$ を使って $\boxed{\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right]}$ と書ける $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ 行列（この形の行列を「ブロック行列」と呼ぶ）があるとする。このとき、

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \tag{3.132}$$

が成り立つ。

上を示そう。まず

$$\det \mathbf{M} = \sum_{i_1, i_2 \cdots i_{N_1+N_2} = 1}^{N_1+N_2} \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{N_1+N_2}} M_{1i_1} M_{2i_2} \cdots M_{N_1+N_2\, i_{N_1+N_2}} \tag{3.133}$$

と書く。ここで M_{ij} は i, j が 1 から N_1 までは A_{ij} であり、$N_1 + 1$ から $N_1 + N_2$ では D_{ij} である。ゆえにこの式は

$$\sum \epsilon_{i_1 \cdots i_{N_1} i_{N_1+1} \cdots i_{N_1+N_2}} A_{1i_1} \cdots A_{N_1 i_{N_1}} D_{N_1+1 i_{N_1+1}} \cdots D_{N_1+N_2\, i_{N_1+N_2}} \tag{3.134}$$

のように書くことができる。ここで、i_1 から i_{N_1} までは A_{ij} の添字であるから 1 から N_1 までの添字の置換になっている。同様に、i_{N_1+1} から $i_{N_1+N_2}$ までは D_{ij} の添字であるから N_1+1 から N_1+N_2 までの添字の置換になっている。この状況では、

$$\overbrace{\epsilon_{i_1\cdots i_{N_1} i_{N_1+1}\cdots i_{N_1+N_2}}}^{N_1+N_1\text{次元の }\epsilon} = \overbrace{\epsilon_{i_1\cdots i_{N_1}}}^{N_1\text{次元の }\epsilon}\,\overbrace{\epsilon_{i_{N_1+1}\cdots i_{N_1+N_2}}}^{N_2\text{次元の }\epsilon} \tag{3.135}$$

である。この式の左辺も右辺も、$i_1,\cdots,i_{N_1},i_{N_1+1}\cdots i_{N_1+N_2}$ が偶置換なら 1, 奇置換なら −1 という式になっている。これから(3.132)が言える。
→ p59

行列が $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}$ の形であったとしても、$\boxed{\det\mathbf{M}=\det\mathbf{AD}}$ は言える。$\mathbf{C}$ の部分が加わったことにより、$\det\mathbf{M}$ は(3.134)に
→ p59

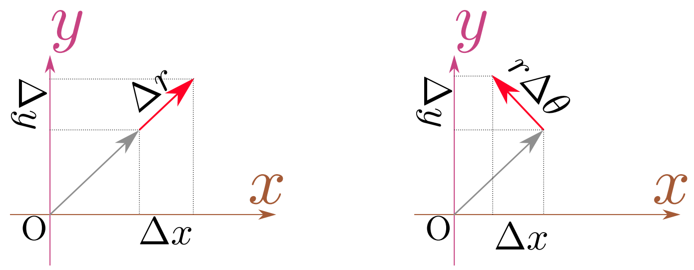
$$\sum \epsilon_{i_1\cdots i_{N_1} i_{N_1+1}\cdots i_{N_1+N_2}} C_{1 i_1}\cdots C_{i_{N_1} i_{N_1}} D_{i_{N+1} i_{N_1+1}}\cdots D_{i_{N_1+N_2} i_{N_1+N_2}} \tag{3.136}$$

を足したものになるが、これは 0 だからである。C と D は同じ列に入っているので、列番号である $i_1,\cdots,i_{N_1}$ と $i_{N_1+1},\cdots,i_{N_1+N_2}$ が重なってしまい、その場合では $\boxed{\epsilon_{i_1\cdots i_{N_1} i_{N_1+1}\cdots i_{N_1+N_2}}=0}$ になる。

3.7 ヤコビアン

ここで、行列式が役に立つ場面について触れておこう。

2 次元平面を直交座標 (x,y) で表したときの微小体積は $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ だが、極座標 (r,θ) で表したときの微小体積は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ である。これは



のように図を描いて

$$\Delta x = \Delta r\cos\theta - r\Delta\theta\sin\theta \tag{3.137}$$

$$\Delta y = \Delta r\sin\theta + r\Delta\theta\cos\theta \tag{3.138}$$

という関係があること（図は Δr のみがあるときと $r\Delta\theta$ のみがあるときを表現しているが、両方があるときは和になる[†19]）を読み取り、さらにそれを行列で

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{bmatrix} \tag{3.139}$$

と表現した後でこの行列の行列式を考えればわかる。上の式は、面積（2 次元体積）の比が r だと示している。

ここでは平面図形の場合を考えたが、もっと複雑なものでも、積分の変換をしたときに変換行列の行列式が掛け算されるという形で積分が変換される。

座標変換 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{bmatrix}$ においては、面積要素には

$$\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.140}$$

[†19] なぜシンプルな和（あるいは線形結合）でよいかというと、今考えているのが「微小変位」だから。

のような関係がある。この行列式を「**ヤコビアン (Jacobian)**」と呼び、省略記法では $\dfrac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(X,Y)}$ のように書く。

【問い 3-5】 3 次元の極座標→直交座標の変換 $\boxed{\begin{cases} x = & r\sin\theta\cos\phi \\ y = & r\sin\theta\sin\phi \\ z = & r\cos\theta \end{cases}}$ のヤコビアンを求めよ。

ヒント → p140 へ　解答 → p142 へ

3.8 余因子

3×3 のときと同様に、A_{qp} の余因子 $\tilde{A}_{pq}$ を

$$\tilde{A}_{pq} = \frac{\partial}{\partial A_{qp}}\left(\sum_{i,j,k,\cdots,\ell} \epsilon_{ijk\cdots\ell} A_{i1}A_{j2}A_{k3}\cdots A_{\ell N}\right) = \frac{\partial(\det\ \mathbf{A})}{\partial A_{qp}} \tag{3.141}$$

で定義しよう[†20]。$N\times N$ の場合も、$\tilde{A}_{qp}$ を並べた行列のことを余因子行列と呼ぶ[†21]。微分を使って表現しているが、難しい計算をしているわけではなく、行列式は A_{qp} の 1 次式でしかないので、やっている計算は係数を求めているだけである。

$$\sum_i \tilde{A}_{pi}A_{iq} = 0 \qquad (p\neq q\text{ のとき}) \tag{3.142}$$

が成り立つことはすぐにわかる。まず $\boxed{p=1}$ にして代入してみると、

$$\sum_i \tilde{A}_{1i}A_{iq} = \sum_{i,j,k,\cdots,\ell} \epsilon_{ijk\cdots\ell} A_{iq}A_{j2}A_{k3}\cdots A_{\ell N} \tag{3.143}$$

であるが、q が 1 でないなら、$2,3,\cdots,N$ のどれかである。たとえば $\boxed{q=2}$ なら

$$\sum_i \tilde{A}_{1i}A_{i2} = \sum_{i,j,k,\cdots,\ell} \epsilon_{ijk\cdots\ell} \overbrace{A_{i2}A_{j2}}^{i\leftrightarrow j\text{ で対称}}A_{k3}\cdots A_{\ell N} \tag{3.144}$$

となるが、レヴィ・チビタ記号は $i\leftrightarrow j$ で反対称だから、この和は 0 になる[†22]。q が $3,4,5,\cdots$ などの場合も同様である。

こうして、$\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1n}\end{bmatrix}$ という行ベクトルは、列ベクトル $\begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2q} \\ \vdots \\ A_{nq}\end{bmatrix}$ （$q\geq 2$）との内積が 0 であることがわかった。では $\boxed{q=1}$ ではどうなるかというと、

$$\sum_{i,j,k,\cdots,\ell} \epsilon_{ijk\cdots\ell} A_{i1}A_{j2}A_{k3}\cdots A_{\ell N} \tag{3.145}$$

となる。これはついさっき定義した（$N\times N$ 行列の）行列式 $\det\ \mathbf{A}$ そのものである。

[†20] 2×2 の場合で確認。

$\boxed{D = ad-bc}$ を微分して余因子行列を作ると、$\boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a}(ad-bc) & \frac{\partial}{\partial c}(ad-bc) \\ \frac{\partial}{\partial b}(ad-bc) & \frac{\partial}{\partial d}(ad-bc) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$ となる。

[†21] $\tilde{A}_{pq}$ ではなく $\tilde{A}_{qp}$ を並べた行列の方を「余因子行列」と呼んでいる本もある。その場合は「余因子行列の転置を行列式で割ったもの」が逆行列になる。

[†22] K_{ij} が i,j の交換で反対称、L_{ij} が i,j の交換で対称であれば、$\boxed{\sum_{i,j} K_{ij}L_{ij} = 0}$ になる。足し算の過程で（$\boxed{m\neq n}$ として）$K_{mn}L_{mn}$ と $K_{nm}L_{nm}$ が一回ずつ現れ、その和が 0 になる。$\boxed{m=n}$ のときは $\boxed{K_{nm}=0}$ である。

微分を使った表現を使うと

$$\sum_i \tilde{A}_{1i} A_{i1} = \sum_i \frac{\partial\left(\det \mathbf{A}\right)}{\partial A_{i1}} A_{i1} = \det \mathbf{A} \tag{3.146}$$

という式が出る。これは行列式の N 重線形性からすぐにわかる。

1 列めだけではなく任意の列に対してこれが成り立つことを示そう。まず、元の $\mathbf{A}$ のうち、q 列めの成分だけを λ 倍した行列

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \lambda A_{1q} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \lambda A_{2q} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & \lambda A_{Nq} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.147}$$

を考える。この行列を $\mathbf{L}$ としよう。$\mathbf{L}$ の行列式は、もとの行列の λ 倍である。すなわち

$$\det \mathbf{L} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \lambda A_{1q} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \lambda A_{2q} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & \lambda A_{Nq} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} = \lambda \det \mathbf{A} \tag{3.148}$$

なのだが、この式の両辺を λ で微分すると、右辺の結果は $\det \mathbf{A}$ になるが、左辺は（λ を含むのは q 列めだけであることに注意)、

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial \det \mathbf{L}}{\partial L_{iq}}}_{\tilde{L}_{qi}} \underbrace{\frac{\partial L_{iq}}{\partial \lambda}}_{A_{iq}} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{L}_{qi} A_{iq} \tag{3.149}$$

となる[†23]。ここで、$\tilde{L}_{qi}$ にはすでに λ は含まれていないので、$\tilde{A}_{qi}$ に等しく、

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{L}_{qi} A_{iq} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{A}_{qi} A_{iq} = \det \mathbf{A} \tag{3.150}$$

が示せた。

$\tilde{\mathbf{A}}$ の p, q 成分 $\tilde{A}_{pq}$ は、行列式 $\sum\limits_{i,j,k,\cdots,\ell} \epsilon_{ijk\cdots\ell} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \cdots A_{\ell N}$ から A_{qp}（A_{pq} ではないことに注意！ —添字がひっくり返っている）を含む項を抜き出して、A_{qp} で割った[†24] もの

ということがわかる。これで、

結果 30: 行列と余因子行列の積は単位行列の行列式倍

$$\sum_q \tilde{A}_{pq} A_{qr} = \begin{cases} \det \ \mathbf{A} & (p = r) \\ 0 & (p \neq r) \end{cases} \tag{3.151}$$

行列で表現すると $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = (\det(\mathbf{A}))\,\mathbf{I}$ (3.152)

がわかった[†25]。よって、逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}} \tag{3.153}$$

で定義される。

[†23] 熱力学で出てくるオイラーの関係式（たとえば、$\boxed{\frac{\partial F}{\partial V} + N\frac{\partial F}{\partial N} = F}$ ）と同じ出し方。

[†24] 今の場合は、この「含む項を抜き出して割る」という操作を「微分する」で代用することができる。

[†25] (3.152) で $\boxed{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}}$ となることは、結果 20 と同様に証明できる。
→ p48

逆行列の作り方の基本的な考えは、行列を $\begin{bmatrix} \vec{v}^1 & \vec{v}^2 & \dots & \vec{v}^N \end{bmatrix}$ のようなベクトルの列と考えてそれらのベクトルと $\boxed{\vec{w}_i \cdots \vec{v}^j = \delta_i{}^j}$ となるベクトル列 $\{\vec{w}^*\}$（双対基底）を持ってきて $\begin{bmatrix} (\vec{w}_1)^\top \\ (\vec{w}_2)^\top \\ \vdots \\ (\vec{w}_N)^\top \end{bmatrix}$ と並べなさいということである。それを Levi-Civita 記号というツールを使って考えると上のようになる。

→ p22

【問い 3-6】 4×4 行列 $\mathbf{M}$（成分を M_{ij} とする）の行列式は Levi-Civita 記号を使うと下のように書ける。

$$\det \mathbf{M} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{4} \epsilon_{ijk\ell} M_{1i} M_{2j} M_{3k} M_{4\ell} \tag{3.154}$$

(1)$\det \mathbf{M}$ を M_{ij} で微分して、M_{ij} の余因子である $\tilde{M}_{ji}$（i, j の位置が入れ替わっていることに注意）を求めよ。

(2) $\boxed{i \neq k}$ のとき、以下の式を求める過程を示せ。

$$\sum_{j=1}^{4} M_{ij} \tilde{M}_{jk} = 0 \tag{3.155}$$

(3) $\boxed{i = k}$ のときはどうなるかを述べよ。

解答 → p142 へ

3.9 章末演習問題

★【演習問題 3-1】

以下の行列の行列式を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix}$

ヒント → p147 へ　解答 → p149 へ

★【演習問題 3-2】

実は行列式は、

(1)$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N]$ は N 重線形性を持つ

(2)$\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N]$ は引数の交換に対して反対称

(3)直交基底ベクトルを代入すると、$\boxed{\det[\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{e}}_N] = 1}$

という条件をつけるだけで、自動的に今考えている定義にたどり着く。よって、上の三つを「行列式の定義」としてもよい。このことを示せ。

ヒント → p147 へ　解答 → p149 へ

★【演習問題 3-3】

$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ の形の $2N \times 2N$ 行列 $\mathbf{M}$ がある（$\mathbf{0}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ は $N \times N$ 行列）。$\mathbf{M}$ の行列式を $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ の行列式で表わせ。

ヒント → p148 へ　解答 → p149 へ

★【演習問題 3-4】

$\boxed{\det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}$ を計算で求めたのち、こうなる理由を図解せよ。

ヒント → p148 へ　解答 → p150 へ

★【演習問題 3-5】

同一平面上にない 3 点 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式が

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.156}$$

であることを示せ。

ヒント → p148 へ　解答 → p150 へ

第 4 章　行列の基本変形

4.1　連立方程式を行列で解く

行列は線形の連立方程式を解くのに使えることを導入としていたので、ここで具体的に「方程式を解く」という作業を行列を使ってやってみよう。$\vec{x}$ が変数（n 成分)、$\vec{A}$ を定数（m 成分）としてこの二つの関係が行列 $\mathbf{M}$（$m\times n$ 行列）を使って $\mathbf{M}\vec{x}=\vec{A}$ と表現されているとする。逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ が存在しているならば、$\vec{x}=\mathbf{M}^{-1}\vec{A}$ で $\vec{x}$ が求められる。

正方行列（$m=n$ の場合）とは限らない[†1]場合も含めて考えることを強調するために行列を長方形で表すと、

$$\underbrace{\boxed{\mathbf{M}}}_{m\times n}\underbrace{\boxed{\vec{x}}}_{n\times 1}=\underbrace{\boxed{\vec{A}}}_{m\times 1}\quad\rightarrow\quad\underbrace{\boxed{\vec{x}}}_{n\times 1}=\underbrace{\boxed{\mathbf{M}^{-1}}}_{n\times m}\underbrace{\boxed{\vec{A}}}_{m\times 1}\tag{4.1}$$

のように表現できる（$m>n$ のつもりで書いている)。また、下に何行何列の行列かを書いたが、m 成分の列ベクトルを $m\times 1$ 行列としている。

具体的な計算の上では

- 逆行列をいかにして計算するか？
- 逆行列がない場合はどうするか？
- 逆行列がユニークに決まらない場合はどうするか？

が問題となる。これらを考えていく上で、「どういう場合に逆行列がなかったりユニークでなくなったりするのかを知る」ことも目標になる。

行列式が 0 のときは、$\mathbf{M}^{-1}$ が存在しないので、$\vec{x}=\mathbf{M}^{-1}\vec{A}$ で $\vec{x}$ を求めるというわけにはいかない。ではまったく $\vec{x}$ に関して何の情報も得られないのかというと、そんなことはない。どの程度の情報が得られるか考察していこう。

$\left\{\begin{array}{l}\text{行列を構成する行ベクトルが独立でない}\\ \text{行列を構成する列ベクトルが独立でない}\end{array}\right.$ の二つの場合に行列式は 0 となる（下の問題参照。行と列を入れ替えて考えれば、上の二つは同様に示せる)。

【問い 4-1】【問い 3-3】→ p54 と同様に、$N\times N$ 行列の場合でも行列式を不変にする変形 **結果 22** → p53 のうち、列に関する操作である (2) と (4) を使うと、行列をかならず「上三角行列」にできることを示せ。

ヒント → p140 へ　　解答 → p142 へ

【問い 4-2】 上の操作を行った結果、行列式が 0 であることが判明したとする。このとき、行列を列ベクトルを並べたものとみたときの列ベクトルの組、および行列を行ベクトルを並べたものとみたときの行ベクトルの組は、どちらも「N 本の線形独立なベクトルの組」にはなってないことを示せ。

ヒント → p140 へ　　解答 → p143 へ

$\mathbf{M}=\left[\boxed{\vec{M}_1}\ \boxed{\vec{M}_2}\cdots\boxed{\vec{M}_N}\right]$ のように行列を分解した列ベクトルの間に $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\vec{M}_i=0$ なる関係がある場合、行列式は 0 になる。このことは【問い 3-4】→ p54 で 3×3 の場合で示したし、上三角行列に直したあとでならわかることも、上の【問い 4-2】で確認した。任意の $N\times N$ 行列の行列式でも、上の列ベクトルが線形独立でなければ、適当な行列式を不変に

[†1] $m\neq n$ のときは逆行列は存在しないか一つに決まらないのは3.4.3 → p48 項で述べた通り。

する変形で列ベクトルのどれかを $\vec{0}$ にできることがわかる。この式は、

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \cdots & \vec{M}_N \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\vec{\alpha}} = \vec{0} \tag{4.2}$$

のように行列を使って書くことができ、「$\boxed{\vec{x}=\vec{X}}$ が方程式 $\boxed{\mathbf{M}\vec{x}=\vec{A}}$ の一つの解なら、$\boxed{\vec{x}=\vec{X}+\lambda\vec{\alpha}}$ も

$$\overset{\mathbf{M}\vec{\alpha}=\vec{0}}{\mathbf{M}\left(\vec{X}+\lambda\vec{\alpha}\right)} = \mathbf{M}\vec{X} = \vec{A} \tag{4.3}$$

となって解になる（λ は任意の定数）」を意味する（解がユニークに決まらない）。

ここで、「**階数 (rank)**」という数字を以下のように定義する。

定義 12: 階数（rank）

行列を $\begin{bmatrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 & \cdots & \vec{M}_N \end{bmatrix}$ のように N 本の列ベクトルと考えたとき、この列ベクトルのうち独立なベクトルの本数を「階数」と呼ぶ[†2]。行列 $\mathbf{M}$ の階数を $\operatorname{rank}\mathbf{M}$ と書く。

後でわかるが、この定義を「行ベクトルのうち独立なベクトルの本数」にしても同じである。
→ p73

行列は階数が大きいほど多い情報を含んでいる。$N \times N$ 行列では階数は最大で N 最小で 0 である[†3]。$\mathbf{M}$ の階数を r とすれば、$\{\vec{M}_*\}$ は r 本の独立なベクトルを含み、$\boxed{\mathbf{M}\vec{\alpha}^{(k)}=\vec{0}}$ を満たすベクトルが $N-r$ 本ある（$k=1,2,\cdots,N-r$）。この r（独立なベクトルの本数）を求めるのに使えるのが以下で説明する「基本変形」である。

4.2 行列の基本変形

4.2.1 行に対する操作

ここでせっかく行列を使う手法を考えたのだから、この問題を簡単にするにはどうすればよいかを考えていこう。行列ではなく式で考えていたときを思い出す。

$$\text{第 1 行}: \quad M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + \cdots + M_{1N}x_N = A_1 \tag{4.4}$$

$$\text{第 2 行}: \quad M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + \cdots + M_{2N}x_N = A_2 \tag{4.5}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\text{第 } M \text{ 行}: \quad M_{M1}x_1 + M_{M2}x_2 + \cdots + M_{MN}x_N = A_M \tag{4.6}$$

という式を短く表現したのが $\boxed{\mathbf{M}\vec{x}=\vec{A}}$ である（ここでは行列が $M \times N$ の場合を考える）。

我々は「方程式の持っている情報を失わないようにしつつ、式を簡単にする」ことを目標にする。「情報を失わない」とはつまり「計算している間に最初とは違う式を解いているという事態を避ける」である。失いたくない情報が何かによって我々が行える「変形」の範囲が変わってくる。

[†2] $\operatorname{rank}\mathbf{M}$ は「らんく・えむ」のように読む。

[†3] 階数 0 の行列とは、零行列。$\vec{0}$ だけで構成されているので独立なベクトルは 1 本もない。

ここで $\vec{x}$ を求めようと計算するとき、「この式を足したり引いたり定数倍したりする」あるいは「変数を $\vec{x}$ から別の変数に変える」のような操作を行った。その「操作」を行列で表現しよう。まず元の式に左から、逆行列が存在する正方行列 $\mathcal{L}$ を掛けて

$$\underbrace{\boxed{\mathcal{L}}}_{M\times M}\underbrace{\boxed{\mathbf{M}}}_{M\times N}\underbrace{\boxed{\vec{x}}}_{N\times 1}=\underbrace{\boxed{\mathcal{L}}}_{M\times M}\underbrace{\boxed{\vec{A}}}_{M\times 1} \tag{4.7}$$

とする。行列の掛け算の結果 $\mathcal{L}\mathbf{M}$ が簡単になれば、目標に一歩近づく。

ここで、$\mathcal{L}$ の逆行列の存在—この (4.7) を元の$\underset{\to\ \text{p64}}{(4.1)}$に戻すことができる条件—が重要である。戻せないとしたら、それは式が持っていた情報を失ってしまったことになる。

4.2.2　列に対する操作

もう一つの簡単化の手法として、$\boxed{\vec{x}=\mathcal{R}\vec{X}}$で定義される新しい変数を使うという方法がある（この $\mathcal{R}$ も逆行列が存在する正方行列)。すると$\boxed{\vec{X}=\mathcal{R}^{-1}\vec{x}}$になるので、

$$\underbrace{\boxed{\mathbf{M}}}_{M\times N}\underbrace{\boxed{\mathcal{R}}}_{N\times N}\overbrace{\underbrace{\boxed{\mathcal{R}^{-1}}}_{N\times N}\underbrace{\boxed{\vec{x}}}_{N\times 1}}^{\vec{X}}=\underbrace{\boxed{\vec{A}}}_{M\times 1} \tag{4.8}$$

に変わる。実はここでやっていることは$\boxed{\mathbf{M}\underbrace{\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}}_{\mathbf{I}}\vec{x}=\vec{A}}$のように、元の式の途中に単位行列を挟んだだけである。

この計算で行列の掛け算の結果 $\mathbf{M}\mathcal{R}$ が簡単になっていれば、目標に一歩近づいた。こうして、我々は問題を

$$\underbrace{\boxed{\mathcal{L}}}_{M\times M}\underbrace{\boxed{\mathbf{M}}}_{M\times N}\underbrace{\boxed{\mathcal{R}}}_{N\times N}\overbrace{\underbrace{\boxed{\mathcal{R}^{-1}}}_{N\times N}\underbrace{\boxed{\vec{x}}}_{N\times 1}}^{\vec{X}}=\underbrace{\boxed{\mathcal{L}}}_{M\times M}\underbrace{\boxed{\vec{A}}}_{M\times 1} \tag{4.9}$$

という問題に変えることができた。後は「$\mathcal{L}\mathbf{M}\mathcal{R}$ を簡単にする」方法を考える。

以下で我々は $\mathcal{L},\mathcal{R}$ を「基本変形」の組合せで表現するのだが、その基本変形の組合せを使うと、$\mathbf{M}$ が逆行列を持つならば必ず、$\mathcal{L}\mathbf{M}\mathcal{R}$ が単位行列になるようにできる。それができれば上の式は$\boxed{\mathcal{R}^{-1}\vec{x}=\mathcal{L}\vec{A}}$となり、両辺に $\mathcal{R}$ を掛けると$\boxed{\vec{x}=\mathcal{R}\mathcal{L}\vec{A}}$のように $\vec{x}$ が求められる（つまりは$\boxed{\mathcal{R}\mathcal{L}=\mathbf{M}^{-1}}$なのだ)。

4.2.3　基本変形

我々の目標である「簡単な行列による表現」を得るためには、以下で示す「基本変形」の組合せで $\mathcal{L},\mathcal{R}$ を表せば十分である。

$\mathcal{L}$ で表現された変形の方は、の組合せで表現する。

操作 1：行基本変形

(1)ある行に別の行の定数倍を足す。
(2)ある行と別の行を交換する。
(3)ある行を定数倍する（0 倍を除く)。

「行基本変形」は（左から行列を掛ける変形だから）「左基本変形」と呼ぶ場合もある。行基本変形は、方程式を定数倍したり線形結合を取ったりしているだけなので、方程式の持つ情報を不変にする。

$\mathcal{R}$ による変形は、

操作 2： 列基本変形

(1)ある列に別の列の定数倍を足す。
(2)ある列と別の列を交換する。
(3)ある列を定数倍する（0 倍を除く）。

の組合せで表現できる。

「列基本変形」は「右基本変形」と呼ぶ場合もある。列基本変形は、「変数を変更する変形」である。

これらは **結果 22** の「行列式を不変にする変形」に似ている[†4]。ただし、上の操作の (2) と (3) は行列式は変える。

→ p53

列基本変形と行基本変形は、行列式を変えてもよい分だけ、「行列式を不変にする変形」よりも範囲が広い。

4.2.4　基本変形の行列による表現

さいわい、行基本変形と列基本変形は同じ行列で表現可能である。まず、$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda)$ という行列[†5]を

$$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda) \equiv \mathbf{I} + \underbrace{\begin{array}{cc} & j\text{ 列} \\ i\text{ 行} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}}_{i\text{ 行 }j\text{ 列成分以外は }0} \tag{4.10}$$

のように定義しよう。これを右から掛けると

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_i & \cdots & \vec{v}_j & \cdots & \vec{v}_N \end{bmatrix} \left(\mathbf{I} + \underbrace{\begin{array}{cc} & j\text{ 列} \\ i\text{ 行} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}}_{i\text{ 行 }j\text{ 列成分以外は }0} \right) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_i & \cdots & \vec{v}_j + \lambda\vec{v}_i & \cdots & \vec{v}_N \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

となる。つまり $\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda)$ は「右から掛けると、j 列めに i 列めの λ 倍を足すという作用をする」行列である（上の式は $i<j$ の場合だが、$j<i$ でも同様）。

左から掛けると

$$\left(\mathbf{I} + \underbrace{\begin{array}{cc} & j\text{ 列} \\ i\text{ 行} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}}_{i\text{ 行 }j\text{ 列成分以外は }0} \right) \begin{bmatrix} (\vec{w}_1)^\top \\ \vdots \\ (\vec{w}_i)^\top \\ \vdots \\ (\vec{w}_j)^\top \\ \vdots \\ (\vec{w}_M)^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\quad \vec{w}_1 \quad)^\top \\ \vdots \\ (\vec{w}_i + \lambda\vec{w}_j)^\top \\ \vdots \\ (\quad \vec{w}_j \quad)^\top \\ \vdots \\ (\quad \vec{w}_M \quad)^\top \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

になる。つまり $\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda)$ は「左から掛けると、i 行めに j 行めの λ 倍を足すという作用をする」行列である（上の式は $i<j$ の場合だが、$j<i$ でも同様）。

「ピンと来ない」という人は 3×3 あたりで実例を作ってみよう（自分で手で計算して納得することは重要！）。

$\mathbf{T}_{\mathbf{1}\to\mathbf{3}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は、$\left\{ \begin{array}{l} \text{右から掛けると 3 列めに 1 列めの} \\ \text{左から掛けると 1 行めに 3 行めの} \end{array} \right.$ λ 倍を足す行列である。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} + \lambda A_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} + \lambda A_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + \lambda A_{31} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

[†4] (1) の組合せで (2) が実現するのも同じである。

[†5] 同じ T を使うが、「定数倍を足す」行列は添字を $i\to j$ に、「交換する」行列は添字を $i\leftrightarrow j$ に、「定数倍する」行列は添字を一つ i にすることで区別する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + \lambda A_{31} & A_{12} + \lambda A_{32} & A_{13} + \lambda A_{33} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

と計算してみると、確かにそうなっている。

容易に確認できるが、$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda)$ には逆行列がある（$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(-\lambda)$ である）。

これもピンと来ないという人は、$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を計算しよう。

次に、以下の行列が「行または列を交換する」操作を表現する行列である。

$$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\leftrightarrow\mathbf{j}} \equiv \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & & i\text{ 列め} & & j\text{ 列め} & \\ \hline & \mathbf{I}_{\mathbf{i-1}} & & & & \\ \hline i\text{ 行め} & & & & 1 & \\ \hline & & & \mathbf{I}_{\mathbf{j-i-1}} & & \\ \hline j\text{ 行め} & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \mathbf{I}_{\mathbf{N-j}} \end{array} \tag{4.15}$$

表記のない部分の成分は 0

3 × 3 の実例は、$\boxed{\mathbf{T}_{\mathbf{1}\leftrightarrow\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ で、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

となって、左から掛けると行を入れ替え、右から掛けると列を入れ替える。

$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\leftrightarrow\mathbf{j}}$ の逆行列は自分自身である。
最後に、「行または列を定数倍する」を表現するのが以下の行列である。

$$\mathbf{T}_{i}(\lambda) \equiv \begin{array}{c|c|c|c} & & i\text{ 列め} & \\ \hline & \mathbf{I}_{\mathbf{i-1}} & & \\ \hline i\text{ 行め} & & \lambda & \\ \hline & & & \mathbf{I}_{N-\mathbf{i}} \end{array} \tag{4.18}$$

表記のない部分の成分は 0

3 × 3 の実例は、

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}^{\mathbf{T}_{\mathbf{3}}(\lambda)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \lambda A_{31} & \lambda A_{32} & \lambda A_{33} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \lambda A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & \lambda A_{33} \\ A_{32} & A_{31} & \lambda A_{33} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

となって、左から掛けると行を定数倍し、右から掛けると列を定数倍する。

$\mathbf{T}_{i}(\lambda)$ の逆行列は $\mathbf{T}_{i}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ である。

【問い 4-3】行列式を不変にする変形 **結果 22** → p53 を表す行列を作ってみよ。これらの行列の行列式が 1 であることを確認せよ。解答 → p143 へ

4.3 基本変形による行列の簡略化

4.3.1 行列の簡略化の方法

以上で考えた基本変形を以下のようにして次々と行う。

操作 3： 行・列基本変形を使って行列を可能な限り簡単にする

$\left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \hline A_{21} & & \\ \vdots & & \end{array}\right]$ のように、1 行めと 1 列めを分けて考える。

(1)A_{11} が 0 でなかったら、行と列を適当に交換して 0 でないようにする。行列の全成分が 0 ならそれはできないが、それなら「行列を簡単にする」という目標はすでに達成されているので、ここで終了する。

(2)第 1 行を $-\dfrac{A_{i1}}{A_{11}}$ したものを第 i 行に足す。第 1 列を $-\dfrac{A_{1i}}{A_{11}}$ 倍したものを第 j 列に足す。

(3)第 1 行を A_{11} で割る。

(4)残った $(M-1)\times(N-1)$ 行列の部分について、(1) からの操作を繰り返す。

$$\left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \hline A_{21} & & \\ \vdots & & \end{array}\right] \xrightarrow{\text{操作 (2)}} \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & 0 & \cdots \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & \end{array}\right] \xrightarrow{\text{操作 (3)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & \end{array}\right] \tag{4.21}$$

のように操作していくが、最後の行または列までやりきるか、残りが零行列になると終わるので、最終結果は

$$\begin{array}{c|cccc|ccc} & \multicolumn{4}{c|}{r\text{ 列}} & \multicolumn{3}{c}{N-r\text{ 列}} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r\text{ 行} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M-r\text{ 行} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r,N-r,r} \\ \hline \mathbf{0}_{M-r,r} & \mathbf{0}_{M-r,N-r} \end{array}\right]}_{\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}} \tag{4.22}$$

になる。つまり基本変形を繰り返すことで行列を「単位行列の部分」と「成分が 0 の領域」を持った行列に直せる[†6]。

この形にするまでに列基本変形（変数の取替）も行っているならば、問題が

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r,N-r,r} \\ \hdashline \mathbf{0}_{M-r,r} & \mathbf{0}_{M-r,N-r} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \vec{X}_1 \\ \hline \vec{X}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vec{A}'_1 \\ \hdashline \vec{A}'_2 \end{array}\right] \tag{4.23}$$

のように変わった。ただし、$M-r$ や $N-r$ は 0 になることもある（そのときは上の行列の該当する区画が存在しない）。$\boxed{M=N=r}$ が成り立つ場合は、結果は単位行列である。

この式はつまり $\boxed{\vec{X}_1=\vec{A}'_1}$ と $\boxed{\vec{0}=\vec{A}'_2}$ を意味する。もし計算の結果である $\vec{A}'_2$ が $\vec{0}$ でないのなら、この方程式には解がない。首尾よく $\boxed{\vec{0}=\vec{A}'_2}$ が成り立っていたなら、$\boxed{\vec{X}_1=\vec{A}'_1}$ で、$\vec{X}_2$ は任意（どんなベクトルでも方程式が成立してしまう）となる。

[†6] 最終結果の行列を $\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}$ という記号で表現することにしよう。この記号の意味は「$M\times N$ 行列で、そのうち $r\times r$ の部分が単位行列で、残りは全部 0」である。

昔から連立方程式を解いてきた経験からして「変数の数と式の数が一致すれば問題は解ける」ことを知っていると思う。方程式の集まりを $\boxed{\underbrace{\mathbf{M}}_{M\times N}\underbrace{\vec{x}}_{N\times 1}=\underbrace{\vec{A}}_{M\times 1}}$ と書いた場合、変数が N 個に対してその変数を決めるための式を M 本与えている。では $\boxed{M=N}$ なら解けるかというとそうではなく、たとえ行列が $N\times N$ でも、階数 r が N より少ない場合は解がなくなったり逆に任意な部分ができたりすることがある。これは「式が M 本あるように見えても、独立でない式が紛れ込んでいると使える式はその分少ない（本当は使える式は r 本しかない）」と考えればよい。

こんなこと（式の数と変数の数が一致しない）は物理に現れるのか？ —というと、たとえば電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式はその例である。Maxwell 方程式の変数は（簡単のため真空中で考えると）電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ で合計 6 個である[†7] が、方程式は $\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E}=0,\mathrm{div}\ \vec{B}=0,\mathrm{rot}\ \vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\mathrm{rot}\ \vec{B}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ の 8 本である（後ろの二つはベクトルの式なので 3 本と数える）。実はこの 8 本の方程式は独立ではない。

Maxwell 方程式には「ベクトルポテンシャル A_μ で書いたバージョン」もあるが、その場合は変数と式の数はどちらも 4 で一致している。ところがこの場合の「行列」（微分演算子を含むので単純な行列ではないが）の階数が 3 であるため、変数である A_μ の一部が決まらず任意になる（これが「ゲージ不変性」であり、現代物理では非常に重要な概念である）。

4.3.2 基本変形による簡略化の唯一性

$\mathbf{I}^{(\mathbf{r})}_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ にたどり着く計算方法は一つではないが、どの方法を使っても最後は同じ行列にたどり着く。

つまり、$\boxed{\mathcal{L}\neq\mathcal{L}',\mathcal{R}\neq\mathcal{R}'}$ である行列に対して

$$\underbrace{\mathcal{L}}_{M\times M}\underbrace{\mathbf{M}}_{M\times N}\underbrace{\mathcal{R}}_{N\times N}=\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)}_{\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}}$$

$$\text{すなわち}\quad \mathcal{L}\mathbf{M}\mathcal{R}=\mathbf{I}^{(r)}_{M,N} \tag{4.24}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}'}_{M\times M}\underbrace{\mathbf{M}}_{M\times N}\underbrace{\mathcal{R}'}_{N\times N}=\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_{r'} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)}_{\mathbf{I}^{(r')}_{M,N}}$$

$$\text{すなわち}\quad \mathcal{L}'\mathbf{M}\mathcal{R}'=\mathbf{I}^{(r')}_{M,N} \tag{4.25}$$

が共に成り立つならば、$\boxed{r=r'}$ である。これは以下のようにして証明される。

もしこの二つが同時に成り立つならば、$\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}$ と $\mathbf{I}^{(r')}_{M,N}$ が基本変形でつながる。

具体的には、上の関係から $\boxed{\mathbf{M}=\mathcal{L}^{-1}\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}\mathcal{R}^{-1}}$ が言えるので、

$$\underbrace{\mathcal{L}'}_{M\times M}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}}_{M\times M}\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)}_{\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}}\underbrace{\mathcal{R}^{-1}}_{N\times N}\underbrace{\mathcal{R}'}_{N\times N}=\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_{r'} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right)}_{\mathbf{I}^{(r')}_{M,N}} \tag{4.26}$$

[†7] 厳密には空間の各点々々に $\vec{E},\vec{B}$ はいるので、変数の数は $6\times\infty$ である。また、方程式は微分を含むので単純に行列のように考えるわけにはいかない。ここでの話は雰囲気だけをつかんでおいてほしい。

すなわち

$$\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-\mathbf{1}}\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}\mathcal{R}^{-\mathbf{1}}\mathcal{R}' = \mathbf{I}^{(r')}_{M,N} \tag{4.27}$$

である。$\boxed{r < r'}$ と仮定しよう（後で $\boxed{r = r'}$ だとわかるのだが）。$\boxed{r' < r}$ の場合は以下の逆をやればよい。

ここで、

$$\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{C} & \mathcal{D}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{array}{c|c}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D}\end{array}}, \qquad \mathcal{R}^{-\mathbf{1}}\mathcal{R}' = \begin{bmatrix}\mathcal{E} & \mathcal{F}\\ \mathcal{G} & \mathcal{H}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{array}{c|c}\mathcal{E} & \mathcal{F}\\ \hline \mathcal{G} & \mathcal{H}\end{array}} \tag{4.28}$$

のように二つの行列を r 行と r 列の部分を切り出して四つに分けて表現すると、

$$\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-\mathbf{1}}\mathbf{I}^{(r)}_{M,N}\mathcal{R}^{-\mathbf{1}}\mathcal{R}' = \begin{bmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{C} & \mathcal{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{r'} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{E} & \mathcal{F}\\ \mathcal{G} & \mathcal{H}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{A} & 0\\ \mathcal{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{E} & \mathcal{F}\\ \mathcal{G} & \mathcal{H}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{AE} & \mathcal{AF}\\ \mathcal{CE} & \mathcal{CF}\end{bmatrix} \tag{4.29}$$

となるが、この結果は $\mathbf{I}^{(r')}_{M,N}$ であり $\boxed{r < r'}$ と仮定していたから、$\mathcal{CF}$ の部分まで「1」がはみ出している。

以上から、

$$\begin{array}{ll|ll}\mathcal{AE} = & \mathbf{I}_r & \mathcal{AF} = & \mathbf{0}_{r,N-r}\\ \hline \mathcal{CE} = & \mathbf{0}_{M-r,r} & \mathcal{CF} = & \mathbf{I}^{(r'-r)}_{M-r,N-r}\end{array} \tag{4.30}$$

という四つの式が出てくる。左上の部分から、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{E}$ は互いの逆行列になっている。この二つの行列に逆行列が存在するので、$\boxed{\mathcal{CE} = \mathbf{0}_{M-r,r}}$ から $\boxed{\mathcal{C} = \mathbf{0}_{M-r,r}}$ が言え、$\boxed{\mathcal{AF} = \mathbf{0}_{r,N-r}}$ から $\boxed{\mathcal{F} = \mathbf{0}_{r,N-r}}$ が言える。それはすなわち $\boxed{\mathcal{CF} = \mathbf{0}_{M-r,N-r}}$ であるが、上の式から $\mathcal{CF}$ は $\mathbf{I}^{(r'-r)}_{M-r,N-r}$ と一致しなくてはいけないから、$\boxed{r = r'}$ でなくてはいけない。

こうして r という数字（$\underset{\to\ \text{p65}}{\text{rank}}$）は行列が決まれば一つに決まる数であることがわかった。よってこの「独立なベクトルの本数」を行列の関数と考えて $\text{rank}\,\mathbf{M}$ のように書くわけである。

4.4　行基本変形だけによる変形

さて、ここまででやったことは

$$\mathbf{M}\vec{x} = \vec{A} \quad \text{（基本変形を繰り返して）} \quad \underbrace{\mathcal{L}\mathbf{M}\mathcal{R}}_{\mathbf{I}^{(r)}_{r,r}}\underbrace{\mathcal{R}^{-\mathbf{1}}\vec{x}}_{\vec{X}} = \underbrace{\mathcal{L}\vec{A}}_{\vec{A}'} \tag{4.31}$$

という操作である。

4.4.1　行基本変形だけでどこまで簡略化できるか

列基本変形を行うと「変数の取り直し」が起こる。それが嫌な場合（変数の変更は避けたい場合）に、行基本変形だけでできる限り行列を簡単にする操作は以下の通りである。

操作 4：行基本変形を使って行列を可能な限り簡単にする

(1)行列が $\begin{bmatrix}0 & A_{12} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & A_{M2} & \cdots\end{bmatrix}$ のように、1 列めがすべて 0 なら、1 列めを取り除いた部分について考えることにする。取り除いた結果行列がなくなれば、(6) へ進む。

(2)(1) をやったので、今考えている行列は 1 列目の成分 A_{*1} がすべて 0 であることはない。A_{11} が 0 でなかったら、行を適当に交換して 0 でないようにする（以下で「A_{11} で割る」操作ができるように）。

(3)第 1 行を $-\dfrac{A_{i1}}{A_{11}}$ したものを第 i 行に足す。

(4)第1行を A_{11} で割る。これで $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & * & \cdots \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & \end{array}\right]$ の形になるから、1行目と1列目を取り除く。

(5)取り除いた結果行列がなくなれば、(6) へと進む。なくならないなら、残った行列の部分について、(1) からの操作を繰り返す。

(6)最後の列までやり終わると、行列は以下に示す形になる。

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(7)各列の一番下が1になっている行については、その行の定数倍を上の行に足すことで、そこより上の成分を0にできる。上の例の場合、結果は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & \cdots & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

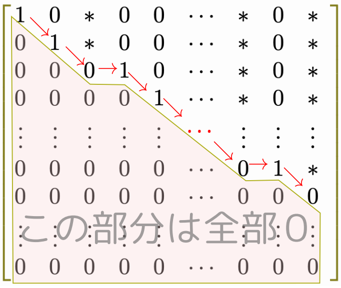
(6) の段階の行列について少し説明を加えておくと、この行列は以下の性質を持つ行列になっている。

(1)(1,1) 成分にまず着目する。

(2)着目成分と同じ列の、それより下の成分は全て0である。

(3)着目成分が1なら、その列のそれより上の成分も0である。このときは次に右斜下へ着目点を移す $\boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & \searrow \end{matrix}}$。着目成分が0なら、右へ着目点を移す $\boxed{0 \longrightarrow}$。

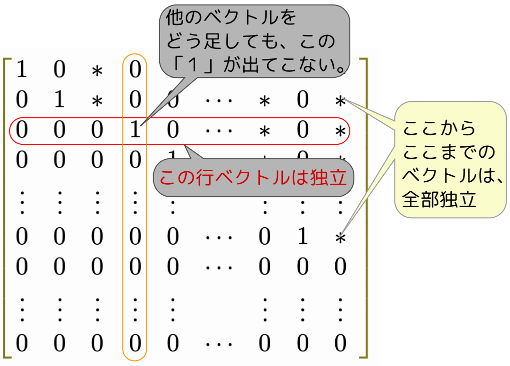
(4)行列の端に達するまで、(2),(3) を繰り返す。



この結果を見ると、行基本変形だけを使うことで、行列を構成するベクトルのうち何本かを $\vec{0}$ にできる可能性がある。我々の目的の一つは「行ベクトルのうち何本が独立か？」を見極めることにあった。$\vec{0}$ はもちろん「独立なベクトル」から外れる。では残ったベクトルはすべて独立だろうか？ —「他のベクトルを足してこのベクトルは作れるか？」と問うことでその結果がわかる。

今やった行基本変形の結果の行ベクトルを見ると、左から見ていって最初に「1」が現れる列で、0でないベクトルはそれ自身しかない。ということは他のベクトルのどんな線形結合を作っても、このベクトルはできない。

よって、上の手順の中で着目成分をたどっていった中にあった「1」の個数が独立な行ベクトルの数であり、つまりは階数である。同時に階数は、列ベクトルのうち、零ベクトルになったベクトルを除いたものの数に等しい。



こうして、行基本変形を使って「独立な行ベクトルの数」を数える

方法がわかった。

4.4.2　独立な行ベクトルの数と独立な列ベクトルの数

前項で行った「行基本変形による簡略化」と同様に「列基本変形による簡略化」が実行できる（すべて行と列を転置して同じ操作を行えばよい）。よって、列基本変形を使って「独立な列ベクトルの数」も数えられる。

この二つの数が等しいことはすぐにわかる。我々は同じ行列から出発して

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{M} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列基本変形}} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{4.32}$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{M} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列基本変形}} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{r'} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{4.33}$$

という 2 種類の経路をたどって行列を簡略化できることを知った。この二つの結果が同じでなかったら、前に示した「基本変形の結果は途中経過によらない」に反するから、$\boxed{r = r'}$ でなくてはいけないので、

結果 31: 独立な行ベクトルと列ベクトルの数

$$\operatorname{rank}\mathbf{M} = \boxed{\begin{array}{l}\text{行列 }\mathbf{M}\text{ に含まれる行ベクトル}\\ \text{のうち、独立なものの本数}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{行列 }\mathbf{M}\text{ に含まれる列ベクトル}\\ \text{のうち、独立なものの本数}\end{array}} \tag{4.34}$$

が任意の行列に対して言える。この数を行列の$\underset{\to\ \text{p65}}{\text{階数}}$と呼び、$\operatorname{rank}\mathbf{M}$ で表現する。

ここまで考えてきたことから、以下が言える。

結果 32: 階数最大の行列

$N \times N$ 行列の階数が N に等しい[†8]とき、この行列は行基本変形だけで（あるいは、列基本変形だけで）単位行列に変形できる。また、この行列は逆行列を持つ。逆に階数が N より小さいと、逆行列は存在しない。

階数が N のときは上で考えた「着目点」に「1」だけが並ぶから、単位行列にできることはすぐわかる。逆行列を持つことは後で逆行列を求める計算方法をやるので、そこで確実にわかるだろうが、ここまでの段階でも、「$N \times N$ 行列の階数が N ならその行列を掛けることで情報を失われない」ことは納得できる。

4.5　行基本変形だけを使って方程式を解く

ここで $\mathcal{R}$ による列基本変形は使わなかったとすると、

$$\mathbf{M}\vec{x} = \vec{A}\ \text{（行基本変形を繰り返して}\longrightarrow\text{）}\ \mathcal{L}\mathbf{M}\vec{x} = \mathcal{L}\vec{A} \tag{4.35}$$

のように、$\mathbf{M}$ にも $\vec{A}$ にも「左から $\mathcal{L}$ を掛ける」操作を行った。そこで、

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{M1} & M_{M2} & \cdots & M_{MN} \end{array}\right.}_{\mathbf{M}\text{ の部分}} \overbrace{\underbrace{\left|\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_M \end{array}\right]}_{\vec{A}\text{の部分}}}^{\text{追加した列}} \tag{4.36}$$

アプリのリンク

この節の計算方法で方程式を解く方法

のような「係数拡大行列」を作ってこれに行基本変形を行っていけば、「$\boxed{\mathbf{M}\vec{x} = \vec{A}}$ から $\boxed{\mathcal{L}\mathbf{M}\vec{x} = \mathcal{L}\vec{A}}$ へ」という変形を係数拡大行列に $\mathcal{L}$ を掛けるという一つの動作で表現できる。

[†8] $N \times N$ 行列の階数が N のとき、「この行列は full rank だ」という言い方をする。

「行列 $\mathcal{L}$ を掛ける」という動作は結局「行基本変形する（およびその繰り返し)」操作だから、まじめに行列計算をしなくても基本変形を繰り返せばいいのである。

たとえば

$$
\begin{aligned}
x-3z&=2 &\quad(4.37)\\
-4x+2y+4z&=4 &\quad(4.38)\\
4x+3y-2z&=4 &\quad(4.39)
\end{aligned}
$$

という連立方程式の係数拡大行列 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&2\\-4&2&4&4\\4&3&-2&4\end{array}\right]$ は、行基本変形だけを使うと $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{array}\right]$ に変形でき、$\boxed{x=-1,y=2,z=-1}$ と答えが決まる。

しかし、いつも単位行列にできるとは限らない（階数が 3 より小さい場合が有り得る)。たとえば係数拡大行列 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&2\\2&6&1&4\\3&9&-5&4\end{array}\right]$ は、行基本変形を使って $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\end{array}\right]$ に変形できる。これは方程式が

$$
\begin{aligned}
x+3y-z&=2\\
2x+6y+z&=4\\
3x+9y-5z&=4
\end{aligned}
\quad\rightarrow\quad
\begin{aligned}
x+3y&=2\\
z&=0\\
0&=-2
\end{aligned}
\qquad(4.40)
$$

になった、ということである。最後の式 $\boxed{0=-2}$ は絶対に成立しないから、この方程式は「解なし」である。

ちょっと定数を変えて $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&2\\2&6&1&7\\3&9&-5&4\end{array}\right]$ にすると結果は $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$ になる。この場合は結果の方程式が

$$
x+3y=3,\quad z=1,\quad 0=0 \qquad(4.41)
$$

となる。最後の式は $\boxed{0=0}$ という当たり前の式となる。$\boxed{z=1}$ と決まったが、x,y は $\boxed{x+3y=3}$ を満たすペアならなんでもよい（一つに決まらない)。3 × 3 行列なのに階数が 2 であることは、このように「答えがちゃんと決まらない」ことを示しているのである。

4.6 クラメルの公式

ここまでの話から

結果 33: 線形方程式の解

線形方程式を $\boxed{\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}}$ のように書いたとき、

$\boxed{\det\mathbf{A}\neq 0}$ のとき　方程式はユニーク[†9] な解を持つ。

$\boxed{\det\mathbf{A}=0}$ のとき　方程式は無限個の解を持つか、解を持たないかのどちらかとなる。

がわかった。ユニークな解がある場合、逆行列が存在しているので $\boxed{\vec{x}=\mathbf{A}^{-1}\vec{b}}$ という計算を行えば $\vec{x}$ が計算できるわけだが、少し違う道筋で $\vec{x}$ を求める方法を以下で示そう。

$\boxed{\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}}$ という式は

$$
\begin{bmatrix}\boxed{\vec{A}_1} & \boxed{\vec{A}_2} & \cdots & \boxed{\vec{A}_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix} \qquad(4.42)
$$

と書くことができる。この式は

$$
x_1\vec{A}_1+x_2\vec{A}_2+\cdots x_n\vec{A}_n=\vec{b} \qquad(4.43)
$$

[†9] 日常用語では「ユニーク」が「おもしろい」という意味合いを含むことが多いが、数学の文脈での「ユニーク」には「一つしかない」という意味しかない。

のように列ベクトル $\{\vec{A}_*\}$ の線形結合（係数 $\{x_*\}$）が $\vec{b}$ になる、という式だと考えることができる。この式 (4.43) に、「$\tilde{A}_i$ とのみ直交しないベクトル $\vec{w}^i$」を前から掛けてやれば x_i を含む項以外は消え去るので、x_i が求められる。そのベクトル $\vec{w}^i$ は余因子で作ることができる。**結果 30** → p62 を使うことで、

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\tilde{A}_{i1} & \tilde{A}_{i2} & \cdots & \tilde{A}_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\vec{A}_1} & \boxed{\vec{A}_2} & \cdots & \boxed{\vec{A}_n}\end{bmatrix}}^{(\det\mathbf{A})\mathbf{I}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{i1} & \tilde{A}_{i2} & \cdots & \tilde{A}_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{A}\,x_i=\sum_j \tilde{A}_{ij}b_j \tag{4.44}$$

となって、$\boxed{x_i=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\sum_j \tilde{A}_{ij}b_j}$ と求められる。(4.44) の右辺の $\sum_j \tilde{A}_{ij}b_j$ という量は

$$\det\begin{bmatrix}\boxed{\vec{A}_1} & \boxed{\vec{A}_2} & \cdots & \underbrace{\boxed{\vec{b}}}_{\substack{\vec{A}_i\text{の}\\\text{あった位置}}} & \cdots & \boxed{\vec{A}_n}\end{bmatrix} \tag{4.45}$$

である。$\sum_j \tilde{A}_{ij}A_{ji}$ ならば $\det A$ であることを思いせば、まさにこの量が「行列式に現れる $A_{ji}\to b_j$ と置き換えた量」となっていることが納得できる。

結果 34: クラメルの公式

$\boxed{\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}}$ のように表現された連立 1 次方程式の解は以下の式で得られる。

$$x_i=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\det\begin{bmatrix}\boxed{\vec{A}_1} & \boxed{\vec{A}_2} & \cdots & \underbrace{\boxed{\vec{b}}}_{\substack{\vec{A}_i\text{の}\\\text{あった位置}}} & \cdots & \boxed{\vec{A}_n}\end{bmatrix} \tag{4.46}$$

4.7　正方行列の逆行列を求める

$\mathbf{M}$ にユニークな逆行列が存在する場合、行基本変形だけで $\mathbf{M}$ を単位行列に変形することができる。行基本変形の結果は $\mathcal{L}\mathbf{M}$ と書くことができるので、$\mathcal{L}$ が $\mathbf{M}$ の逆行列である。$\boxed{\mathcal{L}=\mathcal{L}\mathbf{I}}$ なので、「$\mathbf{M}$ に対して行なう行基本変形と同じ変形を $\mathbf{I}$ に対して行った結果が $\mathcal{L}$ だ」と考えることができる。

そこで、3×3 行列 $\mathbf{M}$ 右に単位行列を付け加えて 3×6 行列

$$\mathbf{M}_{拡大}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}a&b&c&1&0&0\\d&e&f&0&1&0\\g&h&i&0&0&1\end{array}\right]\tag{4.47}$$

$$\underbrace{\hphantom{a\quad b\quad c}}_{\mathbf{M}\text{ の部分}}$$

を作り、これに適切な行基本変形を繰り返せば

$$\mathcal{L}\mathbf{M}_{拡大}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&A&B&C\\0&1&0&D&E&F\\0&0&1&G&H&I\end{array}\right]\tag{4.48}$$

$$\underbrace{\hphantom{A\quad B\quad C}}_{\mathbf{M}^{-1}\text{の部分}}$$

アプリのリンク

この節の計算方法で逆行列を求める方法

にすることができる。もちろん任意の正則な $N \times N$ 行列でこの操作は可能である（正則でない、つまり逆行列がない場合は当然不可能である)。

例を一つ書いておく。

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\quad \Big\downarrow \left(\begin{array}{c} \text{1 行めの 2 倍を 2 行めに足し、} \\ \text{1 行めを 3 行めから引く} \end{array}\right) \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\quad \Big\downarrow \left(\begin{array}{c} \text{2 行めの 3 倍を 3 行めに足し、} \\ \text{2 行めを 1 行めから引く} \end{array}\right) \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \\
&\quad \Big\downarrow \left(\begin{array}{c} \text{3 行めの}\tfrac{1}{3}\text{倍を 1 行めに足し、} \\ \text{3 行めの}\tfrac{1}{2}\text{を 2 行めから引く} \end{array}\right) \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \\
&\quad \Big\downarrow \left(\text{3 行めを}\frac{1}{6}\text{倍する}\right) \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ ]0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

「どの操作をした結果 $\mathbf{M}$ が単位行列になったか」という情報が、右半分の（もともと単位行列だった）領域に書き込まれていくわけである。その操作を表現する行列こそが、$\mathbf{M}^{-1}$ である。

4.8 上三角行列の性質

行基本変形を使えば行列をかならず上三角行列にできることを上で説明した。上三角行列には面白く便利な性質がいくつかある。

結果 35: 上三角行列に関する定理

$N \times N$ 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ がそれぞれ対角成分が $(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{NN})$ と $(B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{NN})$ である上三角行列であるとき、

(1)スカラー倍 $\alpha\mathbf{A}$ はやはり上三角行列で、対角成分は
$(\alpha A_{11}, \alpha A_{22}, \cdots, \alpha A_{NN})$ である。

(2)和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ はやはり上三角行列で、対角成分は
$(A_{11}+B_{11}, A_{22}+B_{22}, \cdots, A_{NN}+B_{NN})$ である。

(3)積 $\mathbf{AB}$ はやはり上三角行列で、対角成分は
$(A_{11}B_{11}, A_{22}B_{22}, \cdots, A_{NN}B_{NN})$ である。

(4)上三角行列 $\mathbf{A}$ に逆行列が存在するならば、その行列も上三角行列であり、その対角成分は
$(\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}, \cdots, \frac{1}{A_{NN}})$ である。

(5)上三角行列の行列式は対角成分の積である。すなわち、$\boxed{\det \mathbf{A} = A_{11}A_{22}\cdots A_{NN}}$。

証明は簡単で、特に (1),(2) は自明である。

【問い 4-4】 上の定理のうち、(3) と (4) を証明せよ。 解答 → p143 へ

(5) の行列式については、$\boxed{\det \mathbf{A} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_N} \epsilon_{i_1, i_2, \cdots, i_N} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_N N}}$ **結果 24** → p57 を、上三角行列では $\boxed{i > j \text{ ならば } A_{ij} = 0}$ になることを考えて計算するとよい。たとえば i_1 に 1 でない数字が入ったとすると、Levi-Civita

のおかげで i_2 以降のどれかの i が 1 にならないとこの項は 0 になる。しかし、その項は $\boxed{i > j \text{ ならば } A_{ij} = 0}$ により 0 となる。よって $\boxed{i_1 = 1}$ の項のみが生き残る。同じ理由で $\boxed{i_2 = 2, i_3 = 3, \cdots}$ の項のみが生き残り、$\boxed{\det \mathbf{A} = A_{11}A_{22}\cdots A_{NN}}$ である。

4.9 演算子としての行列と交換関係

演算子の交換関係 → p35 は

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A}, \mathbf{C}] \tag{4.50}$$

を満たす（「前にある $\mathbf{B}$ は前に出す。後ろにある $\mathbf{C}$ は後ろに出す」ルールで計算する）。この式が成り立つことは、右辺を「ばらして」みると、

$$\overbrace{\mathbf{ABC} - \mathrlap{\underbrace{\phantom{\mathbf{BAC} + \mathbf{BAC}}}_{\text{相殺}}}\mathbf{BAC}}^{[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C}} + \overbrace{\mathbf{BAC} - \mathbf{BCA}}^{\mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}]} = \underbrace{\mathbf{ABC} - \mathbf{BCA}}_{[\mathbf{A},\mathbf{BC}]} \tag{4.51}$$

となる（結果は左辺をばらした式になっている）ことですぐにわかる。

$\boxed{\text{演算：} * \to [\mathbf{A}, *]}$ を「微分」と同等の演算だと考えると、(4.50) は微分におけるライプニッツ則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(BC) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B\right)C + B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C\right) \tag{4.52}$$

と同じ形をしている。

なぜ単なる掛け算 $\mathbf{AB}$ ではなく交換関係 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ が微分に対応するのかというと、演算子の関係を考えるときは常に「後ろの任意のベクトルがいる状況」で考えているからである。

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)f(x)) - A(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))}_{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, A(x)\right]f(x)} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right)f(x) \tag{4.53}$$

のように「後ろ（右）に任意の関数 $f(x)$ がいる」という状況を考えると、その状況においては

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, A(x)\right] \leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right) \tag{4.54}$$

と対応することがわかる。

よく使う交換関係に、$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = 1}$ というのがある。「x を掛けてから微分する」操作の結果と「微分してから x を掛ける」操作の結果の引き算を行うと「1 を掛ける（何もしない）」操作になる。

(4.50) と全く同様に

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\,\mathbf{B} \tag{4.55}$$

も成り立つ（前にある $\mathbf{A}$ は前に出す。後ろにある $\mathbf{B}$ は後ろに出す）。同様に、以下も成り立つ。

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BCD}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\,\mathbf{CD} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A}, \mathbf{C}]\,\mathbf{D} + \mathbf{BC}\,[\mathbf{A}, \mathbf{D}] \tag{4.56}$$

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{CD}] = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\,\mathbf{BD} + \mathbf{C}\,[\mathbf{A}, \mathbf{D}]\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,[\mathbf{B}, \mathbf{C}]\,\mathbf{D} + \mathbf{AC}\,[\mathbf{B}, \mathbf{D}] \tag{4.57}$$

(4.56) や (4.57) を示すのに、わざわざこれらの式の交換関係をばらす必要はない。(4.56) なら、$\mathbf{CD}$ を一塊にして

$$[\mathbf{A}, \underbrace{\mathbf{BCD}}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\,\underbrace{\mathbf{CD}} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A}, \underbrace{\mathbf{CD}}] \tag{4.58}$$

とした後、第 2 項に対して再び (4.50) を使う。交換関係は、可能な限り交換関係のまま計算する方が、計算量は減る。

(4.50) で $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}$ と取り替えた式を作って引いてやると、

$$\begin{array}{rrl} & [\mathbf{A},\mathbf{BC}] & = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}] \\ -) & [\mathbf{A},\mathbf{CB}] & = [\mathbf{A},\mathbf{C}]\,\mathbf{B} + \mathbf{C}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}] \\ \hline & \underbrace{[\mathbf{A},\mathbf{BC}-\mathbf{CB}]}_{[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]} & = \underbrace{[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C} - \mathbf{C}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]}_{[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}]} + \underbrace{\mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}] - [\mathbf{A},\mathbf{C}]\,\mathbf{B}}_{[\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{C}]]} \end{array} \tag{4.59}$$

という式ができる。項を左辺に集めて

$$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] - [[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}] - [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{C}]] = 0 \tag{4.60}$$

とする。交換関係の反対称性を使い → p26 サイクリック置換の形に並ぶよう順番を入れ替えて以下を得る。

結果 36: ヤコビ恒等式 (Jacobi identity)

$$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0 \tag{4.61}$$

ヤコビ恒等式は少し順番を変えて

$$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] - [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{C}]] = [[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}] \tag{4.62}$$

とすると少し違う意味が見えてくる。$[\mathbf{A},*]$ は $\mathbf{A}$ が微分演算子であれば「$*$ を微分する」に対応する演算になることは既に述べた → p77。その見方をすれば、ヤコビ恒等式は

$$\underbrace{[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]}_{\substack{B\ \text{微分してから} \\ A\ \text{微分する}}} - \underbrace{[\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{C}]]}_{\substack{A\ \text{微分してから} \\ B\ \text{微分する}}} = \underbrace{[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}]}_{[A,B]\ \text{微分する}} \tag{4.63}$$

となる。この式の意味するところは「A 微分」と「B 微分」の交換関係は $[A,B]$ 微分になる、ということである。

$\mathbf{A}$ が $\mathbf{L}_x$ で $\mathbf{B}$ が $\mathbf{L}_y$ である場合、

$$\underbrace{[\mathbf{L}_x,[\mathbf{L}_y,\mathbf{C}]]}_{\substack{y\ \text{回転してから} \\ x\ \text{回転する}}} - \underbrace{[\mathbf{L}_y,[\mathbf{L}_x,\mathbf{C}]]}_{\substack{x\ \text{回転してから} \\ y\ \text{回転する}}} = \underbrace{[\underbrace{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}_{\mathbf{iL}_z},\mathbf{C}]}_{z\ \text{回転する}} \tag{4.64}$$

となる。つまり、$\begin{cases} x\ \text{軸回りに微小回転してから}\ y\ \text{軸回りに微小回転する。} \\ y\ \text{軸回りに微小回転してから}\ x\ \text{軸回りに微小回転する。} \end{cases}$ の二つの結果は同じではない。が、その違いは z 軸回りに微小回転することで補正できる。

4.10　章末演習問題

★【演習問題 4-1】

行列の積の階数は、それぞれの行列の階数以下であること、すなわち

$$\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) \leq \mathrm{rank}\,\mathbf{A} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{rank}(\mathbf{AB}) \leq \mathrm{rank}\,\mathbf{B} \tag{4.65}$$

を示せ。

ヒント → p148 へ　解答 → p150 へ

★【演習問題 4-2】

行列をブロック分けして $\boxed{\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}$ と表したとする。$\boxed{\det \mathbf{A} \neq 0}$ であれば、

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det\left(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) \tag{4.66}$$

であることを示せ。

ヒント → p148 へ　解答 → p150 へ

第 5 章　内積と直交基底・相似変換

5.1　内積の公理

5.1.1　内積の公理: 実ベクトル

定義 13: 実ベクトル空間の内積の公理

(1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$

(2) $\mathbf{x}\cdot(\lambda_1\mathbf{y}_1+\lambda_2\mathbf{y}_2)=\lambda_1\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1+\lambda_2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2$

(3) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$

(4) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$ になるのは、$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のときに限る。

この章では「内積」を抽象化して考え[†1]、右の公理を満たす演算を「内積」と呼ぶ。これらは、通常のベクトルの内積に関してはもちろん成り立つ。

(1) は内積の交換法則である。(2) は内積の双線形性 → p17 の片方である（もう片方は交換法則により成り立つから公理に入れない）。

自分自身との内積の平方根 $\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ はベクトルの「**ノルム (norm)**」と呼ばれる量である（通常のベクトルでは「長さ」になる）が、(3) はノルムの自乗の「**正定値性 (positive definiteness)**」と呼ばれる性質である。

そして、「これまでの内積」とは違う「内積」を（上の公理を満たすものを）考えることができる。

一例を示すと、2 次元実ベクトル $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ の内積を以下で定義する。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda_1a_1b_1+\lambda_2a_2b_2 \tag{5.1}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ にすると普通の定義になる。$\lambda_1>0,\lambda_2>0$ ならこの定義は上の公理をすべて満たす[†2]。

【問い 5-1】 $\lambda_1<0$ または $\lambda_2<0$ のときは公理を満たさない。どの公理をどのように満たさないかを示せ。 解答 → p143 へ

5.1.2　内積の公理: 複素ベクトル

定義 14: 複素ベクトル空間の内積の公理

実ベクトル空間の公理 **定義 13** のうち、以下だけが変更される（* を無視すれば実ベクトル空間での内積の定義となる）。

(1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})^*$

これに伴って、(2) についても注意が必要で、複素ベクトル空間の内積は

$$\mathbf{x}\cdot(\lambda_1\mathbf{y}_1+\lambda_2\mathbf{y}_2)=\lambda_1\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1+\lambda_2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2 \tag{5.2}$$

$$(\lambda_1\mathbf{y}_1+\lambda_2\mathbf{y}_2)\cdot\mathbf{x}=\lambda_1^*(\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{x})+\lambda_2^*(\mathbf{y}_2\cdot\mathbf{x}) \tag{5.3}$$

を満たす（下の式は上の式の複素共役である）。つまり、内積の「前」からスカラーを出すときには、そのスカラーの複素共役を取ることが必要である[†3]。

[†1] 外積の抽象化ももちろんあるのだが、ここでは扱わない。

[†2] 相対論で出てくる「4 次元内積」は $\vec{a}\cdot\vec{b}=-a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3c_3$ という、正負がまざった内積で、この公理 (3),(4) を満たさない。

2 次元複素ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の内積は

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 \tag{5.4}$$

と定義されている。

複素ベクトルの内積は前後の入れ替えに対して対象でない。そのことをより強く表現するために、列ベクトルを $|\mathbf{v}\rangle$、そのエルミート共役をとったものを $\langle\mathbf{v}|$ と書いて[†4]、内積を $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$ と表現するという記号（Dirac のブラ・ケット → p13）を物理屋はよく使う。

定義 15: 複素ベクトル空間の内積の公理（ブラ・ケット表記）

(1) $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle^*$

(2) $\langle\mathbf{x}|\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2\rangle = \lambda_1\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}_1\rangle + \lambda_2\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}_2\rangle$

上の二つからの結果

$\langle\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2|\mathbf{y}\rangle = \lambda_1^*\langle\mathbf{x}_1|\mathbf{y}\rangle + \lambda_2^*\langle\mathbf{x}_2|\mathbf{y}\rangle$

(3) $\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle \geq 0$

(4) $\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = 0$ になるのは、$|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{0}$ のときに限る。

【問い 5-2】 複素ベクトルの内積を $*$ を取らない定義にしてしまうと、公理の (3) を満たさないことを示せ。

ヒント → p140 へ　解答 → p143 へ

5.1.3 行列の内積

行列もベクトルと見ることができるので、行列の「内積」を考えることもきる。シンプルな拡張としては、

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \tag{5.5}$$

のようにベクトルの内積同様（成分ごとの掛け算の和）とすればよい。この式は後で使うトレース → p85 を使って、

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top\mathbf{B}) \tag{5.6}$$

と書くこともできる。複素成分を含む行列の場合は、以下のように定義する。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij}^* B_{ij} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}) \tag{5.7}$$

5.1.4 関数の内積

関数もベクトルと見ることができるという話はしたが、関数の世界に「内積」を考えることももちろんできる。実関数の場合、関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の内積を

$$f\cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

で定義することができる。この内積は対称だし双線形だし、ノルムの自乗 $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$ は正定値である。

複素関数の場合は、

$$f\cdot g = \int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.9}$$

のように片方（今の場合内積の前の因子）に $*$ をつける（これで正定値になる）。

関数を扱うときには、条件 (4)、つまり「ノルムが 0 になるのは $f(x) = 0$ の場合に限る」については注意が必要。というのは、0 でな

[†3] 物理関係の本ではここで述べた定義を使うことが多いのだが、$\mathbf{x}\cdot(\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2) = \lambda_1^*\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1 + \lambda_2^*\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2$ のように、「後ろ」から出すときに $*$ がつくように定義している本もある。

[†4] 2 次元複素ベクトルの場合、$|\mathbf{v}\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ なら、$\langle\mathbf{v}| = \begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* \end{bmatrix}$ である（$\langle\ |$ の記号の意味の中に複素共役を取るという操作も入っているので、$\langle\mathbf{v}^*|$ と書く必要はない）。よって、$\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2$ となる。

い関数なのに積分が 0 になることが有り得るのである。もっとも単純な例を挙げると、$\boxed{f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{それ以外の点}\end{cases}}$ という関数はある一点でだけ 0 でない[†5] ので $\boxed{f(x)=0}$ ではないが、積分すると 0 になる。この例のような不連続点を持つ関数を除いて考えれば (4) も大丈夫。例にあげた多項式の場合なら問題ない。

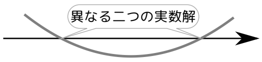
5.1.5 公理だけから Schwarz の不等式を導く

数ベクトルの場合で証明したSchwarz → p19 の不等式は、以下のようにすると上の公理だけから証明できる。

$\boxed{\mathbf{X}(t)=\mathbf{x}-t\mathbf{y}}$ というベクトルを考える。正定値性より、t の値によらず $\boxed{\mathbf{X}(t)\cdot\mathbf{X}(t)\geq 0}$ である。この式を双線形性を使って展開すると

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2t\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+t^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\geq 0 \tag{5.10}$$

である。この式の左辺は t の 2 次式であり、$\boxed{\text{左辺}=0}$ という式が異なる二つの実数解を持ってしまうと、グラフが



のようになって負の部分が現れ、上の式は成り立たない。よって、$\boxed{\text{左辺}=0}$ の判別式は 0 以下であり、

$$\begin{aligned}(2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2-4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})&\leq 0\\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\leq(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})&\end{aligned} \tag{5.11}$$

$\boxed{\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=|\mathbf{x}|}$ と $\boxed{\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}=|\mathbf{y}|}$ は正で、$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ は正である可能性も負である可能性もあるので、

$$-|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\leq\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\leq|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \tag{5.12}$$

が言える。Schwarz の不等式は、いろんな場面で活躍するが、「公理だけから証明できる」ことがその汎用性を高めている。たとえば「関数の内積」に関しても

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x\int_a^b(g(x))^2\,\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

のような式が示せる。量子力学では「波動関数」と呼ばれる関数をベクトルと考えるとことで、Schwarz の不等式が不確定性関係の証明に用いられる[†6]。

【問い 5-3】 複素ベクトルの場合は内積 $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$ が複素数であるため、Schwarzu の不等式は、「内積の実部と虚部がそれぞれ最小値が $-|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$、最大値が $|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$」という式となる。これらを上と同様にして導け。ケット記号を使って、$\boxed{|\mathbf{X}\rangle=|\mathbf{x}\rangle-t|\mathbf{y}\rangle}$ というベクトルの、自分自身との内積を考える。内積を取る相手は $\boxed{\langle\mathbf{X}|=\langle\mathbf{x}|-t^*\langle\mathbf{y}|}$ である（t は複素数)。 ヒント → p140 へ　解答 → p143 へ

5.2 直交基底

5.2.1 Gram-Schmidt の正規直交化法

N 次元ベクトル空間に独立な N 本のベクトル $\boxed{\{\mathbf{v}_*\}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_N\}}$ が見つかったとしよう。これらは基底として使うことができる。これらを直交規格化された基底に直す方法として、以下に示す「**Gram-Schmidt の正規直交化法**」がある。

[†5] 実は 0 でない点は 1 点ではなく複数個あってもよい。それでも積分は 0 になる。

[†6] 関数をベクトルとみなしたときの内積は公理 (4) を満たさないことがあると p81 で述べたが、幸い Schwarz の不等式の証明には公理 (4) を使ってないのでその点は問題にならない。

直交規格化されたベクトルの組を $\boxed{\{\mathbf{e}_*\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}}$ として、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{5.14}$$

を満たすようにしたい。まず一つめのベクトル $\mathbf{v}_1$ のノルムを調整する。$\boxed{\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}} \mathbf{v}_1}$ を作れば、

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}} \right)^2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1 \tag{5.15}$$

となる。次に $\boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0}$ になるように $\mathbf{e}_2$ を決めたい。$\underset{\to \text{p21}}{\text{2.4.2}}$ 項で考えた方法で直交するベクトルを作ることができる($\underset{\to \text{p21}}{(2.38)}$を参照)。具体的には

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \tag{5.16}$$

となるから、ベクトル $\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{e}_1$ が $\mathbf{e}_1$ と直交するベクトルである（$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は独立なので、このベクトルは $\mathbf{0}$ にはならない)。このベクトルの長さの自乗は 1 ではなく

$$(\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 \underbrace{- (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{e}_1}_{\text{この部分は前の括弧との内積が 0 であることを使うと計算が楽}}) = |\mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 \tag{5.17}$$

なので[†7]、

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{v}_2| - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}} (\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \mathbf{e}_1) \tag{5.18}$$

とすれば、$\boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1}$ となる。

次は $\mathbf{v}_3$ に対して同様のことをやればよい。$\mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\, \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3)\, \mathbf{e}_2$ というベクトルを持ってくれば、このベクトルは $\mathbf{e}_1$ とも $\mathbf{e}_2$ とも直交する。(5.17) と同様に計算するとこのベクトルの長さの自乗は $|\mathbf{v}_3|^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3)^2 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3)^2$ となり、

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{v}_3|^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3)^2 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3)^2}} (\mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\, \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3)\, \mathbf{e}_2) \tag{5.19}$$

とすればよい。これでパターンは読めたと思うので一般式を書くと、

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{v}_k|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}_j)^2}} \left(\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}_k)\, \mathbf{e}_j \right) \tag{5.20}$$

となる。$\mathbf{e}_k$ を計算するためには $\mathbf{e}_1$ から $\mathbf{e}_{k-1}$ までが計算済みでなくてはいけない。

ここで行った計算で直交化はするが規格化はしない場合（$\sqrt{\text{なんとか}}$ で割る計算をしない場合）は、「正規」を取って「Gram-Schmit の直交化法」と呼ぶ。」

5.2.2　多項式の直交規格化

直交規格化できる例として、多項式を考えよう。定義域を $\boxed{-1 \le x \le 1}$ として、多項式の内積を

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x) g(x) \tag{5.21}$$

と定義しよう。N 次多項式の（$N+1$ 次元の）ベクトル空間の基底を $\boxed{\mathbf{v}_0 = 1, \mathbf{v}_1 = x, \mathbf{v}_2 = x^2, \cdots, \mathbf{v}_N = x^N}$ と取る(x のべきの数字と合わせるため、基底を $\mathbf{v}_0$ から始めた)。

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 \tag{5.22}$$

より、$\boxed{\mathbf{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ でよい。次に $\boxed{\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0}$ にしたいが、$\mathbf{v}_1$ はすでに $\mathbf{e}_0$ と直交（$\boxed{\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{v}_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{2}} x = 0}$）しているので、あとは $\boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1}$ になるようにすればよい。

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \tag{5.23}$$

[†7] $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{v}_2$ が平行ならば (5.17) の右辺は 0 になってしまうが、それは最初に $\{v_*\}$ が独立なベクトルの組だとしたことに矛盾する。

なので、$\boxed{\mathbf{e}_1=\sqrt{\frac{3}{2}}x}$ である。次に $\mathbf{e}_2$ を作る。$\mathbf{v}_2$ は $\mathbf{e}_1$ とは直交するが

$$\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_0=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{2}}x^2=\left[\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{3} \tag{5.24}$$

となって $\mathbf{e}_0$ とは直交しない。そこで $(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0$ を引くことで $\mathbf{e}_0$ と直交するようにする。すなわち、

$$\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0=x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=x^2-\frac{1}{3} \tag{5.25}$$

というベクトルを作る。このベクトルの「長さの自乗」は

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{9}+\frac{x}{9}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{45}=\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \tag{5.26}$$

となるので、規格化されたベクトルは $\boxed{\mathbf{e}_2=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2-1\right)}$ となる。

同様の作業を続けていくと、右に並べた式のように順に計算して求めていける。この多項式の列の、最初の $\sqrt{\quad}$ を除いた部分は「Legendre の多項式」と呼ばれ、物理のいろんなところで[†8]使われる多項式になっている。

$$\mathbf{e}_0=\sqrt{\frac{1}{2}} \tag{5.27}$$

$$\mathbf{e}_1=\sqrt{\frac{3}{2}}x \tag{5.28}$$

$$\mathbf{e}_2=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{2}(3x^2-1) \tag{5.29}$$

$$\mathbf{e}_3=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{5.30}$$

$$\mathbf{e}_4=\sqrt{\frac{9}{2}}\times\frac{1}{2}(35x^4-30x^2+3) \tag{5.31}$$

$$\vdots$$

同様に「直交基底ベクトル」として使える関数の例としては、三角関数がある。たとえば、$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin m\theta$ という関数は、

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin m\theta\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta\right)=\delta_{mn} \tag{5.32}$$

を満たす。この関係を使うのが Fourier 変換である。

5.3　相似変換

5.3.1　相似変換の意味

中学校の数学の頃から、「合同」や「相似」という関係性を使って図形を分類することをよく行ってきた。

二つ以上の図形が「合同」であるとは、平行移動と回転や反転などの操作（「相似」の場合はこれに拡大縮小が加わる[†9]）を行うとそれら図形をぴったり重ねることができるという意味だった。つまり「ある種の操作を行ったら同一のものになるもの」を「互いに相似」と呼ぶ。

行列—あるいはそれが表現するところの線形変換についても同様に「相似」を定義しよう[†10]。そのためには、どの操作を許すかを決めなくてはいけない[†11]。行列に対する「相似」は以下のように定める。

定義 16: 行列の相似

ある正則な行列 $\mathbf{P}$ を使って

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B} \tag{5.33}$$

と書けるとき、「$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は相似だ」と表現する。

[†8] 実は極座標における関数を展開するときなど、意外なところでも使われている。

[†9] この後説明する行列の「相似」には拡大縮小は入ってない。行列の相似に対応するのは図形の合同の方が近いと言える。

[†10] ベクトルが元々の図形的定義（矢印）から一般化されたように、「相似」という言葉を図形以外にも一般化するわけである。元の相似とは全然違うものになるが、「そこまで広げて考えるのだ」と思って欲しい。

[†11] これまでも、行列の変形としては「行列式を不変にする変換」「行基本変形」「列基本変形」などを行ってきた。それぞれに「何を変えないか」「何を変えるか」が違っていた。ここで考える相似変換はこれらより少し制約がきつい。

この変換を「相似変換 (similarity transformation)」と呼ぶ。左から $\mathbf{P}^{-1}$ を掛けている意味について説明しておこう。行列は $\overbrace{\vec{v}'}^{\text{変換後}} = \overbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{A} & \end{bmatrix}}^{\text{変換}} \overbrace{\vec{v}}^{\text{変換前}}$ のようにして $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ という線形変換を表現するのに使うものである。この $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v}$ の両辺に $\mathbf{P}^{-1}$ を掛けて、$\mathbf{A}$ と $\vec{v}$ の間に $\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}$ を挿入することで、

$$\mathbf{P}^{-1}\vec{v}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\overbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}}^{\mathbf{I}}\vec{v} \tag{5.34}$$

のように書き直す。こうすると、

$$\overbrace{\mathbf{P}^{-1}\vec{v}'}^{\text{変換後}} = \overbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}^{\text{変換}}\,\overbrace{\mathbf{P}^{-1}\vec{v}}^{\text{変換前}} \tag{5.35}$$

となる。すなわち、

結果 37: 線形変換の相似変換

$\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ という線形変換が　行列 $\mathbf{A}$ で表現されるなら、

$\mathbf{P}^{-1}\vec{v} \mapsto \mathbf{P}^{-1}\vec{v}'$ という線形変換が　行列 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ で表現される。

ことになる（つまり、線形変換を表す行列は $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ と相似変換される）のである。

5.3.2　相似変換でやっていること

$\mathbf{P}$ は正則な行列であるから、$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vec{v}^1 & \vec{v}^2 & \dots & \vec{v}^N \end{bmatrix}$ のように「列ベクトルを並べたもの」と解釈したとき、これらの列ベクトルは線形独立である。N 次元空間における N 本の線形独立なベクトルなので $\{\vec{v}^*\}$ を基底として採用する。このときの双対基底 → p22 $\{\vec{v}_*\}$ を用意して、これを行ベクトルにして並べると、逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ になる。

$$\overbrace{\begin{bmatrix} (\vec{v}_1)^\top \\ (\vec{v}_2)^\top \\ \vdots \\ (\vec{v}_N)^\top \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}^{-1}} \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}^1 & \vec{v}^2 & \dots & \vec{v}^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \vec{v}_i \cdot \vec{v}^j & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{5.36}$$

となるので、双対基底の満たすべき性質 $\vec{v}_i \cdot \vec{v}^j = \delta_i^{\ j}$ を使えば、$\mathbf{P}^{-1}$ は確かに逆行列になっている。これに $\mathbf{A}$ という行列を掛けることは、

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}\vec{v}^1 & \mathbf{A}\vec{v}^2 & \dots & \mathbf{A}\vec{v}^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} \tag{5.37}$$

のように、それぞれの基底ベクトルに行列 $\mathbf{A}$ を掛けている。行列 $\mathbf{A}$ が複雑な行列であったときに、基底ベクトルを「$\mathbf{A}$ を掛けたときに簡単な結果になるベクトル」と選ぶことで、上の行列 $\mathbf{A}\mathbf{P}$ を簡単な行列にできる、というのが相似変換を使って行列を変形する意味である。

一例として、$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に掛けると $\vec{0}$ になる。そこで $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ と選んで[†12]

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

[†12] もう一つの基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と直交する $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ にしておいた。

とすることで、より簡単な行列に変えることができる。つまりは、「ある基底で見ると複雑に見える変換（行列）が別の基底で見ると簡単な操作である」を $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ という具体的計算で行うことができる。ここで行ったことは次の章でやる「対角化」の一例である。

5.4　相似変換の性質とその不変量

5.4.1　相似変換の性質

変換を行うとき、この変換をしても変わらない量は何か？を先に知っておくと便利なことが多い。相似変換の不変量は右の通りである。

結果 38: 相似変換の不変量

相似な行列は、階数 rank、行列式 det、トレース tr（**定義 17** を見よ）が等しい。

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) = \mathrm{rank}\,\mathbf{A} \tag{5.39}$$

$$\det\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) = \det\mathbf{A} \tag{5.40}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A} \tag{5.41}$$

階数は行列を列ベクトル（行ベクトルでもよい）を並べたものと考えたときの独立なベクトルの本数だが、正則な行列を掛けても行列が持っている情報は失われないので変化しない。

行列式の不変性は、積の行列式が行列式の積であること $\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ と、逆行列の行列式は行列式の逆数であること $\det\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{P}}$ を使えば簡単に証明できる。これからすぐに、もわかる（正則の条件は 行列式 $\neq 0$ だから、行列式が変わらないなら正則かどうかも変わらない）。

結果 39: 相似と正則性

正則な行列と相似な行列は正則である。

結果 40: 相似と行列方程式

行列方程式 $\alpha_n\mathbf{A}^{\mathbf{n}} + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{\mathbf{n-1}} + \cdots\alpha_2\mathbf{A}^{\mathbf{2}} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} = 0$ が成り立つとき、これを相似変換した $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ に対しても

$$\alpha_n\mathbf{B}^{\mathbf{n}} + \alpha_{n-1}\mathbf{B}^{\mathbf{n-1}} + \cdots\alpha_2\mathbf{B}^{\mathbf{2}} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_0\mathbf{I} = 0 \tag{5.42}$$

が成り立つ。

こともすぐわかる。任意の自然数 k に対し、

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^k =& \overbrace{\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\cdots\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)}^{k\text{ 個}}\\ =& \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{I}}\cdots\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{P}\end{aligned} \tag{5.43}$$

より、

$$\begin{aligned}&\alpha_n\mathbf{B}^{\mathbf{n}} + \alpha_{n-1}\mathbf{B}^{\mathbf{n-1}} + \cdots\alpha_2\mathbf{B}^{\mathbf{2}} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_0\mathbf{I}\\ =& \mathbf{P}^{-1}\left(\alpha_n\mathbf{A}^{\mathbf{n}} + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{\mathbf{n-1}} + \cdots\alpha_2\mathbf{A}^{\mathbf{2}} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}\right)\mathbf{P}\end{aligned} \tag{5.44}$$

となるからである。

5.4.2　トレース

相似変換しても不変な量として、行列式の他に という量がある。3×3 行列の場合では、

定義 17: トレースの定義

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN} = \sum_{i=1}^{N} A_{ii} \tag{5.45}$$

$\mathrm{tr}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ である。トレースが相似変換の不変量であることを示すには、まず

結果 41: トレースの巡回対称性

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) \tag{5.46}$$

を証明する。まず行列の積を成分で書いて

$(\mathbf{AB})_{ik} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} B_{jk}$（およびこれの、$A$ と B を取り替えた式）を作り、i と k を等しくして足し上げ操作をすれば、

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} B_{ij} A_{ji} \tag{5.47}$$

が成り立つことは明らかである。巡回対称性を使えば、以下が言える。

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \mathrm{tr}(\mathbf{PP}^{-1}\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A} \tag{5.48}$$

トレースに関する定理をまとめておくと右のようになる。最後の (5) は定義通りに計算すると出てくるが、この式の右辺が「行列の内積(5.5)」→ p80 になっていることに注意。

結果 42: トレースに関する定理

(1)

$\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A} + \mathrm{tr}\,\mathbf{B}$

(2) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}$

(3) $\mathrm{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$

(4) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

(5) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top\mathbf{B}) = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$

新しい概念が出てきたときは例をやってみるのがよい。というわけで、いくつかの行列 $\mathbf{P}$ を持ってきて、それがどのような相似変換を行うかを見てみよう。簡単のため、2×2 行列で考える。

【問い 5-4】 以下の行列による相似変換はどのようなものか。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解答 → p144 へ

行列 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ による相似変換は、座標軸の回転に対応する。

相似変換の有用な使用例は、次の章で行う「対角化」である。

5.5 章末演習問題

★【演習問題 5-1】

以下の行列による相似変換を求めよ。

(1) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

解答 → p150 へ

★【演習問題 5-2】

ある行列 $\mathbf{M}$ を相似変換（$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$）したところ、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

となった。ただし、$\mathbf{M}$ や $\mathbf{P}$ の具体的な式はわからない。以下の問いに答えよ。

(1)行列 $\mathbf{M}$ の行列式は、問題に与えられた条件だけで計算できるか？ —計算できないなら「できない」と答えよ。計算できるなら、それを求める過程を示せ。

(2)行列 $\mathbf{M}$ のトレースは、問題に与えられた条件だけで計算できるか？ —計算できないなら「できない」と答えよ。計算できるなら、それを求める過程を示せ。

解答 → p151 へ

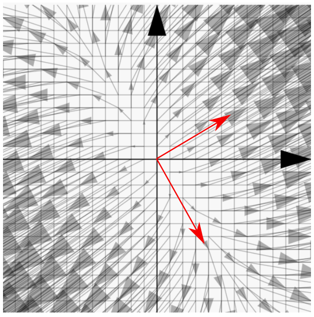
第 6 章　固有値・固有ベクトルと対角化

6.1　固有ベクトル

線形変換前のベクトルのいる空間と変換後のベクトルのいる空間が同じ場合（今から考える写像（変換）は同じベクトル空間の間の演算（$V \to V$）である場合）[†1]を考えよう。よってこの章で登場する行列はすべて正方行列である。

正方行列による変換の様子を見ていると、多くの線形変換に対して「大きさは変わるが向きが変わらないベクトル」があることに気づく。右の図は、行列 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ による写像による点の移動を矢印で表現したものである。

これを見ていると赤矢印で示した二つの方向については変換による点の移動が「原点にから離れる向き」になっている（ベクトルの向きが変わらない）ことがわかる[†3]。



アプリのリンク

左の図[†2]

6.1.1　固有ベクトルの定義

一般に、ある演算子 $\hat{O}$（行列で表現されていてもいいし、微分演算子などでもよい）を $\mathbf{0}$ ではない、あるベクトル $\mathbf{v}$（このベクトルは、もちろん、B.1.1 → p129 節で述べた、一般的な意味での「ベクトル」である）に掛けたときに元のベクトルのスカラー倍になるのは特別なベクトルの場合に限る。

定義 18: 固有ベクトル

線形演算子 $\hat{O}$ と零ベクトルではないベクトル $\mathbf{v}_\lambda$ とスカラー量 λ の間に

$$\hat{O}\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda \tag{6.1}$$

なる関係が成り立つとき、$\mathbf{v}_\lambda$ を「$\hat{O}$ の**固有ベクトル (eigenvector)**[†4]」と呼び、スカラー λ のことを「**固有値 (eigenvalue)**」と呼ぶ[†5]。

「λ は $\hat{O}$ の（$\mathbf{v}_\lambda$ に対する）固有値である」とか、「$\mathbf{v}_\lambda$ は固有値 λ の $\hat{O}$ の固有ベクトルである」のように表現する。このことは、固有ベクトル $\mathbf{v}_\lambda$ の前にある線形演算子 $\hat{O}$ は、スカラー λ に置き換えてよい。を意味する。演算子がスカラーに「化ける」から、計算をかなり簡単にしてくれる。

行列 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ のような簡単な行列なら、固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、固有値はそれぞれ a と b である。

行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は「上下成分の入れ替え $\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}$ を行う行列」だから、固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$（入れ替えても同じ）と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$（入れ替えると逆符号）である。固有値はそれぞれ 1 と -1 となる。

[†1] 写像、変換、関数はすべて同じ意味の言葉である。「関数」は名前の通り数字に使われることが多いし、変換は写像の中でも、同じベクトル空間内の中での写像に使われることが多いようである。明確な使い分けはない。

[†2] この図を出すには「変換をベクトルで」のモードにする。

[†3] 一般的には「原点に向かう向き」になっている場合もある。

[†4] eigen はドイツ語の「固有」。歴史的な理由でドイツ語が使われる。eigen vector と分けて表記する場合もある。$\hat{O}$ が微分演算子である場合は「**固有関数 (eigenfunction)**」と呼ぶことが多い。

[†5] 本書では、固有ベクトルは固有値を添字につけて表現することにする。

一般的な演算子に対しても固有値・固有ベクトルは定義できる。もっとも簡単な例は微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ に対する固有ベクトルである指数関数 e^{Kx} である（固有値は K）。$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{Kx} = K\mathrm{e}^{Kx}}$ という式を見るとわかる。

固有値が 0 の固有ベクトル（$\boxed{\hat{O}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}}$ を満たす $\mathbf{0}$ ではないベクトル）が存在することは $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ が $\{\mathbf{0}\}$ ではない（つまり $\hat{O}$ に逆がない）ことを意味する[†6]。

以下では $\mathbf{v}_\lambda$ が複素数 N 成分（$\mathbb{C}^N$）であり、$\hat{O}$ が $N \times N$ 行列 $\mathbf{M}$ である場合を考えよう。行列を掛けるときは、

$$\mathbf{M}\overbrace{\vec{v}_{\rangle\lambda}}^{\text{右固有ベクトル}} = \lambda\,\vec{v}_{\rangle\lambda}$$

のように行列を左から、右にある列ベクトルに掛ける場合と

$$\overbrace{(\vec{v}_{\lambda\langle})^{\top}}^{\text{左固有ベクトル}}\mathbf{M} = \lambda\,(\vec{v}_{\lambda\langle})^{\top}$$

のように左にある行ベクトルに行列を右から掛ける場合が考えられる。この二つの固有ベクトルを「右固有ベクトル」と「左固有ベクトル」と呼んで区別する（$\vec{v}$ の添字の λ の横につけた $\langle$ または $\rangle$ は「開いている方の方向から行列を掛けてね」という向きを表す）。後で示すが、これらの固有値の組は同じになるが、右固有ベクトルと左固有ベクトルは一般には一致しない[†7]。行列が対称行列ならばスカラー倍をのぞいて一致し、$\boxed{\vec{v}_{\lambda\langle} = \alpha_\lambda \vec{v}_{\rangle\lambda}\ (\alpha_\lambda \text{ は任意のスカラー})}$ となる。また、行列がエルミート行列なら、$\boxed{(\vec{v}_{\lambda\langle})^{*} = \alpha_\lambda \vec{v}_{\rangle\lambda}}$ となる（$*$ が必要[†8]）。

6.1.2　固有ベクトルの相互関係

結果 43: 固有値のそれぞれ違う固有ベクトルの組は線形独立である

固有値のそれぞれ異なる固有ベクトルの組は線形独立→ p15 である。

ゆえに、N 次元ベクトル空間の固有ベクトルは最大でも N 本である。

が証明できる。以下の練習問題をやってみよう。

【問い 6-1】 上の $\boxed{\textbf{結果 43}}$ の前半、すなわち、固有値がそれぞれ λ_i である固有ベクトルの組 $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, \cdots, K)$（$\{\lambda_*\}$ は互いに異なる値を持つ）は、いかなる係数 α_i を使っても（全てが 0 である場合を除き）

$$\sum_{i=1}^{K} \underbrace{\alpha_i \mathbf{v}_i}_{} = 0 \tag{6.2}$$

が成り立つことはないことを示せ。

ヒント → p140 へ　　解答 → p144 へ

$N \times N$ 行列に対する固有値は最大でも N 個しかない（N 次元空間では線形独立なベクトルは最大でも N 本だから）。ただし、固有値の数が N より少ないことは有り得る（後でどのような場合にそうなるかを考えよう）。

結果 44: 固有値の違う左固有ベクトルと右固有ベクトルは直交する

$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$ のとき、$\boxed{\vec{v}_{\lambda_1\langle} \cdot \vec{v}_{\rangle\lambda_2} = 0}$ である。

ということが証明できる。証明するには、左固有ベクトル

[†6] $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ の意味はB.4.2→ p133 項を見よ。

[†7] 左固有ベクトルと右固有ベクトルが同じになる例を扱うことが多いので、このことを失念しやすい。

[†8] ここで固有値には $*$ は不要である。6.1.3→ p89 項を参照。

と右固有ベクトルの間に行列 $\mathbf{M}$ を挟んだ式（下の二つの式の左辺）を、以下のように 2 種類の方法で計算する。

$$\underbrace{\boxed{(\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top}\,\mathbf{M}}_{\text{こっちを先に計算}}\boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} = \boxed{(\lambda_1\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top}\boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} = \lambda_1\vec{v}_{\lambda_1\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_2} \tag{6.3}$$

$$\boxed{(\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top}\underbrace{\mathbf{M}\,\boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_2}}}_{\text{こっちを先に計算}} = \boxed{(\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top}\boxed{\lambda_2\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} = \lambda_2\vec{v}_{\lambda_1\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_2} \tag{6.4}$$

上の二つの式を辺々引くことにより、

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_{\lambda_1\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_2} \tag{6.5}$$

を得るが、$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$なので$\boxed{\vec{v}_{\lambda_1\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_2} = 0}$とわかる。

【問い 6-2】 この定理の応用として、

$$m, n \text{ が整数で、} m \neq n \text{ ならば} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \sin n\theta = 0 \tag{6.6}$$

を、$\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \sin n\theta$ を 2 通りの計算で計算することから示すことができる。やってみよ。

ヒント → p140 へ　解答 → p144 へ

6.1.3 対称行列とエルミート行列の場合

行列が対称行列$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top}$なら、左固有ベクトルと右固有ベクトルには違いがない。転置することによって

$$\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda} = \lambda\vec{v}_{\rangle\lambda} \quad \xrightarrow{\text{転置}} \quad (\vec{v}_{\rangle\lambda})^\top\,\mathbf{M}^\top = \lambda\,(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\top \tag{6.7}$$

が示せるからである。

行列がエルミート行列 → p132 の場合は、

$$\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda} = \lambda\vec{v}_{\rangle\lambda} \quad \xrightarrow{\text{エルミート共役}} \quad (\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\mathbf{M}^\dagger = \lambda^*\,(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger \tag{6.8}$$

が言える。つまり左固有ベクトルは右固有ベクトルの $\dagger$ である。ここで固有値が複素共役に変わったように思えるかもしれないが、実はエルミート行列の場合、$(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda}$ を

$$\begin{aligned}\underbrace{(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\mathbf{M}}_{\lambda^*(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger}\vec{v}_{\rangle\lambda} &= (\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\underbrace{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda}}_{\lambda\vec{v}_{\rangle\lambda}}\\ \lambda^*\,(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\vec{v}_{\rangle\lambda} &= \lambda\,(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\,\vec{v}_{\rangle\lambda}\end{aligned} \tag{6.9}$$

のように二通りの計算方法で計算することで、$\boxed{\lambda = \lambda^*}$が言える。

結果 45: エルミート行列の固有値

エルミート行列の固有値は実数であり、左固有ベクトルは右固有ベクトルのエルミート共役（$\dagger$）である。

6.2 特性方程式

6.2.1 特性方程式と特性多項式

固有値の定義である(6.1) → p87 $\boxed{\hat{\mathcal{O}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$は、

$$\left(\hat{\mathcal{O}} - \lambda\right)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

と変形できる。これから、演算子 $\left(\hat{O}-\lambda\right)$ には逆があってはいけない（あったら、$\boxed{\mathbf{v}=\mathbf{0}}$ になってしまう）。このことは、演算子 $\hat{O}$ が $N\times N$ 行列 $\mathbf{M}$ で表現される場合、

定義 19: 特性方程式

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}_N)=\mathbf{0} \tag{6.11}$$

を意味する。この式を「特性方程式」または固有方程式と呼び、左辺に現れる

定義 20: 特性多項式

$$\phi_{\mathbf{M}}(x)=\det(\mathbf{M}-x\mathbf{I}_N) \tag{6.12}$$

を「特性多項式」と呼ぶ。特性多項式は

$$\det\begin{bmatrix} M_{11}-x & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22}-x & \cdots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \cdots & M_{NN}-x \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

と書くことができ、対角成分の積 $(M_{11}-x)(M_{22}-x)\cdots(M_{NN}-x)$ を含み、これから出てくる項 $(-1)^N x^N$ 以外に x の N 次の項は出てこないから、x に関して N 次の多項式

$$\phi_{\mathbf{M}}(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+(-1)^N x^N \tag{6.14}$$

である（$\{\alpha_*\}$ は $\hat{O}$ を決めれば決まる定数）。この式を $(-1)^N$ で割ってから因数分解して $=0$ と置くと

$$(-1)^N\phi_{\mathbf{M}}(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_N)=0 \tag{6.15}$$

となり、この式の N 個の解が固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ である[†9]。

ここまでの話を聞くと「固有値は N 個ある」と思ってしまいがちだが、二つの理由で N 個ない場合がある。

重解を持つ場合　上の多項式の一部が $(\lambda-\lambda_i)^k$(k は整数で、$k>1$) となっている場合である。この場合、$k-1$ 個だけ固有値の数が減る。

実ベクトルを考えていて、複素数解の場合　実ベクトル空間を考えている場合、λ_i が複素数だと $\lambda_i\mathbf{v}$ が考えているベクトル空間の外に出てしまうから、たとえ $\boxed{\hat{O}\mathbf{v}=\lambda_i\mathbf{v}}$ が満たされていても、これは固有ベクトルとは言えない。

6.2.2　2×2 行列

2×2 行列の場合で例を示す。まず重解でない場合を考える。

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

となるベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を求めよう。上の式を

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

と変形する。この行列 $\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix}$ に逆行列があってはならないから

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix}=0 \tag{6.18}$$

が成り立たねばならない。これから

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(6-\lambda)-(-1)\times 3 &= 0 \\ 15-8\lambda+\lambda^2 &= 0 \\ (\lambda-3)(\lambda-5) &= 0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

[†9] ここまで「左固有ベクトル」と「右固有ベクトル」を区別しつつ「左固有値」と「右固有値」を区別しなかった。もし左固有値と右固有値が違う数列であったとすると、特性多項式が「左固有値を使った因数分解」と「右固有値を使った因数分解」の二つを持つことになってしまう。しかし多項式の因数分解は一意的である。よって左固有値の数列と右固有値の数列は等しい。

という特性方程式が出てくる。ゆえに、λ は 3 か 5 でなくてはいけない。

$\lambda = 3$ である場合、(6.17) は

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

となる。これはあきらかに、$y = -x$ であることを示している。一方 $\lambda = 5$ である場合は、

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

であるから、$y = -3x$ である。こうして、固有値 3 を持つ固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と、固有値 5 を持つ固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ が見つかった。

2×2 行列で特性方程式が重解になる例をやっておくと、一つは単位行列に比例する行列 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ で、これの特性方程式は $(\lambda - a)^2 = 0$ になり、固有値は 2 のみである。ただし、この場合任意のベクトルは固有ベクトルである（つまり、独立な固有ベクトルの本数は 2)。もう少し複雑な重解になる例を挙げると行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ で、固有値方程式は

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =& (1-\lambda)(3-\lambda) - (-1) \times 1 \\ =& \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \end{aligned} \tag{6.22}$$

で、固有値は 2 しかない。この場合の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v}_{\rangle 2} = 0 \tag{6.23}$$

を満たすベクトルなので、独立なものは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の 1 本しかない[†10]。

二次方程式を解くとき「重解は珍しい」という経験をしているんだろう。同様に特性方程式が重解になる行列はある意味「珍しい」行列である。行列のパラメータを変えていくと、パラメータ空間内の孤立した点として「固有方程式が重解になる行列」が出現する。

固有値の数が減る場合でも、固有ベクトルの数も減る場合とそうならない場合があることに注意（後で一般論を考える)。

複素数解となるシンプルな例を一つやっておこう。行列 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考えると、特性方程式は $\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$ から

$$-\lambda^2 - 1 = 0 \tag{6.24}$$

となり、解は $\lambda = \pm\mathrm{i}$ であって実数解がない。この行列は「$\frac{\pi}{2}$ 回転」の行列なので「回転しても元と同じ方向を向いているベクトル」がないのは当然といえば当然である。

複素ベクトル空間だと、

$$\begin{bmatrix} \mp\mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mp\mathrm{i} \end{bmatrix}\vec{v}_{\rangle\pm\mathrm{i}} = 0 \tag{6.25}$$

より、$\vec{v}_{\rangle\pm\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mp\mathrm{i} \end{bmatrix}$ という固有ベクトルが存在する。掛け算してみると

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mp\mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = \pm\mathrm{i}\begin{bmatrix} 1 \\ \mp\mathrm{i} \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

となってこれは確かに固有ベクトルになっている。

例で感じをつかんだところで、一般的に考えていこう（ここではベクトル空間は $\mathbb{C}^2$ とする)。2×2 行列

[†10] 左固有ベクトルは $\vec{v}_{2\langle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、つまり、$(\vec{v}_{2\langle})^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ である。

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$の固有値を$\lambda$とすると、$\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I_2}$が逆行列を持ってはいけないので、

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} =& 0 \\ (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =& 0 \\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc =& 0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

という式が出る。これから固有値が

$$\begin{aligned} \lambda_\pm =& \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ =& \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \end{aligned} \tag{6.28}$$

であることがわかる。重解でない場合（$(a-d)^2 + 4bc \neq 0$の場合）、固有ベクトルは固有値二つに対応して 2 本あるので、

$$\begin{bmatrix} a-\lambda_\pm & b \\ c & d-\lambda_\pm \end{bmatrix} \vec{v}_{\rangle\lambda_\pm} = \vec{0} \tag{6.29}$$

を解こう（以下しばらくは重解でない場合のみを考える）。解は

$$\vec{v}_{\rangle\lambda_\pm} = \begin{bmatrix} b \\ \lambda_\pm - a \end{bmatrix} \text{または} \begin{bmatrix} \lambda_\pm - d \\ c \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

である。複号がある式が二つなので、一見四つの解があるように見えるが、もちろん独立なベクトルは 2 本しかない。

📖【問い 6-3】 以下の式を示せ。

(1) $(\lambda_\pm - d)\begin{bmatrix} b \\ \lambda_\pm - a \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} \lambda_\pm - d \\ c \end{bmatrix}$　　(2) $(\lambda_\pm - a)\begin{bmatrix} \lambda_\pm - d \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} b \\ \lambda_\pm - a \end{bmatrix}$

解答 → p144 へ

以上より、bが 0 でない場合は$\begin{bmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} b \\ \lambda_- - a \end{bmatrix}$という独立な固有ベクトル 2 本を得る。$c$が 0 でないなら$\begin{bmatrix} \lambda_+ - d \\ c \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} \lambda_- - d \\ c \end{bmatrix}$でもよい。

【問い 6-3】の (1) の式は$b = 0$のときは$0 = 0$という意味のない式になる。同様に (2) の式は$c = 0$のとき意味のない式となる。

b または c が 0 のとき、すなわち$bc = 0$の場合が心配になるが、そのときは（(6.27) の 2 行めから）$(\lambda_\pm - a)(\lambda_\pm - d) = 0$が成り立つので$\lambda_\pm$の片方は$a$、もう片方が$d$になり、(6.30) の「四つの解」は

$$\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-d \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

となるので$\begin{bmatrix} b \\ d-a \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} a-d \\ c \end{bmatrix}$の 2 本を独立な固有ベクトルと選んでおけばよい[†11]。「$a = d$だと困る」と思うかもしれないが、それは重解のケースに対応するので、以下で別に考える。

重解である場合は、λが一つの解$\lambda_1 = \dfrac{a+d}{2}$しかない。まず$b = 0$または$c = 0$の場合を考えよう。重解のときは$(a-d)^2 + 4bc = 0$が成り立つので、$b, c$が 0 になると$a = d$になる。$b$も$c$も 0 である場合は、元々の行列が単位行列に比例する（$a\mathbf{I}$または$d\mathbf{I}$）。この場合は固有ベクトルは$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$の 2 本となる。このように、2 本以上の互いに独立な固有ベクトルが同じ固有値を持つとき、「**縮退 (degenerate)** する」と表現する（量子力学でよく使う表現である）。

[†11] bもcも 0 のときは、もっと簡単に$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$としても同じことである。

$\boxed{b=0}$ で $\boxed{c\neq 0}$ の場合は行列が $\begin{bmatrix}a & 0\\ c & a\end{bmatrix}$ の形になるので、固有ベクトルは $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ しかない。$\boxed{c=0}$ で $\boxed{b\neq 0}$ の場合は行列は逆で、固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ の 1 本になる。

次に $\boxed{bc\neq 0}$ の場合を考える。この場合固有ベクトルが満たすべき式は

$$\begin{bmatrix}a-\lambda_1 & b\\ c & d-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\end{bmatrix}=0 \quad \left(\lambda_1=\frac{a+d}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{a-d}{2} & b\\ c & \dfrac{d-a}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ \\ v_y\end{bmatrix}=0 \tag{6.32}$$

であり、固有ベクトルは $\begin{bmatrix}-b\\ \dfrac{a-d}{2}\end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix}\dfrac{d-a}{2}\\ -c\end{bmatrix}$ である（これら二つは比例するので、どっちでも同じ）。

2×2 行列の場合、以下のことが言える。固有値が 2 個（すなわちベクトル空間の次元と同じ数）あるときは常に固有ベクトルが 2 本見つかる。固有値が 1 個しかないときは、固有ベクトルが 2 本ある場合と、1 本しかない場合がある。固有値が一つもないことはありえない。

ただし、以上は $\mathbb{C}^2$ で考えた結果である。もしベクトル空間が $\mathbb{R}^2$ なら、固有値が複素数になることは許されない（固有ベクトルも複素数の成分を持てない）。その場合は固有値や固有ベクトルが一つもない、という状況が有り得る。

6.3 Cayley-Hamilton の定理と行列の対角化

6.3.1 特性多項式と Cayley-Hamilton の定理

特性方程式(6.15)→ p90 の左辺の λ を行列 $\mathbf{M}$ に、$-\lambda_i$ という数をそれに単位行列を掛けた行列 $-\lambda_i\mathbf{I}$ に置き換えて[†12]、

$$(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{M}-\lambda_N\mathbf{I}) \tag{6.33}$$

という式を作る。これが実は零行列 $\mathbf{0}$ であることを示す定理がある[†13]。

結果 46: Cayley-Hamilton の定理

行列 $\mathbf{M}$ の特性多項式 $\phi_{\mathbf{M}}(x)$ → p90 の x を行列 $\mathbf{M}$ に置き換えて作った行列は零行列である。

$$\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})=\mathbf{0} \tag{6.34}$$

証明の一例を次の項で示す。

FAQ $\det(\mathbf{M}-x\mathbf{I})$ の x に $\mathbf{M}$ を代入すれば、$\det(\mathbf{M}-\mathbf{M})$ になるから、証明は簡単ですね？

いや、そんな計算は無茶である。x は数で、$\mathbf{M}$ は数じゃないのだから、「数に行列を代入」という計算は本来できない。2×2 行列の場合で書くと、

$$\det(\mathbf{M}-x\mathbf{I})=\det\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{bmatrix}\right) \tag{6.35}$$

なのだ。これを

$$\det(\mathbf{M}-x\mathbf{I})=(a-x)(d-x)-bc \tag{6.36}$$

と展開した後で x を $\mathbf{M}$ に（と同時に定数を $\mathbf{I}$ の定数倍に）置き換えた、

$$(a\mathbf{I}-\mathbf{M}))\,(d\mathbf{I}-\mathbf{M})-bc\mathbf{I}=\left(\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}d & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}bc & 0\\ 0 & bc\end{bmatrix} \tag{6.37}$$

[†12] あたかも $\lambda\to\mathbf{M}$ という「代入」を行っているような式だが、数に行列を代入するというのは厳密に考えると変なので、あくまで「置き換え」である。

[†13] Cayley（カタカタ読みはケイレーだったりケイリーだったり）と Hamilton（カタカタ読みはハミルトン）はどちらも 19 世紀の数学者。ハミルトンは「ハミルトニアン」に名を残す物理学者でもある。

としたものが 0 になる、というのが Cayley-Hamilton の定理であり、これは $\det(\mathbf{M}-\mathbf{M})$ とは全く違う。

ちなみにこの行列は、

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d-a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ c(d-a)+(a-d)c & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

となって確かに $\mathbf{0}$ である。

6.3.2 Cayley-Hamilon の定理の証明

証明方法はいくつかあるが、ここでは余因子行列と $\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ を展開して考える方法を使おう。他の方法としては6.4 節の対角化および → p95 三角行列化を使う方法と、【演習問題6-1】→ p109 の方法などがある。

$\boxed{\textbf{結果 30}}$ → p62 から、

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{I} = (\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = (\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}}) \tag{6.39}$$

となる。ここで $(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})$ は $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ の余因子行列である[†14]。上の式から

$$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})\mathbf{M} - \overbrace{\cancel{\lambda(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})} = \mathbf{M}(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}}) - \cancel{\lambda(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})}}^{\text{両辺にある}} \tag{6.40}$$

が出るので、$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})$ は $\mathbf{M}$ と交換する。

$\boxed{\text{(6.39) の左辺の} = 0}$ が特性方程式だが、左辺にある $\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})$ は $\boxed{\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k}$ のように λ の n 次式として展開される（展開係数を α_k とする）。我々が証明したいのは「$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k$ の λ に $\mathbf{M}$ を「代入」すると $\mathbf{0}$ になること、」すなわち $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbf{M}^k = \mathbf{0}}$ である。

(6.39) の真ん中、すなわち $(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})$ は λ の n 次式である。ならば、$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})$ は λ の $(n-1)$ 次式でなくてはいけない。そこで λ で展開して

$$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathbf{D}^{(\mathbf{k})} \tag{6.41}$$

のように各次数の係数になる行列を $\mathbf{D}^{(\mathbf{k})}$ と置く。

2×2 なら、$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき

$$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} d-\lambda & -b \\ -c & a-\lambda \end{bmatrix} \tag{6.42}$$

なので、

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

(6.40) は λ の恒等式なので、

$$\alpha_0 \mathbf{I} = \mathbf{D}^{(0)}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{(0)} \tag{6.44}$$

$$\alpha_1 \mathbf{I} = \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{M} - \mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(0)} \tag{6.45}$$

$$\alpha_2 \mathbf{I} = \mathbf{D}^{(2)}\mathbf{M} - \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)} \tag{6.46}$$

[†14] 念の為、$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})$ は $\tilde{\mathbf{M}}-\lambda\tilde{\mathbf{I}}$ ではない。別の言い方をすれば「余因子行列を作る」という操作は線形写像じゃない。

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-1}\mathbf{I} = \mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})}\mathbf{M} - \mathbf{D}^{(\mathbf{n-2})} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})} - \mathbf{D}^{(\mathbf{n-2})} \tag{6.47}$$

$$\alpha_n\mathbf{I} = -\mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})} \tag{6.48}$$

が言える。$\mathbf{D}^{(\mathbf{n})}$ はない（$(\widetilde{\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}})$ は λ の $n-1$ 次式だから）ので最後の式の右辺は $-\mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})}$ のみになっている。

それぞれの $\mathbf{D}^{(\mathbf{i})}$ も $\mathbf{M}$ と交換することに注意。$\mathbf{M}$ がここに出現する行列全てと交換するので、（p93 の FAQ で「($\mathbf{M}$ は数じゃないんだから) そんな計算は無茶」と述べたが）この式を使って計算していくうえでは、という限定的な意味で「$\mathbf{M}$ を数扱いしてもよい」状況が実現しているということになる。

2 × 2 の場合、$\boxed{\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc}$ なので、

$$\alpha_0 = ad - bc,\quad \alpha_1 = -(a+d),\quad \alpha_2 = 1 \tag{6.49}$$

である。

$$\overbrace{(ad-bc)}^{\alpha_0}\mathbf{I} = \overbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}^{(0)}}\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

$$\overbrace{-(a+d)}^{\alpha_1}\mathbf{I} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}^{(1)}}\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} - \overbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}^{(0)}} = \begin{bmatrix} -a-d & 0 \\ 0 & -a-d \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

$$\overbrace{1}^{\alpha_2}\times\mathbf{I} = -\overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

となって、確かに正しい。

(6.44)から (6.48) までに $\mathbf{M}^i$ を掛けて足していくことで、
→ p94

$$\alpha_0 + \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{M}^2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{M}^n$$

$$= \overbrace{\mathbf{D}^{(0)}\mathbf{M} + \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{M}^2 - \mathbf{D}^{(0)}\mathbf{M}}^{消し合う} + \underbrace{\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{M}^3 - \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{M}^2}_{消し合う} + \cdots + \overbrace{\mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})}\mathbf{M}^n - \mathbf{D}^{(\mathbf{n-2})}\mathbf{M}^{n-1} - \mathbf{D}^{(\mathbf{n-1})}\mathbf{M}^n}^{消し合う} = \mathbf{0} \tag{6.53}$$

を得て、Cayley-Hamilton の定理が証明される。

6.4 行列の対角化、三角行列化を使った Cayley-Hamilton の定理の証明

この節では Cayley-Hamilton の定理の証明を対角化を使って行うが、「前節で証明したらもういいや」と思う人は 6.4.1 項と6.4.4 項は飛ばして構わない。対角化と三角行列化の手順を示した6.4.2 項と6.4.3 項は読んでおこう。
→ p98 → p96 → p97

6.4.1 固有値がすべて異なる場合の Cayley-Hamilton の定理の証明 skip

Cayley-Hamilton の定理は、$N\times N$ 行列の固有値 N 個がすべて異なるときは以下のように簡単に証明できる。

N 個の固有値 $\{\lambda_*\}$ のそれぞれについて $\boxed{\det\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I}=0}$ が成り立つから、それぞれに 1 本ずつ右固有ベクトル $\vec{v}_{\rangle\lambda_i}$ を見つけられる[†15]。

行列 $\phi_{\mathbf{M}}$ を $\mathbf{M}$ の固有ベクトルの一つに掛けると、

$$(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots\underbrace{(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})}_{右へ移動}\cdots(\mathbf{M}-\lambda_N\mathbf{I})\vec{v}_{\rangle\lambda_i}$$

$$=(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots\cdots(\mathbf{M}-\lambda_N\mathbf{I})\underbrace{(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})}_{移動してきた}\vec{v}_{\rangle\lambda_i} = \vec{0} \tag{6.54}$$

となって[†16]零ベクトルとなる。

[†15] 今は N 次元空間を考えているので固有ベクトルの本数を N を超えない。ゆえに同じ固有値の固有ベクトルが 2 本以上存在することはない。

[†16] $\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I}$ と $\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I}$ は交換可能なことに注意。

今固有ベクトルが N 本（次元の数と同じ数）ある場合を考えている。これらの固有ベクトルは独立である。よって、N 次元の任意のベクトル $\vec{V}$ を

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{v}_{\rangle\lambda_i} \tag{6.55}$$

と表現することができる（この固有ベクトルは左固有ベクトルでも右固有ベクトルでもいい）。この任意のベクトルに $\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})$ を掛けると、（各々の $\vec{v}_i$ に掛かった結果が $\vec{0}$ なので）零ベクトルになる。任意のベクトルに掛けて零ベクトルになることは、この行列自体が零行列である。すなわち、$\boxed{(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{M}-\lambda_N\mathbf{I}) = \mathbf{0}}$ がわかる。

6.4.2　固有値がすべて異なる場合の対角化

行列 $\mathbf{M}$ の固有値がすべて異なる場合に固有ベクトルを N 本持ってくることができたならば、以下のように空間を「分解」することができる。

結果 47: 固有値によるベクトル空間の分解（固有値がすべて異なる場合）

$N \times N$ 行列 $\mathbf{M}$ の固有値が N 個存在してすべて異なるとき、ベクトル空間は

$$V = \mathrm{Ker}(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{M}-\lambda_N\mathbf{I}) \tag{6.56}$$

のように直和分解される。

この結果は、任意の i, j に対して $\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I}$ と $\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I}$ が交換することと、$\mathrm{Ker}(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})$ と $\mathrm{Ker}(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})$ の共通部分が $\vec{0}$ しかない[†17] ことからわかる。

このように固有ベクトルが N 本あるとき、それらを使って行列を対角化することができる。$\boxed{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda_i} = \lambda_i\vec{v}_{\rangle\lambda_i}}$ を満たす右固有ベクトルと $\boxed{(\vec{v}^{\lambda_i\langle})^5\mathbf{M} = \lambda_i(\vec{v}^{\lambda_i\langle})^\top}$ を満たす左固有ベクトルを

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_1}} & \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} & \cdots & \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_N}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{(\vec{v}^{\lambda_1\langle})^\top} \\ \boxed{(\vec{v}^{\lambda_2\langle})^\top} \\ \vdots \\ \boxed{(\vec{v}^{\lambda_N\langle})^\top} \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

のように並べた行列 $\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1}$ を作る（$\mathbf{P}^\top$ や $\mathbf{P}^\dagger$ が $\mathbf{P}^{-1}$ になるとは限らないので注意）。ここで、左固有ベクトルと右固有ベクトルを、$\boxed{\vec{v}_{\lambda_i\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_j} = \delta^i{}_j}$ を満たすように[†18]規格化しておけば、上の $\mathbf{P}^{-1}$ は確かに $\mathbf{P}$ の逆行列となる。

これらを使って $\mathbf{M}$ を相似変換した $\boxed{\mathbf{M}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} &\overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{(\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top} \\ \boxed{(\vec{v}_{\lambda_2\langle})^\top} \\ \vdots \\ \boxed{(\vec{v}_{\lambda_N\langle})^\top} \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}^{-1}} \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda_1}} & \boxed{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} & \cdots & \boxed{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda_N}} \end{bmatrix}}^{\mathbf{MP}} \\ =& \begin{bmatrix} \boxed{(\vec{v}_{\lambda_1\langle})^\top} \\ \boxed{(\vec{v}_{\lambda_2\langle})^\top} \\ \vdots \\ \boxed{(\vec{v}_{\lambda_N\langle})^\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1\vec{v}_{\rangle\lambda_1}} & \boxed{\lambda_2\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} & \cdots & \boxed{\lambda_N\vec{v}_{\rangle\lambda_N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.58}$$

[†17] $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$ のときに $\left\{\begin{array}{l} \boxed{(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0}} \\ \boxed{(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0}} \end{array}\right.$ が同時に成り立てば、辺々引くことで $\boxed{(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v} = \vec{0}}$ となり $\boxed{\vec{v} = \vec{0}}$ となってしまう。

[†18] $\boxed{\lambda_i \neq \lambda_j}$ の場合は $\boxed{\vec{v}_{\lambda_i\langle}\cdot\vec{v}_{\rangle\lambda_j} = 0}$ なのは **結果 44** で示しているから、同じものどうしで 1 になるようベクトルをスカラー倍すれば OK。
→ p88

のように、結果は対角行列となる。このことから、「（固有値がすべて異なる場合について）行列式の値は固有値の積 $\boxed{\det \mathbf{M} = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i}$ 」[†19]だとわかる。

この相似変換された $\mathbf{M}'$ は明らかに、

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N - \lambda_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'-\lambda_1\mathbf{I}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N - \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'-\lambda_2\mathbf{I}} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'-\lambda_N\mathbf{I}} = \mathbf{0} \tag{6.59}$$

を満たす。すなわち、$\boxed{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}') = \mathbf{0}}$ である[†20]。$\boxed{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{-1}\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})\mathbf{P}}$ なので、これは $\boxed{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}}$ と同じ。

6.4.3　特性方程式が重解を持つ場合の三角行列化

特性方程式に重解があると固有値の数は N より小さい。その場合でも、固有ベクトルが N 本見つかったなら前項の証明はそのまま繰り返すことができる。ここでは固有ベクトルが k 本 $(k < N)$ しか見つからなかった場合を考えよう。そのとき、固有ベクトル以外に「固有ベクトルとは独立なベクトル」が $N - k$ 本見つかる。これらのベクトルは後で説明する「一般化固有ベクトル」→ p99 になっている。

それらを $\{\vec{V}_*\}$ として

$$\mathbf{P}_1 = \left[\underbrace{\boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_1}} \cdots \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_k}}}^{\text{右固有ベクトル群}} \middle| \boxed{\vec{V}_1} \cdots \boxed{\vec{V}_{N-k}} \right], \quad (\mathbf{P}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} \boxed{\left(\vec{v}^{\lambda_1\langle} \right)^\top} \\ \vdots \\ \boxed{\left(\vec{v}^{\lambda_k\langle} \right)^\top} \end{matrix}\right\} \text{左固有ベクトル群} \\ \hline \boxed{\left(\vec{V}^1 \right)^\top} \\ \vdots \\ \boxed{\left(\vec{V}^{N-k} \right)^\top} \end{bmatrix} \tag{6.60}$$

のような行列を作る。

ここで使った列ベクトルは全て独立だから、逆行列を求めることは常にできる。これらを使って、

$$(\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{M}_1 \end{array}\right] \tag{6.61}$$

のように「一部対角化」できる[†21]。

ここで対角化できた部分を $\mathbf{D}_1$、$*$ の部分を $\mathbf{X}_1$ と書いて、$\boxed{(\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}}$ としておこう。結果はまだ対角行列でも上三角行列でもないが、さらに $\boxed{\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}}$ およびその逆行列を使って、すでに対角化された $\mathbf{D}_1$ の部分を壊さないようにしつつ、

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{p}_2)^{-1} \end{bmatrix}}^{(\mathbf{P}_2)^{-1}} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}}^{(\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}_1} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{X}_1\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{p}_2)^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

のように相似変換を続ける。

[†19] 後で（）は外せる。

[†20] $\boxed{\phi_{\mathbf{M}(x)} = \phi_{\mathbf{M}'(x)}}$ （相似変換しても行列式は変わらない）なので、$\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}')$ は $\phi_{\mathbf{M}'}(\mathbf{M}')$ と書いても同じこと。

[†21] 左下の部分は $\mathbf{M}$ により固有ベクトルが固有ベクトルではないベクトルに写像される場合は零ではないが、今はそんなことは起きないので $\mathbf{0}$ となる。

$(\mathbf{p}_2)^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{p}_2$ が対角化行列になっていれば、行列は上三角行列化されたことになる。そうでなかったなら、話を次にすすめる。$\mathbf{M}_1$ という $(N-k)\times(N-k)$ 行列も固有ベクトルを 1 本は持っているはず[†22]なので、$\boxed{(\mathbf{p}_2)^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_2 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2\end{bmatrix}}$ の形にはできる（対角化できた部分を増やせる）。これでもまだ三角化が完了してなかった場合は、$\mathbf{M}_2$ の部分について同じ作業を繰り返せば、いつか、全体が上三角行列になる。

6.4.4　三角行列化を使った Cayley-Hamilton の定理の証明 skip

三角行列化を使った Cayley-Hamilton の定理の証明を行おう。特性多項式が → p90

$$\phi_{\mathbf{M}}(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k} \tag{6.63}$$

のように因数分解されたとしよう。k は固有値の数で、N より小さい整数である。

ここで $\{m_*\}$ は $\boxed{\sum_{j=1}^{k} m_j = N}$ を満たす 1 以上の整数（k は 1 以上 N 以下の整数となる）で、m_i を固有値 λ_i の「重複度」と呼ぶ。すべての重複度 $\{m_*\}$ が 1 ならば前節で考えた場合になる。

特性方程式が重解を持つときでも Cayley-Hamilton 定理、すなわち以下の式は成り立つ。

$$(\mathbf{M}-\lambda_1)^{m_1}(\mathbf{M}-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\mathbf{M}-\lambda_k)^{m_k} = \mathbf{0} \tag{6.64}$$

前に述べたように「重解」になるのはたくさんの行列のうちの孤立した「珍しいもの」だけである。→ p91

たとえば $\begin{bmatrix}1 & 1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}$ は特性方程式が $\boxed{\lambda^2-4\lambda+4=0}$ になって重解を持つのだが、これをちょっとだけ変えた行列 $\begin{bmatrix}1 & 1+\epsilon \\ -1 & 3\end{bmatrix}$ の特性方程式は $\boxed{\lambda^2-4\lambda+4+\epsilon=0}$ になって、たとえ ϵ が小さくとも重解ではない。

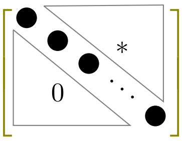
「重解」の場合の周囲に存在する「重解にならない行列」からの連続的極限の先に「重解になる行列」があると考えれば「重解でない場合に成り立つ式は重解の場合でも成り立ちそうだな」と予想される（その方向で証明する方法もある）。

ここでは三角行列化を使った証明を行う。

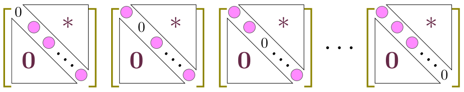
こうしてできた上三角行列の対角成分には $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ がある。残りの $N-k$ 個が $\lambda'_{k+1},\cdots,\lambda'_N$ だったとして、$\mathbf{M}-x\mathbf{I}$ を相似変換した行列（対角成分は $\lambda_i - x$ と $\lambda'_i - x$）の行列式を計算すると、

$$\det\left(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{M}-x\mathbf{I})\mathbf{P}\right) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - x)\times\prod_{j=k+1}^{N}(\lambda'_j - x) \tag{6.65}$$

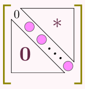
となる（三角行列の det には対角成分以外は寄与しない）。相似変換は行列式を変えないはずだから、これは固有多項式 (6.63) に一致しなくてはいけない。つまり $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ の対角成分にはもともとの行列 $\mathbf{M}$ の固有値が重複度の回数ずつ現れる。

ここで $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}$ が  の形になったことを考えると、

$$\mathbf{P}^{-1}\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})\mathbf{P} = \tag{6.66}$$

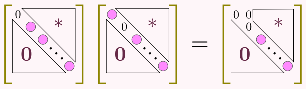


のようになり、この行列の積は 0 になる。

上の式の最初にある行列  は 1 列めがすべて 0 である。この行列と 2 個めの行列の掛け算の掛け算の結果は「1 列めと 2 列め

[†22] 固有ベクトルを k 本取り出した後だからもう固有ベクトルはない—などということはないのである。なぜなら、今「1 本は持っているはず」と言った固有ベクトルは $N\times N$ 行列 $\mathbf{M}$ の固有ベクトルではなく、その「一部」である $(N-k)\times(N-k)$ 行列 $\mathbf{M}_1$ の固有ベクトルなのだ。行列の仕切り直しが行われている。

が全て 0 になった行列」になる。



(6.67)

その次と掛け算すると今度は 3 列めも消える。

以下同様に考えていくと、上の式の計算が終わると全ての行が消える。

こうして、Cayley-Hamilton の定理が対角化できない場合でも証明された。

結果 48: 任意の行列の三角行列化

任意の行列 $\mathbf{M}$ は適当な正則行列 $\mathbf{P}$ を使って上三角行列の形に相似変換することができる。この結果の上三角行列の対角成分には、特性方程式の解がそれぞれの重複度の回数ずつ登場する。

も同時に示された。

特性方程式の解が重複している場合にどのようなことが起こるのかについて考えるため、次の節で「一般化固有ベクトル」とそれによるベクトル空間の分解を考えよう。

6.5 一般化固有ベクトル

6.5.1 一般化固有ベクトルによる直和分解

重複度が 1 だったときに$\underset{\to\ \mathrm{p96}}{(6.56)}$のような直和分解ができたように、重複度が 1 でないものがある場合も以下のように直和分解ができる。

結果 49: 一般化固有ベクトルによる直和分解

特性方程式が

$$\phi_{\mathbf{M}}(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k} \tag{6.68}$$

となる場合、ベクトル空間は

$$\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1}\right)\oplus\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\right)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_k\mathbf{I})^{m_k}\right) \tag{6.69}$$

のように直和分解される。

これの証明には、

(1)$\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_i)^{m_i}\right)$ と $\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}\right)$ の共通部分は $\vec{0}$ しかない。
(2)すべての $\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_i)^{m_i}\right)$ の和は全空間 V である。

の二つを示さねばならない。そのため、$\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda_i)^{m_i}\right)$ について考えていこう。

$\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda)^{m}\right)$ に属するベクトル[†23]を、「**一般化固有ベクトル (generalized eigenvector)**」と呼ぶ。

定義 21: 一般化固有ベクトル

$\boxed{(\mathbf{M}-\lambda)^m\vec{v}_{\rangle^{m}\lambda}=0}$ を満たすベクトル $\vec{v}_{\rangle^{m}\lambda}$ を、「行列 $\mathbf{M}$ の、固有値 λ を持つ一般化右固有ベクトル」と呼ぶ。

特に、$\boxed{(\mathbf{M}-\lambda)^h\vec{v}_{\rangle^{(h)}\lambda}=\vec{0}}$ だが $\boxed{(\mathbf{M}-\lambda)^{h-1}\vec{v}_{\rangle^{(h)}\lambda}\neq\vec{0}}$ となる $\vec{v}_{\rangle^{(h)}\lambda}$—つまり「$\mathbf{M}-\lambda$ を h 回掛けると初めて $\vec{0}$ になるベクトル—が存在したとき、$\vec{v}_{\rangle^{(h)}\lambda}$ を「高さ h の一般化右固有ベクトル」と呼ぶ[†24]。一般化左固有ベクトルも同様に定義する。

[†23] 線形演算子の $\underset{\to\ \mathrm{p135}}{\mathrm{Ker}}$ は部分空間となるので、$\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda)^m\right)$ も一つのベクトル空間をなす。何次元のベクトル空間になっているのは今はまだわからない。

$\boxed{m=1}$ のときが通常の固有ベクトルである。通常の固有ベクトルが固有値を二つ持つことは有り得ないことは既に示した（p96 の脚注 ††17 を見よ）。ゆえに特性方程式に重解がない場合にベクトル空間は(6.56)→ p96 のような直和分解することができた。

一般化固有ベクトルの場合で、一つのベクトルが二つ以上の固有値の一般化固有ベクトルになることはありえない（ただし $\vec{0}$ を除く）ことを示そう。

多項式に関するユークリッドの互除法から導かれる定理として、

結果 50: 共通因数を持たない多項式に関する定理

すべてに共通な因数を持たない多項式の組 $\{f_1(x), f_2(x), \cdots f_k(x)\}$ に対し、適切な多項式の組 $\{A_1(x), A_2(x), \cdots, A_k(x)\}$ を持ってくれば

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(x) f_i(x) = 1 \tag{6.70}$$

になるようにできる。

がある（もし共通因数があったら、どうやっても右辺にその共通因数が残る）。証明は付録のA.2 節→ p117 を見よ。$\boxed{\text{結果 50}}$ を使って、特性多項式に関し

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(x) \frac{\phi_{\mathbf{M}}(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}} = 1 \tag{6.71}$$

という式をまず作る。$\dfrac{\phi_{\mathbf{M}}(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}}$ は「分数」になっているので多項式ではないのでは？ —と心配になるからもしれないが、(6.63)→ p98 に示したように、$\phi_{\mathbf{M}}$ は $(x-\lambda_i)^{m_i}$ を含んでいて

$$\frac{\phi_{\mathbf{M}}(x)}{(x-\lambda_i)^{m_i}} = \frac{\prod_k (x-\lambda_k)^{m_k}}{(x-\lambda_i)^{m_i}} = \prod_{k\neq i} (x-\lambda_k)^{m_k} \tag{6.72}$$

となり、「割った」というよりは「掛けるのをやめた」ものであり、多項式である。ゆえに (6.71) を満たす係数 $\{A_*(x)\}$ を見つけることができる。

上の式は x を行列 $\mathbf{M}$ に変えても成り立つ[†25]。x を $\mathbf{M}$ に置き換え

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{M}) \frac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}} = \mathbf{I} \tag{6.73}$$

も、もちろん成り立つ（こちらの式の分母に $(\mathbf{M}-\lambda_i)^{m_i}$ があることも、上と同様に考えれば問題はない。実際にはこの計算の中で分数は出てこない）。

$\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j})$ に属するベクトルを $\vec{v}_{\rangle}{}^{m_j}{}_{\lambda_j}$ と書くことにして[†26]、このベクトルに上の行列を掛けよう。j 番目の項 $\left(A_j(\mathbf{M})\dfrac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}}\right)$ 以外は因子 $(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}$ を含むので消えてしまい、

$$A_j(\mathbf{M}) \frac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}} \vec{v}_{\rangle}{}^{m_j}{}_{\lambda_j} = \vec{v}_{\rangle}{}^{m_j}{}_{\lambda_j} \tag{6.74}$$

となる。すなわち $\left(A_j(\mathbf{M})\dfrac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}}\right)$ は

$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{\rangle}{}^{m_j}{}_{\lambda_j} \text{ に掛かると } \mathbf{I} \text{ を掛けるのと同じ（何もしない）} \\ \text{それ以外に掛かると } \mathbf{0} \text{ を掛けるのと同じ（消す）}\end{array}\right.$ という行列になっている（左固有ベクトル $(\vec{v}_{\lambda_j\langle})^\top$ に対しても同様）。

[†24] 高さ h であるときは $\rangle$ の上につける添字を (h) にして単なる一般化右固有ベクトルと区別することにする。

[†25] 「数である x の式なら成り立っても、行列では成り立たないのでは？」と心配する人もいるだろうが大丈夫。「数ではいいけど行列だと困る」ことになる原因は「行列の積が交換しないこと」なのだが、今の場合登場する行列は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ だけなので、行列の非可換性が問題になることはないのである。

[†26] このベクトルの独立な本数が 1 とは限らないことに注意。

以後、$\boxed{\mathbf{\Pi}_j \equiv A_j(\mathbf{M})\dfrac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}}}$ と書いて、これを「$\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})^{m_j})$ への射影演算子」と呼ぼう。

これで、$\boxed{(\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I})^{m_i}=\vec{0}}$ と $\boxed{(\mathbf{M}-\lambda_j\mathbf{I})^{m_j}=\vec{0}}$（$i\neq j$）の両方を満たす $\vec{0}$ でないベクトルは存在しないことがわかる。両方を満たすベクトルは、射影演算子 Π_* のどれを掛けても 0 になるが、$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\Pi_i=\mathbf{I}}$ だから、それは「$\mathbf{I}$ を掛けると $\vec{0}$」で、そんなベクトルは $\vec{0}$ だけである。

6.5.2　直和分解されたベクトル空間

$\mathbf{M}$ は $\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I}$ と交換するので、$\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1})$ に属するベクトルは $\mathbf{M}$ を掛けても $\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1})$ 内に留まる（つまり、$\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1})$ は、$\mathbf{M}$ の不変部分空間である）。→ p137 $\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1})$ と $\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})^{m_2})$ に重なりがないので、$\begin{bmatrix}\vec{v}_{\rangle m_1\lambda_1}\\ \vec{v}_{\rangle m_2\lambda_2}\\ \vdots\\ \vec{v}_{\rangle m_k\lambda_k}\end{bmatrix}$ と基底を取ることにより、

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{(2)} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_{(k)}\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}}\begin{bmatrix}\vec{v}_{\rangle m_1\lambda_1}\\ \vec{v}_{\rangle m_2\lambda_2}\\ \vdots\\ \vec{v}_{\rangle m_k\lambda_k}\end{bmatrix} \tag{6.75}$$

のように $\mathbf{M}$ がブロック化されることがわかる。

このように行列が対角ブロックに分けられたとき、

$$\det\mathbf{M}=\det\mathbf{M}_{(1)}\times\det\mathbf{M}_{(2)}\times\cdots\times\det\mathbf{M}_{(k)} \tag{6.76}$$

となる。

行列から $\lambda\mathbf{I}$ を引いても同じことが言えるので、

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=\det(\mathbf{M}_{(1)}-\lambda\mathbf{I})\times\det(\mathbf{M}_{(2)}-\lambda\mathbf{I})\times\cdots\times\det(\mathbf{M}_{(k)}-\lambda\mathbf{I}) \tag{6.77}$$

となる[†27]。

左辺は $(\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{m_k}$（(6.63)を参照）→ p98 なので、それらの各因子を

$$\underbrace{\det(\mathbf{M}_{(1)}-\lambda\mathbf{I})}_{(\lambda_1-\lambda)^{m_1}}\times\underbrace{\det(\mathbf{M}_{(2)}-\lambda\mathbf{I})}_{(\lambda_2-\lambda)^{m_2}}\times\cdots\times\underbrace{\det(\mathbf{M}_{(k)}-\lambda\mathbf{I})}_{(\lambda_k-\lambda)^{m_k}} \tag{6.78}$$

のように割り振るしかない[†28]。これは、$\mathbf{M}_{(j)}$ が $m_j\times m_j$ 行列であることを意味している（つまり、今考えている $\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j})$ は m_j 次元のベクトル空間である）。

6.6　一般化固有ベクトルの空間

以下では $\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda)^m)$ という m 次元の空間のみを考える。よって行列 $\mathbf{M}$ も $m\times m$ 行列として考えていく（もともとの $N\times N$ 行列 $\mathbf{M}$ の直和分解で得られたものと考えてもよい）。このベクトル空間の基底をどのように取るかを考えていこう。

6.6.1　ジョルダン鎖

まず簡単な場合として $\boxed{m=2}$ を考えよう。$\boxed{(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2\vec{v}=\vec{0}}$ を満たすベクトルとして、

(1) $\boxed{(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}}$ を満たすベクトル（つまり普通の固有ベクトル）

[†27] ここに現れる $\mathbf{I}$ はそれぞれ次元が違うことに注意。

[†28] $(\mathbf{M}_{(1)}$ は固有値を λ_1 しか持たないはず。よって $(\mathbf{M}_{(1)}-\lambda\mathbf{I})$ の行列式は $\lambda_1-\lambda$ 以外の因数を持てない。

(2) $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\vec{v}\neq\vec{0}$ だが $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2\,\vec{v}=\vec{0}$ になるベクトル

が考えられる。

✎ 例を一つ。$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$ という行列を考える。この行列の特性方程式は $(2-\lambda)^2=0$ であるから固有値は 2 で、$\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ となる。$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2=0$ だから、$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ も $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ も $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2$ に入る。

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ を掛けると $\vec{0}$（つまり上の (1) のケース）であり、

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ を掛けると $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ になり、$\vec{0}$ ではない。$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ をもう一度掛けると $\vec{0}$ になる（つまり上の (2) のケース)。

このあたりの計算で、線形二階微分方程式を解いていて特性方程式が重解になったとき、つまり微分方程式が $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda\right)^2 f(x)=0$ の形になったときのことを思い出した人もいるかもしれない。あのときも解が

(1) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda\right) f(x)=0$ を満たす関数

(2) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda\right) f(x)\neq 0$ だが $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda\right)^2 f(x)=0$ になる関数

の 2 種類があった。

そして (1) に属するベクトルの中には、

(1-a) $\vec{v}=(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\vec{w}$ と表現できるベクトル（$\vec{w}$ は $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2\,\vec{w}=\vec{0}$ を満たす）

(1-b) $\vec{v}=(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\vec{w}$ と表現できないベクトル

が有り得る。上の✎の中で考えた $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ と表現できるので、(1-a) のケースである。

このような「$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})$ を掛けることによってつながれる一連の複数のベクトルの組」に「**ジョルダン鎖 (Jordan chain)**」[†29]という名前をつけよう。上の例なら、$\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ がジョルダン鎖である。

定義 22: ジョルダン鎖

$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^h\vec{v}=\vec{0}$ で $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^{h-1}\vec{v}\neq\vec{0}$ であるベクトル（高さ h の一般化固有ベクトル）があったとすると、掛ける $\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ の数が h より少ないベクトルを集めて作った一連の複数のベクトルの集合

$$\vec{v},(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v},(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2\vec{v},\cdots,(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^{h-1}\vec{v} \tag{6.79}$$

を「ジョルダン鎖」と呼ぶ。これらはすべて $\mathrm{Ker}\left((\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^h\right)$ に属する。

イメージとしては、$\vec{v}$ が一番「高い」ベクトルで、$\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ を掛けるごとに高さが「下がる」と考えればよい。もっとも低い , $(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^{h-1}\vec{v}$ はもう一つ $\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ を掛けると 0 になる（つまり $\mathbf{M}$ の通常の意味での固有ベクトル)。

以下のことが言える。

結果 51: ジョルダン鎖は線形独立

(6.79) に属するベクトル（全部で h 本）は線形独立である。

[†29] この場合の「鎖 (chain)」は「連鎖反応 (chain reaction)」の「連鎖」に近い意味あいを持つ言葉。

証明しよう。これらが線形独立でない、すなわち

$$\sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^i \vec{v} = \vec{0} \tag{6.80}$$

を満たす 0 ではない係数 $\{\alpha_*\}$ が存在するとまず仮定する。この式に前から $(\mathbf{M} - \lambda)\mathbf{I}^{h-1}$ を掛けると $i = 0$ である第 1 項以外は $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^h \vec{v} = 0$ から 0 になり、

$$\alpha_0 (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{h-1} \vec{v} = \vec{0} \tag{6.81}$$

となってしまう。$\alpha_0 \neq 0$ であれば、$(\mathbf{M} - \lambda)^{h-1}\vec{v} = \vec{0}$ となって仮定に反する。$\alpha_0 = 0$ であれば、$i = 0$ の項がなくなった

$$\sum_{i=1}^{h-1} \alpha_i (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^i \vec{v} = 0 \tag{6.82}$$

が成り立つ。これに $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{h-2}$ を掛ければ今度は $\alpha_1 (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{h-1}\vec{v} = \vec{0}$ となる。よって α_1 が 0 になってしまい、同様の手順を繰り返すことにより最後には $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{h-1}\vec{v} = \vec{0}$ となって仮定に反する。

つまり、「高さ h の一般化固有ベクトル」が見つかったら、m 次元空間の $\mathrm{Ker}((\mathbf{M} - \lambda)^m)$ の中に h 本の基底ベクトルを見つけた。$h = m$ であればすべての基底ベクトルを見つけたが、そうでない場合は残る $m - h$ 次元の空間の中にどんなベクトルがあるかを探っていく。

6.6.2 ジョルダン鎖を基底とした行列

以下では $h = m$ として考える（そうでない場合は、空間を分けて考え直せばよい）。前項のようにして見つけた独立なベクトルの組を

$$\vec{v}_{(i)} = (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{h-i}\vec{v} \quad (1 \leq i \leq h) \tag{6.83}$$

と書くことにする（$\vec{v}_{(h)} = \vec{v}$ として、$\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ が掛かるごとに添字の () 内の数字が下がるようにした)）。これに $\mathbf{M}$ を掛けるとどうなるかを見てみよう。$\mathbf{M} = \lambda + (\mathbf{M} - \lambda)$ を使って、

$$\mathbf{M}\vec{v}_{(i)} = \lambda\vec{v}_{(i)} + \underbrace{(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_{(i)}}_{\vec{v}_{(i-1)}} \tag{6.84}$$

が成り立つことがわかる（ただし $i = 1$ のときは右辺第 2 項は 0)。

つまり、$\mathbf{M}$ を掛けた結果は元のベクトルを λ 倍したものと一つ $\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ のべきが上がったベクトルの和となり、

$$\mathbf{M} \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_{(1)} & \vec{v}_{(2)} & \cdots & \vec{v}_{(h-1)} \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \lambda\vec{v}_{(1)} & \lambda\vec{v}_{(2)} + \vec{v}_{(1)} & \cdots & \lambda\vec{v}_{(h)} + \vec{v}_{(h-1)} \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

と表現できる。この式は

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) \begin{bmatrix} \vec{v}_{(1)} & \vec{v}_{(2)} & \vec{v}_{(3)} & \cdots & \vec{v}_{(h)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{v}_{(1)} & \vec{v}_{(2)} & \cdots & \vec{v}_{(h-1)} \end{bmatrix} \tag{6.86}$$

と書いてもよい。「$\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ を掛けることにより、$\vec{v}_{(i)}$ が右に移動する」ことがわかる。同じことを「$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})$ が、$\vec{v}_{(i)}$ の添字 i を下げる（たとえば、$\vec{v}_{(2)}$ が $\vec{v}_{(1)}$ に変わる)」というイメージで考えてもよい。

この $\mathbf{P}$ を使った相似変換を行うと、

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0&0\end{bmatrix}\tag{6.87}$$

となる（この行列が $\vec{v}_{(i)}$ の i をずらす行列になっている）ことがわかるので、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0&0&0\\0&\lambda&1&\cdots&0&0&0\\0&0&\lambda&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&1&0\\0&0&0&\cdots&0&\lambda&1\\0&0&0&\cdots&0&0&\lambda\end{bmatrix}\tag{6.88}$$

となる。$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ は「元のベクトルを λ 倍したものと一つ $\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ のべきが上がったベクトル」を作る行列になっている。

この形の行列を「**ジョルダン細胞 (Jordan cell)**」[†30]と呼ぶ。$n\times n$ で固有値 λ のジョルダン細胞を $J_n(\lambda)$ と書くことにすると、

$$\mathbf{J}_1(\lambda)=[\lambda],\quad \mathbf{J}_2(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix},\quad \mathbf{J}_3(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix},\cdots\tag{6.89}$$

である。$\mathbf{J}_1$ は単なる数（固有値）であり、$\mathbf{J}_2$ 以上がある場合にジョルダン鎖が存在する。

【問い 6-4】 以下の行列は相似変換するとジョルダン細胞になる。実行せよ。

(1) $\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}3&-1&0\\-2&2&1\\-2&-3&4\end{bmatrix}$

ヒント → p140 へ　解答 → p144 へ

6.7 ジョルダン標準形

ここまでの話からすると、

- (6.64) → p98 $\boxed{(\mathbf{M}-\lambda_1)^{m_1}(\mathbf{M}-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\mathbf{M}-\lambda_k)^{m_k}=\mathbf{0}}$（Cayley-Hamilton の定理）を使って、ベクトル空間を固有ベクトルまたは一般化固有ベクトルの部分空間（$\mathrm{Ker}((\mathbf{M}-\lambda_i)^{m_i})$ に分けることができる。
- それぞれの一般化固有ベクトルの空間内での $\mathbf{M}$ は相似変換することでジョルダン細胞にできる。

とわかる。

ゆえに行列は相似変換により、以下に示す「**ジョルダン標準形 (Jordan normal form)**」[†31]にできる。

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|cc}\mathbf{J}_{m_{1,1}}(\lambda_1)&&&&&&&&\\&\mathbf{J}_{m_{1,2}}(\lambda_1)&&&&&&&\\&&\ddots&&&&&&\\&&&\mathbf{J}_{m_{1,c_1}}(\lambda_1)&&&&&\\\hline&&&&\mathbf{J}_{m_{2,1}}(\lambda_2)&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&\mathbf{J}_{m_{2,c_2}}(\lambda_2)&&\\\hline&&&&&&&\mathbf{J}_{m_{3,1}}(\lambda_3)&\\&&&&&&&&\ddots\end{array}\right]\tag{6.90}$$

[†30] 英単語「cell」はもともと「小部屋」という意味で、転じて生物の「細胞」の意味をも持つ。

[†31] 「Jordan canonical form」というもっと偉そうな呼び方もある。

c_i は固有値 λ_i の部分空間に掛かる行列が何個のジョルダン細胞を持っているかを表す数字で、$m_{i,j}$ は j 番目のジョルダン細胞の行列の行数（列数）である。

ジョルダン細胞が全て $\mathbf{J}_1$ である場合、この行列は対角行列である。それ以外の場合は上三角行列になっている。

ジョルダン標準形が便利なのは、この形の行列を使った計算方法がたくさん作られていることである（次章以降を参照)。

【問い 6-5】 2×2 行列のジョルダン標準形は $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ の 3 種類の形しかない。3×3 行列ではどうか？ 解答 → p145 へ

6.8 対角化可能条件

行列 $\mathbf{M}$ が、正則な行列 $\mathbf{P}$ を選ぶことで相似変換により $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ を対角行列にできるとき、「$\mathbf{M}$ は対角化可能である」と言う。この節では、行列が対角化可能であるための条件を考えていこう。

ここまでの対角化の手法を見ていくと、次の条件があることはすぐにわかるだろう。

結果 52: 対角化可能条件と固有ベクトルの本数

$N\times N$ 行列が固有ベクトル（右固有ベクトルでも左固有ベクトルでも可）を N 本持っていることは、対角化可能である必要十分条件である。

まず右固有ベクトルが N 本ある $\Rightarrow$ 対角化可能を示そう。右固有ベクトルが N 本あるとしたのだから、それらを $\{\vec{v}^*\}$ （$=\vec{v}^1,\vec{v}^2,\cdots\vec{v}^N$）としてこの空間の基底に採用しよう。それぞれのベクトルは $\boxed{\mathbf{M}\vec{v}^i=\lambda_i\vec{v}^i}$ を満たすとする（固有値 $\{\lambda_*\}$ の中には同じものがあってもよい）。(5.36)→ p84 でやったように、このベクトルを列ベクトルにして並べた行列

$$\boxed{\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \vec{v}^1 & \vec{v}^2 & \cdots & \vec{v}^N \end{bmatrix}}$$

を作り、固有ベクトル $\{\vec{v}^*\}$ を基底としたときの双対基底→ p22 $\{\vec{v}_*\}$ を用意して、これを行ベクトルにして並べることで逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を作る。

$\mathbf{P}$ と $\mathbf{P}^{-1}$ により、$\mathbf{M}$ は

$$\begin{aligned}
\overbrace{\begin{bmatrix} (\vec{v}_1)^\top \\ (\vec{v}_2)^\top \\ \vdots \\ (\vec{v}_N)^\top \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}^{-1}} \mathbf{M} \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}^1 & \vec{v}^2 & \cdots & \vec{v}^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} (\vec{v}_1)^\top \\ (\vec{v}_2)^\top \\ \vdots \\ (\vec{v}_N)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}\vec{v}^1 & \mathbf{M}\vec{v}^2 & \cdots & \mathbf{M}\vec{v}^N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\vec{v}_1)^\top \\ (\vec{v}_2)^\top \\ \vdots \\ (\vec{v}_N)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}^1 & \lambda_2\vec{v}^2 & \cdots & \lambda_N\vec{v}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.91}$$

となって、対角化される。「左固有ベクトルが N 本ある」を出発点とするなら、先に $\mathbf{P}^{-1}$ の方ができるだけで、後は同じである。

この逆右（左）固有ベクトルが N 本ある $\Leftarrow$ 対角化可能は簡単で、対角化可能なら対角化するための行列 $\mathbf{P}$ があることなのだから、その行列を列ベクトルにばらせば、「独立な右固有ベクトル N 本の組」ができる。同様に、$\mathbf{P}^{-1}$ の方から、「独立な左固有ベクトル N 本の組」が得られる。

6.9　交換する行列の同時対角化

以下の定理がある。

結果 53: 交換する行列は同時対角化可能

行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ がどちらも $N\times N$ 行列で、それぞれ対角化可能で、交換する $\boxed{[\mathbf{A},\mathbf{B}]=0}$ とき、二つの行列を同時に対角化する正則行列 $\mathbf{P}$ が存在する（つまり、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ も $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ も対角行列になる。

$\mathbf{A},\mathbf{B}$ が対角化可能だということは、考えている N 次元のベクトル空間に

$$\underbrace{\vec{v}^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{A}1}},\vec{v}^{(2)}_{\lambda_{\mathrm{A}1}},\cdots,\vec{v}^{(m_1)}_{\lambda_{\mathrm{A}1}}}_{\text{固有値}\lambda_{\mathrm{A}1}\text{のグループ}},\vec{v}^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{A}2}},\vec{v}^{(2)}_{\lambda_{\mathrm{A}2}},\cdots,\vec{v}^{(m_2)}_{\lambda_{\mathrm{A}2}},\cdots,\vec{v}^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{A}k}},\vec{v}^{(2)}_{\lambda_{\mathrm{A}k}},\cdots,\vec{v}^{(m_k)}_{\lambda_{\mathrm{A}k}} \tag{6.92}$$

のような基底ベクトルを取ることができるということである（対角化可能は仮定したが、固有値が縮退 → p92 してないことは仮定してないので、同じ固有値の基底が複数個あるとした）。$\mathbf{B}$ に対しても同様の基底を考えることもできる。

$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が交換するということは、

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\vec{v}_{\lambda_{\mathrm{A}}}=\mathbf{B}\mathbf{A}\vec{v}_{\lambda_{\mathrm{A}}}=\lambda_{\mathrm{A}}\mathbf{B}\vec{v}_{\lambda_{\mathrm{A}}} \tag{6.93}$$

が成り立つので、$\mathbf{A}$ の固有ベクトル $\vec{v}_{\lambda_{\mathrm{A}}}$ に $\mathbf{B}$ を掛けても、やはり $\mathbf{A}$ の固有ベクトル（固有値 λ_{A}）であることが言える。ゆえに、$\mathbf{B}$ を掛けるという操作は上に書いた「グループ」のベクトル内部での変換になる。つまり、上の基底を使うと行列は

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_1&&&&\\\hline&&&\lambda_2&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&\lambda_2&\\\hline&&&&&&\ddots\end{array}\right],\quad\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{B}_1&&\\\hline&\mathbf{B}_2&\\\hline&&\ddots\end{array}\right] \tag{6.94}$$

のようにブロック化されている。よってこの後、

$$\left[\begin{array}{c|c|c}(\mathbf{P}_1)^{-1}&&\\\hline&(\mathbf{P}_2)^{-1}&\\\hline&&\ddots\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{B}_1&&\\\hline&\mathbf{B}_2&\\\hline&&\ddots\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{P}_1&&\\\hline&\mathbf{P}_2&\\\hline&&\ddots\end{array}\right] \tag{6.95}$$

のように相似変換することで、両方が対角化される（この相似変換で、$\mathbf{A}$ は変換されないことに注意）。

$\mathbf{A},\mathbf{B}$ が同時対角化された場合の基底ベクトルは $\vec{v}^{(i)}_{\lambda_A,\lambda_B}$ のように、二つの行列の固有値で分類される。

6.10　ユニタリ行列による対角化と正規行列

相似変換による対角化のなかで、特に重要なのが「ユニタリ行列」による対角化である。ユニタリ行列の定義を述べる。

定義 23: ユニタリ行列

$\boxed{\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger=\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}=\mathbf{I}}$ を満たす正方行列、すなわち $\boxed{\mathbf{U}^\dagger=\mathbf{U}^{-1}}$ である行列を「**ユニタリ行列 (unitary matrix)**」と呼ぶ。

ユニタリ行列[†32]はいわば、「直交行列の複素化」→ p122 である。直交行列が「直交」なのは「行列を列ベクトルの組とみた

[†32] ユニタリ行列の「ユニタリ (unitary)」は「1」を意味する。

とき、列ベクトルは相互に直交している（内積が 0)」という意味であったが、ユニタリ行列も、

$$\overbrace{\begin{bmatrix}(\vec v_1)^\dagger\\(\vec v_2)^\dagger\\\vdots\\(\vec v_N)^\dagger\end{bmatrix}}^{\mathbf U^\dagger}\overbrace{\begin{bmatrix}\vec v_1&\vec v_2&\cdots&\vec v_N\end{bmatrix}}^{\mathbf U}=\begin{bmatrix}\underbrace{(\vec v_1)^\dagger\vec v_1}_{1}&\underbrace{(\vec v_1)^\dagger\vec v_2}_{0}&\cdots&\underbrace{(\vec v_1)^\dagger\vec v_N}_{0}\\\underbrace{(\vec v_2)^\dagger\vec v_1}_{0}&\underbrace{(\vec v_2)^\dagger\vec v_2}_{1}&\cdots&\underbrace{(\vec v_2)^\dagger\vec v_N}_{0}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\underbrace{(\vec v_N)^\dagger\vec v_1}_{0}&\underbrace{(\vec v_N)^\dagger\vec v_2}_{0}&\cdots&\underbrace{(\vec v_N)^\dagger\vec v_N}_{1}\end{bmatrix}=\mathbf I \tag{6.96}$$

と考えることができる。ここで、$\mathbf P^{-1}$ と $\mathbf P$ の場合[†33]と違い、$\mathbf U$ に含まれる列ベクトルと $\mathbf U^\dagger$ に含まれる行ベクトルは互いにエルミート共役（†）の関係にある。「$\mathbf U$ を列ベクトルの組とみなしたときの列ベクトル」が複素ベクトル空間の直交条件（$(\vec v_i)^\dagger\vec v_j=\delta_{ij}$ または $\vec v_i\cdot\vec v_j=\delta_{ij}$[†34]を満たしている。

定義 24: ユニタリ変換

列ベクトルを $\vec a\to\mathbf U\vec a$、行ベクトルを $(\vec b)^\dagger\to(\vec b)^\dagger\mathbf U^\dagger$、同時に行列を $\mathbf M\to\mathbf{UMU}^\dagger$ と変換[†35] することを「**ユニタリ変換 (unitary transformation)**」と呼ぶ。

相似変換に使う行列 $\mathbf P$ を列ベクトルに分けた組は「独立」という条件を満たしていればよかったが、ユニタリ変換に使う行列 $\mathbf U$ および $\mathbf U^\dagger$ を列ベクトルに分けたときは「互いに直交して、ノルムが 1」という条件を満たさなくてはいけない。ユニタリ変換は相似変換の一種だから行列式、トレース、階数を保存する。さらにユニタリ変換は複素ベクトルの内積[†36] $\vec a\cdot\vec b=(\vec a)^\dagger\vec b$ を保存する。すなわち、$\vec a\longrightarrow\mathbf U\vec a$, $\vec b\longrightarrow\mathbf U\vec b$ という変換に対して、

$$(\vec a)^\dagger\vec b\longrightarrow(\vec a)^\dagger\mathbf U^\dagger\mathbf U\vec b=(\vec a)^\dagger\vec b \tag{6.97}$$

と変換される（性質 $\mathbf U^\dagger\mathbf U=\mathbf I$ を使った)。

行列がユニタリ変換で対角化できる条件が以下であることが知られている（証明はこの後すぐ行う)。

結果 54: ユニタリ行列による対角化可能条件と正規行列

正方行列 $\mathbf M$ が $\mathbf M^\dagger\mathbf M=\mathbf{MM}^\dagger$ を満たす（このような行列を「**正規行列**」と呼ぶ[†37]）ことは、ユニタリ変換で対角化可能である必要十分条件である。

この定理から、エルミート行列（$\mathbf H=\mathbf H^\dagger$ を満たす行列）とユニタリ行列（$\mathbf U^{-1}=\mathbf U^\dagger$ を満たす行列）は常にユニタリ変換で対角化可能であることがわかる[†38]。

結果 54 を証明しよう。

まず、ユニタリ変換で対角化可能 $\Longrightarrow$ $\mathbf M^\dagger\mathbf M=\mathbf{MM}^\dagger$ を示す。$\mathbf M'=\mathbf{UMU}^\dagger$ が対角行列になるとして、この式

[†33] $\mathbf P$ に含まれる列ベクトルと $\mathbf P^{-1}$ に含まれる行ベクトルは互いに双対ではあるが、エルミート共役とは限らない。

[†34] 複素ベクトルの内積 $\vec v\cdot\vec w$ は $(\vec v)^\dagger\vec w$ で定義されていることに注意。

[†35] なお、ユニタリ変換を $\mathbf{UMU}^\dagger$ と書くか $\mathbf U^\dagger\mathbf{MU}$ と書くかは、$\mathbf U$ をどっちだと思うかの違いでしかないので、本質的な差はない。どっちを使ってもよい。

[†36] 実は量子力学などでこの内積は重要な物理的意味を持つのである。

[†37] $\mathbf M^\dagger\mathbf M=\mathbf{MM}^\dagger$ を満たさない行列はたくさんある。たとえば、$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$。

[†38] エルミート行列（一般化するとエルミート演算子）がユニタリ変換で対角化できることは、量子力学等で重要である。重要であるからこそ「内積が保存する」ユニタリ変換に大きな意味がある。

全体のエルミート共役を取ると[†39]、

$$\left(\mathbf{UMU}^\dagger\right)^\dagger = (\mathbf{U}^\dagger)^\dagger\mathbf{M}^\dagger\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{UM}^\dagger\mathbf{U}^\dagger \tag{6.98}$$

となる。$\mathbf{UMU}^\dagger$ が対角行列だったので、そのエルミート共役である $\mathbf{UM}^\dagger\mathbf{U}^\dagger$ も対角行列である[†40]。対角行列どうしは交換するから、

$$\begin{aligned} \mathbf{UM}\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{\mathbf{I}}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{UM}^\dagger\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{\mathbf{I}}\mathbf{MU}^\dagger \\ \longrightarrow \quad \mathbf{UMM}^\dagger\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{UM}^\dagger\mathbf{MU}^\dagger \end{aligned} \tag{6.99}$$

である。これを逆ユニタリ変換（左から $\mathbf{U}^\dagger$、右から $\mathbf{U}$ を掛ける）すれば $\boxed{\mathbf{MM}^\dagger = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}}$ となる。

この逆 $\boxed{\text{ユニタリ変換で対角化可能} \Longleftarrow \boxed{\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = \mathbf{MM}^\dagger}}$ を示すため、まず $\mathbf{M}$ の固有ベクトルと $\mathbf{M}^\dagger$ の固有ベクトルの関係を示す。$\vec{v}_{\rangle\lambda}$ が $\boxed{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda} = \lambda\vec{v}_{\rangle\lambda}}$、すなわち $\boxed{(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{\rangle\lambda} = \vec{0}}$ を満たすとすると、「零ベクトルのノルムは 0」なので

$$\left|(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{\rangle\lambda}\right|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\left(\mathbf{M}^\dagger - \lambda^*\mathbf{I}\right)(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{\rangle\lambda} = 0 \tag{6.100}$$

が言える。ところが $\mathbf{M}$ と $\mathbf{M}^\dagger$ は交換するから、

$$(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\left(\mathbf{M}^\dagger - \lambda^*\mathbf{I}\right)\vec{v}_{\rangle\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \left|(\mathbf{M}^\dagger - \lambda^*\mathbf{I})\vec{v}_{\rangle\lambda}\right|^2 = 0 \tag{6.101}$$

でもある。よって、$\boxed{\left(\mathbf{M}^\dagger - \lambda^*\mathbf{I}\right)\vec{v}_{\rangle\lambda} = \vec{0}}$ である。つまり、以下が成り立つ。

結果 55: 正規行列の固有値

$\mathbf{M}$ が正規行列のとき、$\mathbf{M}$ の固有ベクトル（固有値 λ）は、同時に $\mathbf{M}^\dagger$ の固有ベクトル（固有値 λ^*）でもある。

† を取ると $\boxed{(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = \vec{0}}$ も導ける。この式を使って、固有値が違う二つの固有ベクトルの内積について

$$\underbrace{(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\mathbf{M}}_{\text{こっちを先に計算}}\vec{v}_{\rangle\lambda'} = \lambda(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\vec{v}_{\rangle\lambda'} \qquad (\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\underbrace{\mathbf{M}\vec{v}_{\rangle\lambda'}}_{\text{こっちを先に計算}} = \lambda'(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\vec{v}_{\rangle\lambda'} \tag{6.102}$$

$$\text{ゆえに} \qquad \lambda(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\vec{v}_{\rangle\lambda'} = \qquad \lambda'(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\vec{v}_{\rangle\lambda'}$$

と計算できるので、$\boxed{\lambda \neq \lambda'}$ のときに $\boxed{(\vec{v}_{\rangle\lambda})^\dagger\vec{v}_{\rangle\lambda'} = 0}$ が言える。これは固有値の違う固有ベクトルが互いに直交することを意味する[†41]。同じベクトルどうしの内積（ノルムの自乗）は正になるが、これが 1 になるように規格化したとしよう（もし同じ固有値のベクトルが何本かある場合はGram-Schmidt → p81 を使って直交規格化しておこう）。

次に、$\mathbf{M}$ が正規行列の場合はジョルダン鎖を持てないことを示す。

(6.83) → p103 のベクトルの列 $\boxed{\vec{v}_{(i)} = (\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^{h-i}\vec{v} \quad (1 \leq i \leq h)}$ が存在していたとしよう。このベクトルの列に対し、右のような一連の式が成り立つ。「$\vec{v}_{(h)}$ が一番高く、$\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ を掛けると下がっていく。一番底が $\vec{v}_{(1)}$」というイメージである。

ジョルダン鎖

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{(h)} = \vec{v}_{(h-1)} \tag{6.103}$$

$$\vdots$$

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{(2)} = \vec{v}_{(1)} \tag{6.104}$$

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{(1)} = \vec{0} \tag{6.105}$$

結果 55 から、$\boxed{(\mathbf{M}^\dagger - \lambda^*\mathbf{I})\vec{v}_{(1)} = \vec{0}}$ が言えるので、この式のエルミート共役 $\boxed{(\vec{v}_{(1)})^\dagger(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = (\vec{0})^\dagger}$ に右から $\vec{v}_{(2)}$ を掛けると、

$$(\vec{v}_{(1)})^\dagger\underbrace{(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}_{(2)}}_{\vec{v}_{(1)}} = \vec{0} \tag{6.106}$$

[†39] エルミート共役は「転置＋複素共役」であるから、転置のときに順番が入れ替わること—すなわち $\boxed{(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger, (\mathbf{ABC})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger}$ に注意。

[†40] すなわち「$\mathbf{M}$ がユニタリ変換で対角化可能なら、$\mathbf{M}^\dagger$ は同じユニタリ変換で同時対角化可能 → p106」である。

[†41] 前にエルミート行列の場合こうなる、という説明をしたが、実はエルミート行列でない場合でも正規行列ならこれが言える。

となるが、これは $\boxed{(\vec{v}_{(1)})^\dagger\vec{v}_{(1)}=0}$（$\vec{v}_{(1)}$ のノルムが0）で、$\boxed{\vec{v}_{(1)}=\vec{0}}$ を意味する。ゆえに、$\mathbf{M}$ が正規行列である場合は、ジョルダン鎖が存在できない。

ということは $\mathbf{M}$ の特性方程式が λ の重解を持っていたとしても、ベクトル空間の中にジョルダン鎖ができることはなく、N 次元空間なら N 本の固有ベクトル $\vec{v}_{\rangle\lambda}$ でその空間が張られている。そしてその N 本の固有ベクトルは互に直交する。このとき行列 $\boxed{\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_1}} & \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_2}} & \cdots & \boxed{\vec{v}_{\rangle\lambda_N}}\end{bmatrix}}$ はユニタリ行列であり、$\boxed{\mathbf{P}^\dagger=\begin{bmatrix}\boxed{((\vec{v}_{\rangle\lambda_1})^\dagger} \\ \boxed{(\vec{v}_{\rangle\lambda_2})^\dagger} \\ \vdots \\ \boxed{(\vec{v}_{\rangle\lambda_N})^\dagger}\end{bmatrix}}$ が正しくその逆行列となっている。

6.11　章末演習問題

★【演習問題 6-1】

一般の多項式 $f(x)$ を考えて、その x に $\mathbf{A}$ を「代入」（同時にスカラー部分はそれに単位行列を掛けたものを「代入」）したものを $f(\mathbf{A})$ と書く。一般の多項式で

$$f(y)-f(x)=(y-x)g(x,y) \tag{6.107}$$

が成り立つ[†42]。この式の y に $\mathbf{M}$ を、x に $x\mathbf{I}$ を「代入」して

$$f(\mathbf{M})-f(x)\mathbf{I}=(\mathbf{M}-x\mathbf{I})g(x,\mathbf{M}) \tag{6.108}$$

という式も作ることができる。登場した行列は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ しかなく、$\mathbf{M}$ は自分自身とは交換するし、$\mathbf{I}$ はすべての行列と交換するので、計算は数の場合と全く同様に行える。このことから、まず $\boxed{f(\mathbf{M})=\mathbf{0} \text{ ならば } f(x)\mathbf{I}=-(\mathbf{M}-x\mathbf{I})g(x,\mathbf{M})}$ が言える。

ここまでの段階では、$f(x)$ は任意の多項式であるが、以下では行列 $\mathbf{M}$ の特性多項式であるとする。そのとき、$\boxed{f(\mathbf{M})=\mathbf{0}}$ を示せ。

ヒント → p148 へ　解答 → p151 へ

★【演習問題 6-2】

行列 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ の右固有ベクトルと左固有ベクトルを求めて、固有値が異なる右固有ベクトルと左固有ベクトルは直交することを具体的計算により確認せよ。

解答 → p151 へ

★【演習問題 6-3】

ジョルダン細胞 $\mathbf{J}_i(\lambda)$ の逆行列を求めよ。

ヒント → p148 へ　解答 → p151 へ

★【演習問題 6-4】

行列 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ のそれぞれについて、

(1)特性方程式を出し、固有値を求めよ。
(2)固有ベクトルと、一般化固有ベクトルがある場合はジョルダン鎖を求めよ。
(3)Cayley-Hamilton の式が成り立っていることを確認せよ。
(4)ベクトル空間をそれぞれの一般化固有ベクトルの空間に射影する行列、つまり (6.74) → p100 の $A_j(\mathbf{M})\dfrac{\phi_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})}{(\mathbf{M}-\lambda_j)^{m_j}}$ を作れ。ただし、一つの一般化固有ベクトルになる場合を除く（その場合は射影する必要がない）。

解答 → p151 へ

[†42] $f(x)$ は多項式なので、それぞれの m 次の項を取り出して、各項ごとに y^m-x^m が $(y-x)(y^{m-1}+y^{m-2}x+y^{m-3}x^2+\cdots+x^{m-1})$ と因数分解できることを見ればすぐに証明できる。

第 7 章　行列の微積分と指数・対数

7.1　行列の微分

7.1.1　行列の微分の計算則

行列の微分にも、

ライプニッツ則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{B}(t)+\mathbf{A}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}(t)\right) \tag{7.1}$$

が成立する。では実数関数の微分でおなじみの $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}}$ に対応する、

$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{A}(t)\right)^n=n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\left(\mathbf{A}(t)\right)^{n-1}}$ は成立するかというと、

$\boxed{\mathbf{A}(t)\text{ と }\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\text{ が交換しないと成立しない}}$。成立するのは

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{A}(t)\right)^n=&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\left(\mathbf{A}(t)\right)^{n-1}+\mathbf{A}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\left(\mathbf{A}(t)\right)^{n-2}+\cdots\\&+\left(\mathbf{A}(t)\right)^{n-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{A}(t)+\left(\mathbf{A}(t)\right)^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\end{aligned} \tag{7.2}$$

という（少々面倒な）式である。

7.1.2　逆行列の微分

$\boxed{\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)=\mathbf{I}}$ の両辺を微分すると（右辺は定数だから微分すると 0）、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}^{-1}(t)\right)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)=&0\\\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}^{-1}(t)\right)\mathbf{A}(t)=&-\mathbf{A}^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\end{aligned} \tag{7.3}$$

となって、以下の公式を得る。

結果 56: 逆行列の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}^{-1}(t)=-\mathbf{A}^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{A}^{-1}(t) \tag{7.4}$$

すなわち、逆行列の微分は元の行列の微分の前後に逆行列を掛けて、さらにマイナス符号をつける。この式を 1×1 行列で考えれば分数関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{f(t)}\right)=-\frac{f'(t)}{\left(f(t)\right)^2} \tag{7.5}$$

の式になる（数なら $\frac{1}{f(t)}$ の位置を変えてもいいが、行列である $\mathbf{A}^{-1}$ はそうはいかないことに注意しよう。

7.1.3　行列式の微分

行列が x の関数である場合、行列式もまた x の関数となる。これを微分するとまず余因子の式(3.141) → p61 から $\boxed{\tilde{A}_{pq} = \frac{\partial\left(\det\ \mathbf{A}\right)}{\partial A_{qp}}}$ なので、

$$\frac{\partial}{\partial x}\det\mathbf{A}(x) = \sum_{p,q}\tilde{A}_{pq}(x)\frac{\partial A_{qp}(x)}{\partial x} = \det\mathbf{A}(x)\sum_{p,q}(\mathbf{A}^{-1})_{pq}(x)\frac{\partial A_{qp}(x)}{\partial x} \tag{7.6}$$

という式を作ることができる（余因子と逆行列の関係(3.153) → p62 $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}}$ を使った）。また、行列式を $\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N]$ と表現した場合、その微分は

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N]\\ =&\det\left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}x}, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N\right] + \det\left[\vec{v}_1, \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}x}, \cdots, \vec{v}_N\right] + \cdots + \det\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \frac{\mathrm{d}\vec{v}_N}{\mathrm{d}x}\right]\end{aligned} \tag{7.7}$$

のように「列ごとの微分」を足しあげることで計算できる（行ごとにしても可）。

7.2　行列の指数関数と対数関数

7.2.1　行列の指数関数

指数関数 $\exp(x)$ は

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{7.8}$$

とテイラー展開することができた。これの真似をして、行列の指数関数を

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{X}^n \tag{7.9}$$

で定義しよう。行列の指数関数は何の役に立つかというと、通常の指数関数が

微分方程式 $\boxed{\frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}x}f(x) = af(x)}$ の解は $\boxed{f(x) = C\exp(ax)}$（ただし、C は $\boxed{x=0}$ での f の値 $f(0)$）。

であったのと同様に、

微分方程式 $\boxed{\frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}x}\vec{f}(x) = \mathbf{A}\vec{f}(x)}$ の解は $\boxed{\vec{f}(x) = \exp(\mathbf{A}x)\vec{C}}$（ただし、$\vec{C}$ は $\boxed{x=0}$ での $\vec{f}$ の値 $\vec{f}(0)$）。

が成り立つのである。

微分方程式の解が $\boxed{\vec{f}(x) = \exp(\mathbf{A}x)\vec{C}}$ になると上で述べたが、固有ベクトル $\vec{v}_{\rangle\lambda}$ に対してはこの方程式が

$$\vec{v}_{\rangle\lambda}(x) = \exp(\lambda x)\vec{v}_{\rangle\lambda}(0) \tag{7.10}$$

となる。つまり固有値が正のベクトルは指数関数的に増大する一方、固有値が負のベクトルは指数関数的に減少し 0 に向かう。行列の固有値で関数がどのように振る舞うかがある程度決まる。

7.2.2　指数関数を計算する方法: 対角化可能な行列

(7.9) で定義するとは言っても、これが計算不可能（級数が収束しないなど）であったら意味がない。計算するためには、対角化を使う。行列 $\mathbf{P}$ を使って $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}$ が対角行列 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$ になったとする。この対角行列の exp を考えると、

$$
\begin{aligned}
\exp(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}\right)^n \\
\exp\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\overbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\underbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{X}\mathbf{P}\cdots\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}}^{n\text{ 個}} \\
\begin{bmatrix}\exp(\lambda_1) & 0 & \cdots \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} &= \mathbf{P}^{-1}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\mathbf{X}\right)^n}_{\exp(\mathbf{X})}\mathbf{P} \\
\mathbf{P}\begin{bmatrix}\exp(\lambda_1) & 0 & \cdots \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} &= \exp(\mathbf{X})
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

となることから、$\exp(\mathbf{X})$ が計算できる[†1]。

📖【問い 7-1】 行列 $\begin{bmatrix}0 & \theta \\ \theta & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & -\theta \\ \theta & 0\end{bmatrix}$ の exp を計算せよ。

ヒント → p140 へ　解答 → p145 へ

7.2.3　指数関数を計算する方法: 対角化できない行列

対角化できない行列の場合も Jordan 標準形に持っていくと exp が計算できる。Jordan 細胞の一つである $\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}$ に変数 t を掛けた行列の指数関数を計算してみる。まず行列の n 乗を計算しよう。

$$
\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}a^2 & 2a \\ 0 & a^2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3\end{bmatrix}, \cdots \tag{7.12}
$$

となるので、

$$
\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n\end{bmatrix} \tag{7.13}
$$

と予想できる。

$$
\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1}\end{bmatrix} \tag{7.14}
$$

と確認できるので、0 以上の整数 n についてこの予想は正しい。

ということは、

$$
\exp\left(t\begin{bmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{bmatrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{at} & t\mathrm{e}^{at} \\ 0 & \mathrm{e}^{at}\end{bmatrix} \tag{7.15}
$$

となる。対角成分が $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(at)^n = e^{at}}$ なのはすぐにわかる。右上成分についても、

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}na^{n-1} = t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(at)^{n-1} \tag{7.16}
$$

となって、$n \to n+1$ とずらせばこの式は t に e^{at} を掛けた式になる。これで、相似変換して $\mathbf{J}_2$ になる行列の指数関数も計算できるようになった。

[†1] 指数関数は収束半径が ∞ なので、「級数が収束するか」という心配は不要である。

行列 $\mathbf{M}$ を相似変換してジョルダン標準形に持っていったのち、

$$\overbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{J}_{m_{1,1}}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{J}_{m_{1,c_1}}(\lambda_1) & & \\ \hline & & & \mathbf{J}_{m_{2,1}}(\lambda_2) & \\ & & & & \ddots \end{array}\right]}^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1\mathbf{I} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1\mathbf{I} & & \\ \hline & & & \lambda_2\mathbf{I} & \\ & & & & \ddots \end{array}\right]}_{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}} + \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{J}_{m_{1,1}}(\lambda_1)-\lambda_1\mathbf{I} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{J}_{m_{1,c_1}}(\lambda_1)-\lambda_1\mathbf{I} & & \\ \hline & & & \mathbf{J}_{m_{2,1}}(\lambda_2)-\lambda_2\mathbf{I} & \\ & & & & \ddots \end{array}\right]}_{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}} \tag{7.17}$$

のように分解する。最後の式の第 2 項と第 2 項を $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}$ と $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}$ とした[†2] が、この二つの行列は交換するので、これを逆相似変換した $\mathbf{S}$ と $\mathbf{N}$ も交換する。よって、

$$\exp \mathbf{M} = \exp \mathbf{S} \exp \mathbf{N} \tag{7.18}$$

として計算するという手法（$\mathbf{S}+\mathbf{N}$ 分解）もある。$\mathbf{N}$ は（$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}$ がそうなので）「べき零行列」（何乗かすると $\mathbf{0}$ になる行列）であるため、$\exp \mathbf{N}$ は有限項で終わるというありがたさがある。

【問い 7-2】 Jordan 細胞 $\mathbf{J}_{i}(a)$ の n 乗を計算せよ。 ヒント → p140 へ　解答 → p145 へ

【問い 7-3】 $\exp(\mathbf{J}_{i}(a)t)$ を計算せよ。 解答 → p145 へ

7.3　行列の対数

対数関数には

$$\begin{aligned} \log(x) &= \log c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x-c}{c}\right)^n \\ &= \log c + \left(\frac{x-c}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-c}{c}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{7.19}$$

というテイラー展開がある。c は定数である（どのような条件を満たすべきかは後で決める）。この式の右辺を x で微分すると、

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{c}\left(\frac{x-c}{c}\right)^{n-1} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\left(\frac{x-c}{c}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{x-c}{c}\right)^2 + \cdots \tag{7.20}$$

となるが、左辺は初項が $\frac{1}{c}$ で公比が $-\frac{x-c}{c}$ の等比級数なので、その和は

$$\frac{\frac{1}{c}}{1-\frac{c-x}{c}} = \frac{1}{c-c+x} = \frac{1}{x} \tag{7.21}$$

となる。この式が正しい（級数が収束する）ためには、$\left|\frac{c-x}{c}\right| < 1$ でなくてはいけない[†3]。これの真似をして、以下のように定義しよう。

定義 25: 行列の対数関数

$$\begin{aligned} \log(\mathbf{X}) &= \log c\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\mathbf{X}-c\mathbf{I}}{c}\right)^n \\ &= \log c\mathbf{I} + \frac{\mathbf{X}-c\mathbf{I}}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{X}-c\mathbf{I}}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{X}-c\mathbf{I}}{c}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{7.22}$$

[†2] $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}$ はジョルダン細胞のうち対角成分を抜いたものなので、対角成分の一つ上に 1 が並ぶという形の行列。

[†3] この不等式は $\boxed{-1 < \frac{x-c}{c} < 1}$ となるので、$\begin{cases} \boxed{c>0} \text{ なら、} \boxed{-c < x-c < c} \text{ すなわち } \boxed{0 < x < 2c} \\ \boxed{c<0} \text{ なら、} \boxed{-c > x-c > c} \text{ すなわち } \boxed{2c < x < 0} \end{cases}$ という意味になる。$\boxed{x=0}$ は $\log x$ が定義されていない場所なので、その場所を超えてテイラー展開はできないので、c と x は同符号でなくてはいけない。

この定義による対数関数は期待される通り、$\boxed{\exp(\log(\mathbf{X}))=\mathbf{X}}$と$\boxed{\log(\exp(\mathbf{X}))=\mathbf{X}}$を満たすであろうか？ —実は常にこの「対数関数」が定義できるとは限らない。ここでは、$\mathbf{X}$ が対角化可能で、かつ固有値 $\{\lambda_*\}$ が全て正である場合のみを考えよう。

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\log(\mathbf{X})\mathbf{P} &= \log c\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nc^n}\left(\mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{X}-c\mathbf{I}\right)\mathbf{P}\right)^n \\
&= \log c\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nc^n}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}-c\mathbf{I}\right)^n \\
&= \begin{bmatrix} \log c & 0 & \cdots \\ 0 & \log c\cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nc^n}\begin{bmatrix} \lambda_1-c & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2-c\cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^n \\
&= \begin{bmatrix} \log\lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \log\lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.23}$$

となる[†4]から、

$$\underbrace{\exp\left(\mathbf{P}^{-1}\log(\mathbf{X})\mathbf{P}\right)}_{\mathbf{P}^{-1}\exp(\log(\mathbf{X}))\mathbf{P}} = \exp\begin{bmatrix} \log\lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \log\lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}} \tag{7.24}$$

となって、$\boxed{\exp(\log(\mathbf{X}))=\mathbf{X}}$が結論できる。

ただし、ここで固有値の中に 0 があると $\log\lambda$ が計算できない。よってこの式が成立するのは $\mathbf{X}$ が正則なときだけである（実数の対数関数だって、「$\log(0)$ を計算しろ」と言われても無理なので仕方ない）。

【問い 7-4】 $\mathbf{X}$ が対角化可能である行列の場合で、$\boxed{\log(\exp(\mathbf{X}))=\mathbf{X}}$を示せ。 解答 → p145 ^

7.4 行列の指数関数に関する公式

7.4.1 行列の指数関数の det

結果 57: $\det(\exp\mathbf{M})$ と $\log(\det\mathbf{M})$

$$\det(\exp\mathbf{M}) = \exp(\operatorname{tr}\mathbf{M}) \tag{7.25}$$

$$\log(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\log\mathbf{M}) \tag{7.26}$$

証明は相似変換による三角行列化を使う。

$$\det(\exp\mathbf{M}) = \det\left(\mathbf{P}^{-1}\left(\exp\mathbf{M}\right)\mathbf{P}\right) = \det\left(\exp(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})\right) \tag{7.27}$$

として、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ が三角行列化されていれば、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ の対角成分には固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ が並ぶので、$\exp(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})$ の対角成分には $\mathrm{e}^{\lambda_1},\mathrm{e}^{\lambda_2},\cdots$ が並ぶ。三角行列の行列式は対角成分の積なので、

$$\det\left(\exp(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})\right) = \mathrm{e}^{\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2}\cdots = \mathrm{e}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots} \tag{7.28}$$

となる。固有値の和はトレースだから、$\boxed{\det\left(\exp\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)=\exp(\operatorname{tr}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})}$がわかる。相似変換は行列式もトレースも変えないから、これで (7.25) が証明できた。

このことから $\mathbf{M}$ がどんな行列であっても $\exp\mathbf{M}$ は正則行列であることがわかる。

(7.26) の方は、$\boxed{\mathbf{M}\to\log\mathbf{M}}$と置き換えればすぐに出る。

[†4] ここで、定数 c を正としているので、固有値がすべて正でないと $\log\lambda_i$ へと収束しないことに注意。

7.4.2 $\exp(-\mathbf{A})$ による相似変換

以下で使う相似変換は物理でも頻出する。

結果 58: $\exp(-\mathbf{A})$ による相似変換

$$\exp(\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{B} + [\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{1}{2}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + \frac{1}{3!}[\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]] + \cdots \tag{7.29}$$

を証明しよう[†5]。この式は

$$\exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t) = \mathbf{B} + t\,[\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + \frac{t^3}{3!}[\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]] + \cdots \tag{7.30}$$

の $\boxed{t=1}$ とした式なのだが、この式の右辺を t によるテイラー展開と解釈すれば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \left(\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t)\right)\Big|_{t=0} = \overbrace{[\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\cdots,[\mathbf{A},\mathbf{B}]]]]}^{n\text{ 回の繰り返し}} \tag{7.31}$$

が示せればこの等式 (7.30) が示せた。$\boxed{n=0}$ は $\boxed{\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t)\Big|_{t=0} = \mathbf{B}}$ となって、自明である。$\boxed{n=1}$ をまず示そう。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t)\right)\Big|_{t=0} &= \Big(\overbrace{\exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{A}}^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(\mathbf{A}t))}\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t) + \exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{B}\overbrace{(-\mathbf{A}\exp(-\mathbf{A}t))}^{\frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\exp(-\mathbf{A}t))}\Big)\Big|_{t=0}\\ &= \exp(\mathbf{A}t)\,(\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A})\exp(-\mathbf{A}t)\end{aligned} \tag{7.32}$$

上で $\boxed{\frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\exp(\mathbf{A}t)) = \exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{A}}$ としているが、この微分により $\mathbf{A}$ はこのように後ろに出ても、$\boxed{\frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\exp(\mathbf{A}t)) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t)}$ のように前に出てもよい（$\mathbf{A}$ と $\exp(\mathbf{A}t)$ は可換である)。

以上を繰り返していくと、微分をするたびに交換関係 $[\mathbf{A},*]$ の数が増えていくことがわかる。よって

$$\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\overbrace{[\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\cdots,[\mathbf{A},\mathbf{B}]]]]}^{n\text{ 回の繰り返し}} \tag{7.33}$$

がわかった。この式を、$\boxed{\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}t) = \exp\big(t\,[\mathbf{A},*]\big)\mathbf{B}}$ と略記することもある。

7.4.3 Campbell-Baker-Hausdolff の公式

実数または複素数の指数関数については $\boxed{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}}$ であるが、行列については以下の式が知られている。

結果 59: Campbell-Baker-Hausdolff の公式

$$\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B} = \exp\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{1}{12}([\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + [[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{B}]) + \cdots\right) \tag{7.34}$$

この式は、

$$\log(\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}) = \mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{1}{12}([\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + [[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{B}]) + \cdots \tag{7.35}$$

と書き直すことができ、行列の指数関数と対数関数の定義から順に計算していくことができる。

$\boxed{c=1}$ にした場合の式(7.22)を使って、
→ p113

$$\log(\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}) = \exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B} - \mathbf{I} - \frac{1}{2}(\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}-\mathbf{I})^2 + \frac{1}{3}(\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}-\mathbf{I})^3 + \cdots \tag{7.36}$$

[†5] ここで $\boxed{\mathbf{P} = \exp(-\mathbf{A}), \mathbf{P}^{-1} = \exp(\mathbf{A})}$ としている。「$\exp(-\mathbf{A})$ の逆行列は $\exp(-\mathbf{A}^{-1})$ じゃないのか？」と思った人は【演習問題7-1】を解いてみよう。
→ p116

となるが、

$$\begin{aligned}\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}-\mathbf{I}&=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\cdots\right)\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{B}^3+\cdots\right)-\mathbf{I}\\&=\overbrace{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^{1\text{ 次の項}}+\overbrace{\frac{1}{2}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2}^{2\text{ 次の項}}+\overbrace{\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{B}^3}^{3\text{ 次の項}}+\cdots\end{aligned}\tag{7.37}$$

であるから、

$$1\text{ 次の項}:\mathbf{A}+\mathbf{B}\tag{7.38}$$

$$2\text{ 次の項}:\frac{1}{2}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2-\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\tag{7.39}$$

のように順に計算していくことができる。3 次の項まで計算しておくと、

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{B}^3\\&\quad-\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right)(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\&\quad+\frac{1}{3}\left(\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}^2\mathbf{A}+\mathbf{B}^3\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{B}\mathbf{A}^2\\&\quad+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\mathbf{B}^2\mathbf{A}\\&=\frac{1}{12}\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\frac{1}{6}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}+\frac{1}{12}\mathbf{B}\mathbf{A}^2+\frac{1}{12}\mathbf{A}\mathbf{B}^2-\frac{1}{6}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}+\frac{1}{12}\mathbf{B}^2\mathbf{A}\\&=\frac{1}{12}\mathbf{A}[\mathbf{A},\mathbf{B}]-\frac{1}{12}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{A}+\frac{1}{12}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{B}-\frac{1}{12}\mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\\&=\frac{1}{12}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]+\frac{1}{12}[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{B}]\end{aligned}\tag{7.40}$$

のようになる。ここから先も、交換関係の形にまとまっていく。

7.5　章末演習問題

★【演習問題 7-1】

(1)行列 $\boxed{\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}}$ の逆行列の exp を計算して、$\exp(\mathbf{A})$ の逆行列は $\exp(\mathbf{A}^{-1})$ ではないことを確認せよ。

(2)ジョルダン細胞 $\boxed{\mathbf{J}_2(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}}$ の逆行列は $\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda}&-\frac{1}{\lambda^2}\\0&\frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$ である。これの exp を計算して、$\exp(\mathbf{J}_2(\lambda))$ の逆行列にはならないことを確認せよ。

ヒント → p148 へ　解答 → p153 へ

付録 A　計算テクニックに関する補足

A.1　代数学の基本定理

固有値の計算などで n 次多項式

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \tag{A.1}$$

（ただし、$a_n \neq 0$）を左辺とする方程式 $f(z) = 0$ を解く必要があることがある。このとき、以下の重要な定理がある。

結果 60: 代数学の基本定理

z の整数次の方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{A.2}$$

（ただし、$a_n \neq 0$ とする）は必ず複素数の解 $z = \alpha_1$ を持つ。

つまりはどんな n 次方程式にも解がある、と言っているわけで、ちょっとびっくりする人もいるかもしれない。

この定理は、解が実数であることを保証しないことに注意しよう。方程式の係数 $\{a_*\}$ がすべて実数であったとしても解が複素数になることはある（簡単な例としては、$z^2 + 1 = 0$）。複素数まで認めれば必ず解はあるというのがこの定理の示すところである。

非常にシンプルな証明としては、「複素数の全領域で正則な関数は定数関数しかない」という定理から、$\dfrac{1}{f(z)}$ が必ずどこか一点で発散する（∞ になる）ことから証明できる。

もう一つ、

結果 61: 因数定理

n 次方程式 $f(z) = 0$ が解 $z = \alpha$ を持つなら、$f(z)$ は

$$f(z) = (z - \alpha) g(z) \tag{A.3}$$

と因数分解できる。$g(z)$ は $n-1$ 次の多項式である。

という定理もある。$g(z)$ に対して代数学の基本定理を適用すれば次の解 $z = \alpha_2$ があることがわかるので、1 次式になるまで続けると、

結果 62: 多項式の因数分解

n 次多項式 (A.1) は

$$f(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n-1})(z - \alpha_n) \tag{A.4}$$

のように因数分解される（ただし、α_i は重複する場合もある）。

という結果も出てくる（ここまで含めて「代数学の基本定理」と呼ぶ場合もある）。これにより、$n \times n$ 行列の固有値方程式は（重複も含めて）n 個の解を持つ（固有値は重複を含めて数えると n 個ある）。

A.2　共通因数のない多項式に関する定理

結果 50（→ p100）、すなわちすべてに共通な因数を持たない多項式の組 $\{f_1(x), f_2(x), \cdots f_k(x)\}$ に対し、適切な多項式の組 $\{A_1(x), A_2(x), \cdots, A_k(x)\}$ を持ってくれば $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} A_i(x) f_i(x) = 1$ になるようにできることを証明しよう。$k = 2$ の場合の証明を示す。$f_1(x)$ の方が次数が高いと仮定すると、

$$f_1(x) = f_2(x) h_1(x) + r_1(x) \tag{A.5}$$

と書くことが必ずできる。余り r_1 は f_1 と f_2 の線形結合になる。f_1 と f_2 は互いに素であるから、$r_1(x)$ は 0 ではなく、f_2 よりも次数が低い。

次に f_2 と r に関して

$$f_2(x) = r_1(x) h_2(x) + r_2(x) \tag{A.6}$$

と書くことが必ずできる。f_2 と r_1 は互いに素であるから、$r_2(x)$（第２段階での余り）はやはり０ではない。

ここで上の式から $\boxed{r_1(x)=f_1(x)-f_2(x)h_1(x)}$ を代入して、

$$f_2(x)=\left(f_1(x)-f_2(x)h_1(x)\right)h_2(x)+r_2(x) \tag{A.7}$$

とすることができる。つまり、第２段階の余り r_2 も、f_1 と f_2 に適当な多項式を掛けて作った線形結合で表現できる。

次は r_1 と r_2 に関して

$$r_1(x)=r_2(x)h_3(x)+r_3(x) \tag{A.8}$$

という式を作り、と続けていくと、第 n 段階の余り $r_n(x)$ は x を含まない定数になるのでこれを R と置く。

$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)h_n(x)+R \tag{A.9}$$

上で考えたことから、R も f_1 と f_2 の線形結合で書かれる。R は０ではないから全ての式を R で割れば、

$$A_1(x)f_1(x)+A_2(x)f_2(x)=1 \tag{A.10}$$

を得る。k が大きくなっても同様。

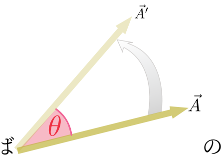
【問い A-1】 $\boxed{f_1(x)=(x-2)^2, f_2(x)=x-1}$ とする。$\boxed{g_1(x)f_1(x)+g_2(x)f_2(x)=1}$ となる多項式 $g_1(x), g_2(x)$ を求めよ。　解答 → p145 へ

以下では、具体的な行列の応用例として「回転」をどのように表現するかを考える。

A.3　２次元平面でのベクトルの回転

A.3.1　図形で考えるベクトルの回転

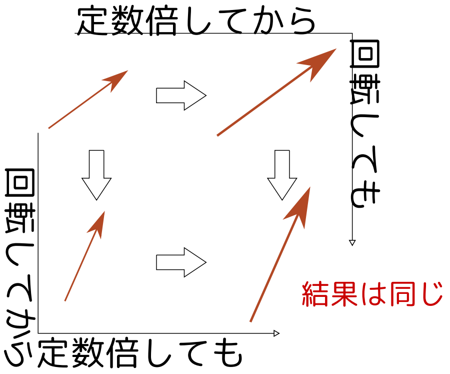
ここでは、２次元平面の上でベクトル $\vec{A}$ を角度 θ だけ回転させたベクトル $\vec{A}'$ をどのように作れば（あるいは数式上で表現すれば）よいかを考えよう。図で描くならば

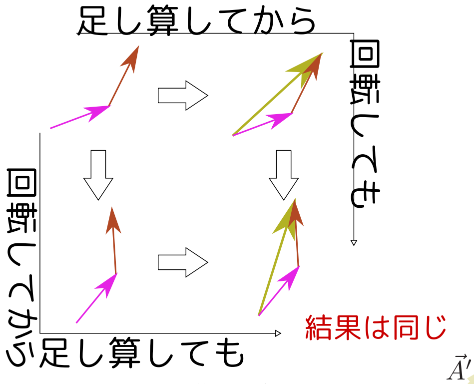


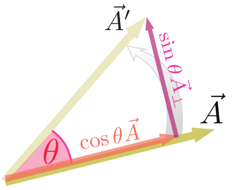
のような状況である。この回転の操作を $R(\vec{A})$ のように表したとき、$R(\vec{A})$ は線形写像 → p18 である。すなわち、

$$R\left(\lambda_1\vec{A}_1+\lambda_2\vec{A}_2\right)=\lambda_1 R\left(\vec{A}_1\right)+\lambda_2 R\left(\vec{A}_2\right) \tag{A.11}$$

が成り立つ。ゆえに行列で表現できる。





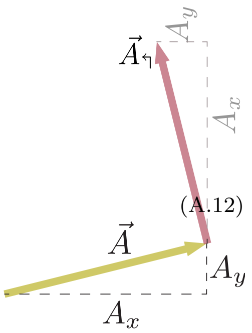


ここで行う回転は、実際に平面上（３次元でもいいが）にあるベクトルが向きを変えるという、物理現象である[†1]。それを数式の上ではどのように扱うべきかを解説する。

ベクトルの回転を表現してみよう。回転を実現するには、右の図に示したように、元のベクトルの長さを $\cos\theta$ 倍にしたもの（$\cos\theta\vec{A}$）に、元のベクトルを 90 度（$\frac{\pi}{2}$rad）倒して（このベクトルを $\vec{A}_\urcorner$ と書くことにする[†2]）、長さを $\sin\theta$ 倍にした、$\sin\theta\vec{A}_\urcorner$ を足す操作を行う。

[†1] 物理的実体は変化しない単なる座標変換も「回転」という言葉を使って表現することがある。

[†2] ここでは 90 度倒すことを表す記号を「$\urcorner$」にした（一般的な記号ではない）。倒す方向は、反時計回り。平面の回転では「正の回転」を反時計回り、「負の回転」を時計回りとすることが多い。北極側から見た地球の自転は反時計回りで、正の回転である



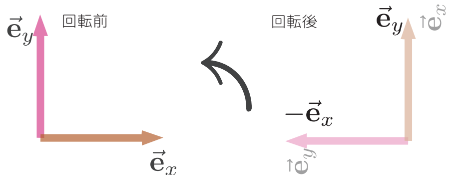
そこでまず反時計周りの 90 度（$\frac{\pi}{2}$rad）回転を考えることにしよう。

$\vec{A}_{\Lsh}$ の成分を右の図のように考えることで、「回転後の x 成分は元の y 成分（A_y）の符号を変えたもの、回転後の y 成分は元の x 成分（A_x）」という関係がわかる[†3]。すなわち成分の変化は $\boxed{\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-A_y\\A_x\end{bmatrix}}$ であり、

$$\vec{A}_{\Lsh} = \underbrace{-A_y\vec{\mathbf{e}}_x}_{A_x\text{の変化後}} + \underbrace{A_x\vec{\mathbf{e}}_y}_{A_y\text{の変化後}} \tag{A.12}$$

が回転の結果である。

あるいはこれを $\boxed{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\\vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_y\\-\vec{\mathbf{e}}_x\end{bmatrix}}$ という置き換えをした結果ベクトルが回転したと考えてもよい。



こう考えても結果は以下のようになる。

$$\vec{A}_{\Lsh} = A_x\overbrace{\vec{\mathbf{e}}_y}^{\vec{\mathbf{e}}_x\text{の変化後}} + A_y\overbrace{(-\vec{\mathbf{e}}_x)}^{\vec{\mathbf{e}}_y\text{の変化後}} = -A_y\vec{\mathbf{e}}_x + A_x\vec{\mathbf{e}}_y \tag{A.13}$$

行列で表現すると

成分の変化は $\boxed{\begin{bmatrix}-A_y\\A_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}}$

基底ベクトルの変化は $\boxed{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_y\\-\vec{\mathbf{e}}_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\\vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}}$

となることに注意。二つの表現は互いに行列の転置になっている。

$\frac{\pi}{2}$ の回転は上の通りであったので、角度 θ の回転を「元のベクトル $\vec{A}$ の $\cos\theta$ 倍に、$\vec{A}_{\Lsh}$ の $\sin\theta$ 倍を足す」操作で実現してみると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}A'_x\\A'_y\end{bmatrix} &= \cos\theta\overbrace{\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}}^{\vec{A}} + \sin\theta\overbrace{\begin{bmatrix}-A_y\\A_x\end{bmatrix}}^{\vec{A}_{\Lsh}}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -\sin\theta\\\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.14}$$

A.3.2　加法定理

角度 θ の回転を行ってから角度 ϕ の回転を行う操作は（2 次元で考える限り）「角度 $\theta+\phi$ の回転」と同じ操作である。「行列は操作を表現したもの」なので、「二つの操作の合成」は行列の掛算で計算できる。

やってみると、

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta-\sin\phi\cos\theta\\\sin\phi\cos\theta+\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta+\phi) & -\sin(\phi+\theta)\\\sin(\theta+\phi) & \cos(\phi+\theta)\end{bmatrix} \tag{A.15}$$

となって、三角関数の加法定理が出てくる。

また、この結果を見ると、

$\left\{\begin{array}{l}\text{角度 }\theta\text{ の回転を行ってから角度 }\phi\text{ の回転を行う}\\\text{角度 }\phi\text{ の回転を行ってから角度 }\theta\text{ の回転を行う}\end{array}\right.$ が同じものだとわかる（二つの行列 $\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ が可換であることを意味する）。このため、2 次元の回転は行列で表現されてはいるが、3 次元 → p123 あるいはそれ以上の次元の回転に比べれば、かなり単純だとも言える。

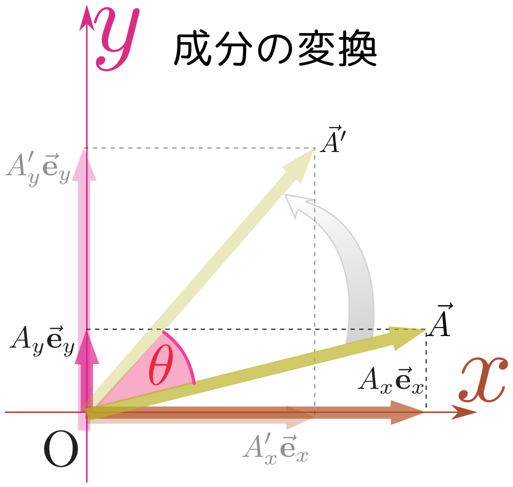
【問い A-2】 角度 θ の回転の行列 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ と、角度 $-\theta$ の回転の行列 $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ の積が単位行列であることを確認せよ。

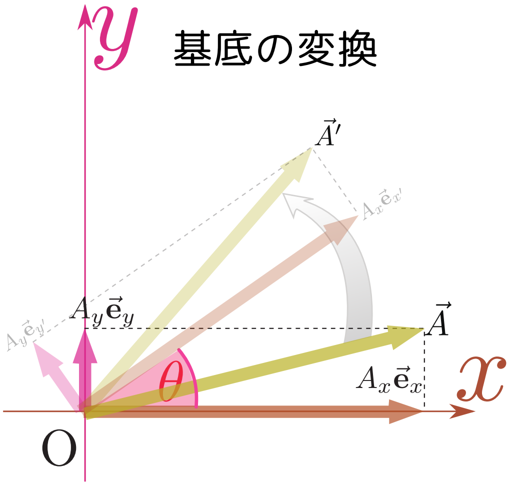
解答 → p146 へ

[†3] この 1 枚の図だけでそれを言って大丈夫なのか、と心配な人は何枚も図を描いてどの場合でもこうなることを確認しよう。

A.3.3　成分の変換と基底の変換

数式で回転を表現する[†4]には、次の図で表す二つの考え方がある。





「成分の変換」と「基底の変換」、どちらの場合でも最初のベクトルは $\boxed{\vec{A} = A_x\vec{\mathbf{e}}_x + A_y\vec{\mathbf{e}}_y}$ と表現されている。A_x, A_y の変化によって回転が実現するのが左の図（成分の変換）、$\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y$ の向きの変化によって回転が実現するのが右の図（基底の変換）の考え方である。

(A.14)に前から $\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}$ を掛けることにより、ベクトル $\vec{A}$ が

→ p119

$$\text{回転前}\quad \vec{A} = \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x \\ A_y\end{bmatrix} \tag{A.16}$$

$$\to\quad \text{回転後}\quad \vec{A}' = \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x \\ A_y\end{bmatrix} \tag{A.17}$$

のように $\vec{A}'$ に変換されるわけだが、この式を

$$\vec{A}' = \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x \\ A_y\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}A'_x \\ A'_y\end{bmatrix}} \tag{A.18}$$

と考えれば成分が変換されたことになるし、

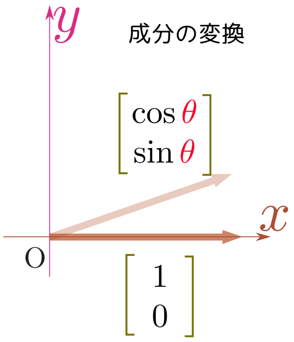
$$\vec{A}' = \underbrace{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_{x'} & \vec{\mathbf{e}}_{y'}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}A_x \\ A_y\end{bmatrix} \tag{A.19}$$

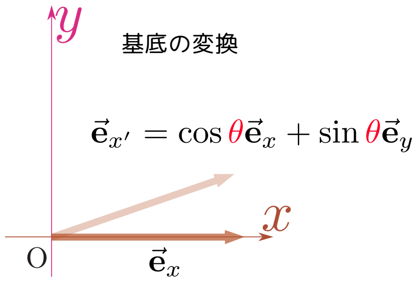
と考えれば基底ベクトルが変換されたことになる。(A.19) は転置して書くと

$$\vec{A}' = \begin{bmatrix}A_x & A_y\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x \\ \vec{\mathbf{e}}_y\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_{x'} \\ \vec{\mathbf{e}}_{y'}\end{bmatrix}} \tag{A.20}$$

となるので、$\left\{\begin{array}{l}\text{成分}\\ \text{基底}\end{array}\right.$ を列ベクトルで表現することにした場合の、$\left\{\begin{array}{l}\text{成分を変換するための行列}\\ \text{基底ベクトルを変換するための行列}\end{array}\right.$ は互いに転置を取った関係であることに注意しよう。この関係を不思議に思う人もいるかもしれないが、この二つの変換によって $\vec{\mathbf{e}}_x$—成分表示では $\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ がどのように変換されるかを考えると、

[†4] 実は回転に限らず、より一般的な座標変換について言える。





となって、行列が転置された並び方になっていればこそ、この二つの変換が同じ回転を表現できていることがわかる。「回転後のベクトルを、古い座標系でみたときの成分」が並ぶ位置が二つの変換では違うのである。

A.3.4　行列の転置と回転の行列

前にも → p13 出てきた「転置する（縦のものを横にする）」操作は、行列を $\begin{bmatrix}a&b&c\\ d&e&f\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a&d\\ b&e\\ c&f\end{bmatrix}$ のように、行と列を入れ替える操作である。これにより、$n\times m$ 行列は $m\times n$ 行列に変わる。正方行列である場合は転置しても行数と列数は変わらない。

転置は $\mathbf{A}^\top$ のように t という上付き添字をつけて表す。転置しても元と同じ行列（$\boxed{\mathbf{A}^\top=\mathbf{A}}$ を満たす行列）を「**対称行列 (symmetric matrix)**」、逆に転置すると符号が変わる行列（$\boxed{\mathbf{A}^\top=-\mathbf{A}}$ を満たす行列）を「**反対称行列 (antisymmetric matrix)**」[†5]と言う。対称行列にしろ反対称行列にしろ、正方行列でなければ意味がない言葉である。

転置が以下の性質を満たすことはすぐにわかる。

結果 63: 行列の転置の性質

(1)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top=\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}^\top$
(2)$(\mathbf{A}^\top)^\top=\mathbf{A}$
(3)$(\alpha\mathbf{A})^\top=\alpha\mathbf{A}^\top$
(4)$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top=\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$

最後の (4) だけが少し考えないとわからないかもしれないが、行列の掛け算が

$$\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{v}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{v}_2)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{(\vec{v}_n)^\top}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\vec{w}_1}&\boxed{\vec{w}_2}&\cdots&\boxed{\vec{w}_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{v}_1\cdot\vec{w}_1&\vec{v}_1\cdot\vec{w}_2&\cdots&\vec{v}_1\cdot\vec{w}_n\\ \vec{v}_2\cdot\vec{w}_1&\vec{v}_2\cdot\vec{w}_2&\cdots&\vec{v}_2\cdot\vec{w}_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \vec{v}_n\cdot\vec{w}_1&\vec{v}_n\cdot\vec{w}_2&\cdots&\vec{v}_n\cdot\vec{w}_n\end{bmatrix}\tag{A.21}$$

であり、これを転置することは、

$$\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{w}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{w}_2)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{(\vec{w}_n)^\top}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\vec{v}_1}&\boxed{\vec{v}_2}&\cdots&\boxed{\vec{v}_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{w}_1\cdot\vec{v}_1&\vec{w}_1\cdot\vec{v}_2&\cdots&\vec{w}_1\cdot\vec{v}_n\\ \vec{w}_2\cdot\vec{v}_1&\vec{w}_2\cdot\vec{v}_2&\cdots&\vec{w}_2\cdot\vec{v}_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \vec{w}_n\cdot\vec{v}_1&\vec{w}_n\cdot\vec{v}_2&\cdots&\vec{w}_n\cdot\vec{v}_n\end{bmatrix}\tag{A.22}$$

とすることだ（このように行列の順番を変えないと $\vec{v}$ と $\vec{w}$ の内積を取る形にならない）と気づけば、転置するときに行列の掛け算の順番が入れ替わることは納得できるだろう。

角度 θ の回転の行列 $\boxed{\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}}$ は、転置すると $\boxed{\mathbf{R}^\top(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ -\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}}$ となり、これは角度 $-\theta$ の回転の行列である。つまり、$\mathbf{R}^\top$ は $\mathbf{R}$ の逆行列である。これは偶然でもなんでもない。行列 $\mathbf{R}$ は、$\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y$ を回した結果の列ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_{x\theta},\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}$ を並べたものと解釈できるからなのである。

$$\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}\equiv\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}\tag{A.23}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}\equiv\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}\tag{A.24}$$

この二つのベクトルは「$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ を回した結果」と「$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ を回した結果」であり、このベクトルを並べると $\mathbf{R}$ ができる。ここで、

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{\mathbf{e}}_{x\theta})^\top}\\ \boxed{(\vec{\mathbf{e}}_{y\theta})^\top}\end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^\top}\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}}&\boxed{\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}&\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}\\ \vec{\mathbf{e}}_{y\theta}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{x\theta}&\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{y\theta}\end{bmatrix}\tag{A.25}$$

[†5] 「**交代行列 (alternating matrxi)**」、「**歪対称行列 (skew-symmetric matrix)**」と呼ぶこともある。

のようにしてみると、$\boxed{\mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}=\mathbf{I}}$ がすぐわかる（回転の前の $\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y$ が $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\vec{\mathbf{e}}_j=\delta_{ij}}$ を満たしていたのだから、回転後も $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_{i\theta}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{j\theta}=\delta_{ij}}$ を満たしているのは当然だ）。

以上は任意の次元の「回転を表す行列」に関して言える（3 次元だろうが 4 次元だろうが）。この性質を持つ行列に以下のように名前をつける。

定義 26: 直交行列の定義

$$\mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}=\mathbf{I} \tag{A.26}$$

を満たす $\mathbf{R}$ を「**直交行列 (orthogonal matrix)**」と呼ぶ。

名前に「直交」が入っているのは「行列を列ベクトルの組とみたとき、列ベクトルは相互に直交している（内積が 0）」[†6]を意味している。直交行列は「直交座標から直交座標への座標変換」に用いられる。

【問い A-3】 2 次元の直交行列には、$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ では表せないもの（どんな θ を持ってきても表現できないもの）がある。例を挙げよ。

ヒント → p140 へ　　解答 → p146 へ

A.3.5 微小角度の回転の無限回繰り返し

ここで $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のテイラー展開

$$\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}=1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\cdots \tag{A.27}$$

$$\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots \tag{A.28}$$

をこの式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{\theta^2}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\theta^2}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \frac{\theta^3}{3!}\\ -\frac{\theta^3}{3!} & 0\end{bmatrix}+\cdots\end{aligned} \tag{A.29}$$

のようになるが、この展開の規則性をよくみると、

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n \tag{A.30}$$

とまとめることができる。

この式を $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\sin\theta\\ \sin\theta & 0\end{bmatrix}}$ と書きなおしてからオイラーの式 $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$ と見比べると、実は $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ という行列が「虚数単位 i」と同じ役割を果たしていることがわかる。実際、$\boxed{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}$ であり、自乗すると -1 という性質を持っているのである。確かに、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}y)=x\cos\theta-y\sin\theta+\mathrm{i}\,(x\sin\theta+y\cos\theta)$$

という式を見ると、複素平面上では $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛ける操作が角度 θ の回転であることがわかる。

指数関数のテイラー展開 $\boxed{\exp x=\sum_n\frac{1}{n!}x^n}$ を思い出し、x が行列であってもこの式が使えると考えると、

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\exp\begin{bmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n \tag{A.31}$$

と書くことができる。

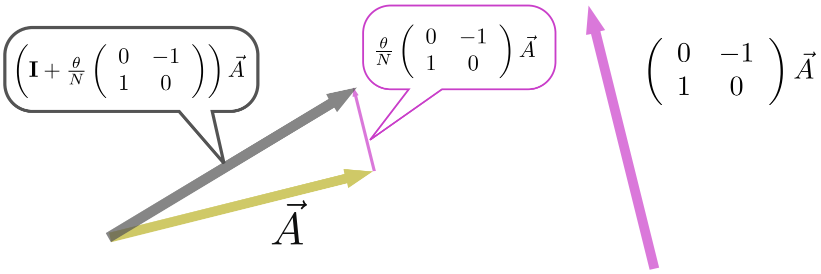
[†6] 実は「行ベクトルの組」とみても同じである。

「行列の exp って何？」とぎょっとする人がいるかもしれないが、我々は「行列を n 乗する方法」は知っているから、最後の $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n$ が指数関数の定義だと思えば問題はない。

指数関数は、$\boxed{\exp x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N}$ の極限で定義することもできた。同様に、

$$\exp\begin{bmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{bmatrix} = \lim_{N\to\infty}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{\theta}{N}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^N \tag{A.32}$$

と考えることもできる。



ここに現れた行列 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{\theta}{N}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ の意味は、

元のベクトル + 元のベクトルを $\frac{\pi}{2}$ 回して長さを $\frac{\theta}{N}$ 倍したベクトル という演算[†7]であり、これは「微小角度 $\frac{\theta}{N}$ の回転」に対応している。つまり「微小角度 $\frac{\theta}{N}$ の回転」を N 回繰り返すことで角度 θ の回転を作っている。

後での都合上 exp の肩に $-\mathrm{i}$ を入れて、

$$\mathbf{R}(\theta) = \exp\left(-\mathrm{i}\theta\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}\right) \tag{A.33}$$

のように回転行列を表したときの行列

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \tag{A.34}$$

を、「回転の生成子」と呼ぶ。

これに限らず「微小変換」を考えて、その微小変換が（微小なパラメータを $\Delta\theta$ として

$$\vec{V} \to (\mathbf{I} - \mathrm{i}\Delta\theta\mathbf{G})\,\vec{V} \tag{A.35}$$

と書けるとき、$\mathbf{G}$ を変換の「**生成子 (generator)**」と呼ぶ。パラメータが微小でない場合は、変換は $\boxed{\vec{V} \to \exp\left[-\mathrm{i}\theta\mathbf{G}\right]\vec{V}}$ となる。

A.4　3 次元回転の行列による表現

A.4.1　各軸の周りの回転の行列

以下では

$$\vec{A} = \begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\ \vec{\mathbf{e}}_y\\ \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix} \to \vec{A}' = \begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}\mathcal{R}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\ \vec{\mathbf{e}}_y\\ \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix} \tag{A.36}$$

と書いたとき（基底ベクトルを列ベクトルとしたとき）の行列 $\mathcal{R}$ について考えていくことにする。わざわざこう書いたのは、成分と基底の位置を取り替えた、

$$\vec{A} = \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} \to \vec{A}' = \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}\mathbf{R}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} \tag{A.37}$$

という書き方（成分ベクトルを列ベクトルとしたとき）の場合に間に入る行列 $\mathbf{R}$ と区別するためである。実は $\boxed{\mathbf{R}^\top = \mathcal{R}}$ であることはすぐにわかる[†8]ので、「成分を変える行列が欲しい」と思った人は以下の行列を転置して考えればよい。

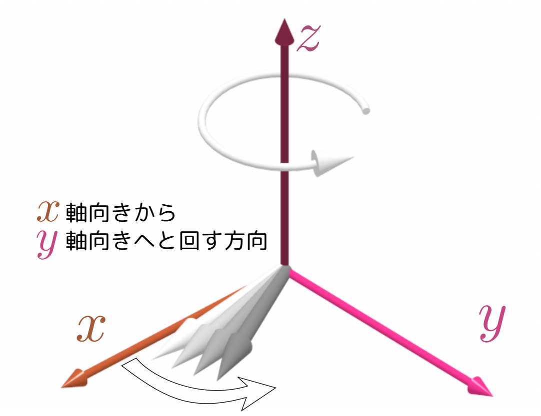
3 次元の回転を考えるために、以下に示す 3 種類の 2 次元回転をまず考えることにしよう。

z 軸周りの回転は xy 平面での回転だから、2 次元の回転と同じになる。

[†7] 「この演算は長さを変えるから回転ではないのでは？」と心配になる人がいるかもしれない。しかし、この演算は長さを $\sqrt{1+\left(\frac{\theta}{N}\right)^2}$ 倍に変える。N が大きい極限ではこれは $1+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{N}\right)^2+\cdots$ となり $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ では効かない。

[†8] 本講義では、成分を変換する行列は $\mathbf{R}$、基底を変換する行列は $\mathcal{R}$ とする。

$$z\textbf{軸回りの回転}：\ \mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.38}$$

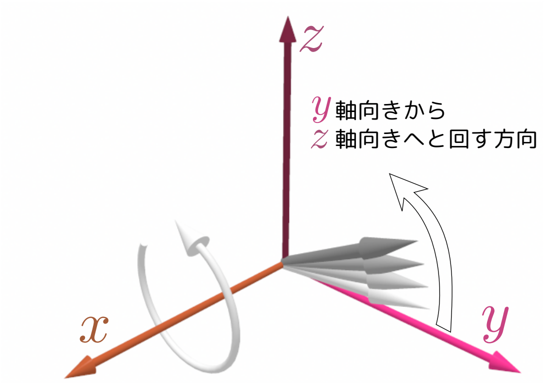


のように行列で表現される。z 成分に対しては何もしないので、その部分は 1 になっている。念のため行列を使わずに書き下すと以下のようになる。

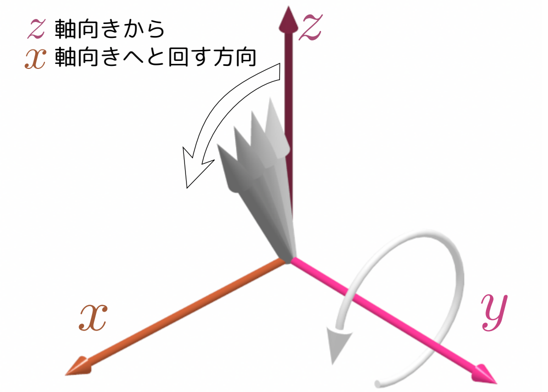
$$\vec{\mathbf{e}}_{x'} = \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_y, \quad \vec{\mathbf{e}}_{y'} = -\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_y, \quad \vec{\mathbf{e}}_{z'} = \vec{\mathbf{e}}_z \tag{A.39}$$

同様に、x 軸回りの回転と y 軸回りの回転を表現すると以下のようになる。

$$x\ \textbf{軸回りの回転}：\ \mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.40}$$



$$y\textbf{軸回りの回転}：\ \mathcal{R}_{\mathbf{y}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.41}$$



y 軸回りの回転だけ符号が逆なのでは？ —と不思議に思う人がいるのだが、y 軸回りの回転は「$z \rightarrow x$ の回転」だということを考えると、これでいいことがわかる。

ここで重要なことは、これらの行列は互いに可換ではないことである。具体的に計算してみると、

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\theta)} \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\phi)} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\phi)} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.43}$$

アプリのリンク

2つの回転

である（この計算結果は実は「転置して角度の符号を逆にする」と一致する。$\begin{cases} x\ \text{軸回りに}\ \theta\ \text{回してから}\ z\ \text{軸回りに}\ \phi\ \text{回す} \\ z\ \text{軸回りに}\ \phi\ \text{回してから}\ x\ \text{軸回りに}\ \theta\ \text{回す} \end{cases}$ の結果が違うことを何かを回して実感しよう。

A.4.2　一般の回転:Euler 角

アプリのリンク

Euler 角

0.0pt415.28917pt 0.0pt415.28917pt 0.0pt510.0001pt さてここで当然「斜めの軸で回すのはどう表現するのか」という疑問が湧くことと思う[†9]。この疑問に対する回答として「上の回転を組み合わせれば、すべての回転は表現できるのでは？」と思うだろう。

「組み合わせる」方法はもちろん、行列の掛算である。よく使われるのが「**Euler 角 (Euler Angle)**」[†10]という 3 つのパラメータを使った行列で、基底の変換[†11]なら

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\psi)} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\theta)} \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\phi)} \tag{A.44}$$

のような 3 つの行列の積で回転を表現する。ここでは z 軸まわり、次に x 軸周り、最後に z 軸周りの回転を使った。この順の行列の積を使う場合は「ZXZ のオイラー角による変換」と呼ぶ。行列の組み合わせは他にも XYZ にしたりすることもある。この積は具体的に計算すると

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.45}$$

となる。基底の変換ではなく成分の変換なら全体を転置すればよいので、

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.46}$$

となる。この行列（変換行列）は

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\phi)} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(\theta)} \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\psi)} \tag{A.47}$$

と表現することもできる。ゆえに、成分の変換として考えるときと基底の変換と考えるとき（つまり $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ に掛けるときと $\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x \\ \vec{\mathbf{e}}_y \\ \vec{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix}$ に掛けるとき）とは、$\phi \to \theta \to \psi$ の順番が逆になる（成分と基底、どちらを変換するのかに注意)。二つの変換は、

基底の変換：

(1)座標軸を z 軸回りに ϕ だけ回す。
(2)回った結果の x 軸の回りに θ だけ回す。
(3)さらに回った結果の z 軸の回りに ψ だけ回す。

成分の変換：

(1)ベクトルを z 軸回りに ψ だけ回す。
(2)回っていない座標軸 x 軸の回りに θ だけ回す。
(3)回っていない座標軸 z 軸の回りに ϕ だけ回す。

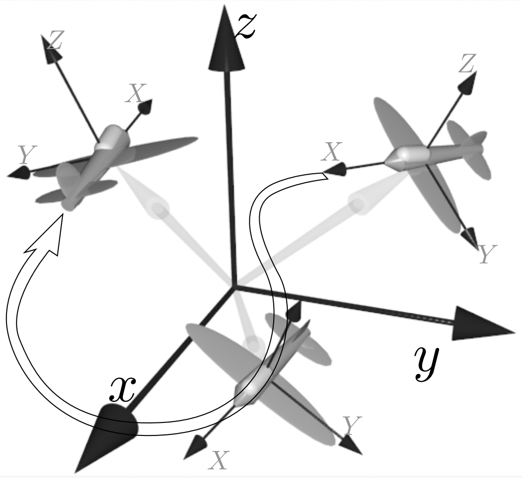
という手順の違いがある（結果は一緒)。

この基底の変換と成分の変換の違いを「座標系が回る」と「物体が実際に回る」の違いだ、と解説している本がときどきあるが、状況によっては「座標系の変換」が「物体が実際に回る」場合もあるので、単純に考えてしまわないように注意しよう。
CG（コンピュータグラフィクス）などで物体の回転を表現するときは、「物体に固定された座標系」が「物体」の運動に従って回る、というプログラムにすることがある。この方が、たとえば図の飛行機の機首が $(1, 0, 0)$ にある、などと指定できて便利なこともあるのである。
この場合は「（物体に固定された座標系の）基底の変換」の方が「（座標系がくくりつけられている）物体の回転」を表現する。

[†9] 「そんな疑問は感じない」という人がいたとしたら、そもそもその人は 3 次元回転を行列で表すことそのものに興味がないのだろう。

[†10] Euler はカタカナ表記では「オイラー」。多くの業績を残す数学者オイラーにちなむ。

[†11] 同じ内容を示す成分の変換の行列が欲しければ、角度を全部反対符号にして、行列の順番を逆にする。あるいは、（こっちの方が簡単だが）行列全体を転置する。



のように飛行機が飛び回る状況をプログラムするときは、飛行機に固定された座標系 X, Y, Z の基底が変換される。

【問い A-4】(A.45) → p125 を確認せよ。また、XYZ のオイラー角による行列 $\mathbf{R_z}(\psi)\mathbf{R_y}(\theta)\mathbf{R_x}(\phi)$ と ZYX のオイラー角による行列 $\mathbf{R_x}(\phi)\mathbf{R_y}(\theta)\mathbf{R_z}(\psi)$ を計算せよ[†12]。

解答 → p146 へ

【問い A-5】 オイラー角を使った行列(A.45) → p125 によって三つの単位ベクトル $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ をどんなベクトルに変換されるかを計算し、それらが長さ 1 で互いに直交していることを確認せよ。

解答 → p146 へ

【問い A-6】 前問で求めた三つの単位ベクトルのどれも、任意の方向にも向けられることを示せ。任意の方向を向いた単位ベクトルは、$\boxed{0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi}$ を満たす角度パラメータを使って $\begin{bmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$ と表現できる。

ヒント → p140 へ 解答 → p146 へ

【問い A-7】 ある回転を表現している行列 $\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$ が一つ与えられたとき、それは Euler 角ではどう表現されるかは一つに決まるかどうかを考えよ。

ヒント → p141 へ 解答 → p147 へ

A.4.3 傾いた軸の周りの回転 skip

ここで、回転を表現するもう一つの考え方として「x, y, z 軸とは違う、斜めの軸の回りに回す」ことで回転を表現することもできそうである。回転軸を、「z 軸から x 軸に向かって Θ 倒し、そのあと z 軸まわりに Φ だけ回転した軸」として、その回転軸回りに ψ だけ回すことにすれば、そのような回転は

$$\underbrace{\mathbf{R_z}(\Phi)\mathbf{R_y}(\Theta)}_{\text{軸を元に戻す}}\mathbf{R_z}(\psi)\overbrace{\mathbf{R_y}(-\Theta)\mathbf{R_z}(-\Phi)}^{\Theta,\Phi\text{方向を向いた回転軸を}\ z\text{軸に持ってくる}} \tag{A.48}$$

で表現される。容易にわかるように、二つの行列 $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{R_z}(\Phi)\mathbf{R_y}(\Theta)\\ \mathbf{R_y}(-\Theta)\mathbf{R_z}(-\Phi)\end{array}\right.$ は互いに逆行列である。

$$\begin{aligned}&\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\Phi & -\sin\Phi & 0\\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_z}(\Phi)}\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\Theta & 0 & \sin\Theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_y}(\Theta)}\\ =&\begin{bmatrix}\cos\Phi\cos\Theta & -\sin\Phi & \cos\Phi\sin\Theta\\ \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi & \sin\Phi\sin\Theta\\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}&\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\Theta & 0 & -\sin\Theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_y}(-\Theta)}\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\Phi & \sin\Phi & 0\\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_z}(-\Phi)}\\ =&\begin{bmatrix}\cos\Phi\cos\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & -\sin\Theta\\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ \cos\Phi\sin\Theta & \sin\Phi\sin\Theta & \cos\Theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.50}$$

[†12] 「XYZ」の意味は、「最初に X 回転、次に Y 回転、最後に Z 回転」なので、行列の積は $\mathcal{R}_{\mathbf{z}}(\psi)\mathcal{R}_{\mathbf{y}}(\theta)\mathcal{R}_{\mathbf{x}}(\phi)$ のようになる。

この回転の行列が、「z 軸回りの角度 Ψ の回転」の行列を $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Phi)\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(\Theta)$ と $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(-\Theta)\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(-\Phi)$ という、互いに逆行列である二つの行列で挟んだ結果として得られていることに注意しよう。後で説明する → p83「相似変換」の例になっている。

(A.48) → p126 の計算を具体的に計算した結果は（式が長くなるので、$\boxed{C_\alpha = \cos\alpha, S_\alpha = \sin\alpha, \overline{C}_\alpha = 1 - \cos\alpha}$ という省略形を用いて）

$$\begin{bmatrix} (C_\Phi)^2\overline{C}_\psi(S_\Theta)^2 + C_\psi & C_\Phi S_\Phi \overline{C}_\psi (S_\Theta)^2 - S_\psi C_\Theta & \left(C_\Phi\overline{C}_\psi C_\Theta + S_\Phi S_\psi\right) S_\Theta \\ C_\Phi S_\Phi\overline{C}_\psi(S_\Theta)^2 + S_\psi C_\Theta & (S_\Phi)^2\overline{C}_\psi(S_\Theta)^2 + C_\psi & \left(S_\Phi\overline{C}_\psi C_\Theta - C_\Phi S_\psi\right) S_\Theta \\ \left(C_\Phi\overline{C}_\psi C_\Theta - S_\Phi S_\psi\right) S_\Theta & \left(S_\Phi\overline{C}_\psi C_\Theta + C_\Phi S_\psi\right) S_\Theta & -\overline{C}_\psi(S_\Theta)^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{A.51}$$

である[†13]。

A.5　3 次元回転の生成子

A.5.1　各軸の周りの回転の生成子

(A.48) → p126 の真ん中に挟まれた $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Phi)$ は 2 次元の場合の (A.33) → p123 と同様に、

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Phi) = \exp\left(-\mathrm{i}\Phi\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{A.52}$$

のような「生成子の exp」の形にも書ける。$\boxed{\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ が「z 軸回りの回転の生成子」である。同様に、

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(\Phi) = \exp\left(-\mathrm{i}\Phi\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\right), \quad \mathbf{R}_{\mathbf{y}}(\Phi) = \exp\left(-\mathrm{i}\Phi\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{A.53}$$

であり、まとめると三つの生成子は

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.54}$$

となる。

A.5.2　生成子の交換関係

3 次元回転の行列が互いに可換でなかったこと → p124 の反映として、3 次元回転の生成子も互いに可換ではない。互いに交換する行列（演算子）の場合は、交換関係 → p35 は 0 である。回転の生成子の場合で計算してみると、

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\mathbf{L}_z \end{aligned} \tag{A.55}$$

となる。これ以外の交換関係は上の式のサイクリック置換 → p26 で得られる。

A.5.3　任意の軸の周りの回転の生成子

行列の指数関数はテイラー展開 $\boxed{\exp\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n}$ が定義と考えて、その各項が

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{M} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\overbrace{\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}}^{\mathbf{I}}\mathbf{A}\overbrace{\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}}^{\mathbf{I}}\mathbf{A}\cdots\mathbf{M} = \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\right)^n \tag{A.56}$$

を満たすことを使うと、$\boxed{\mathbf{M}^{-1}\left(\exp\mathbf{A}\right)\mathbf{M} = \exp\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\right)}$ が示せる。ゆえに、

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Phi)\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(\Theta)\exp\left(-\mathrm{i}\alpha\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(-\Theta)\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(-\Phi) \\ &= \exp\left(-\mathrm{i}\alpha\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Phi)\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(\Theta)\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathbf{y}}(-\Theta)\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(-\Phi)\right) \end{aligned} \tag{A.57}$$

と計算することができる。

[†13] この計算は長いだけであまり面白くもないし教育的でもない。結果を見ていろいろ考察するのは楽しいかもしれないが。

こうして、$\mathbf{R}_\mathbf{z}(\Phi)\mathbf{R}_\mathbf{y}(\Theta)\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{R}_\mathbf{y}(-\Theta)\mathbf{R}_\mathbf{z}(-\Phi)$ という行列を「Θ, Φ 方向を向いた軸回りの回転の生成子」と考えることができる。具体的に計算すると

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\cos\Phi\cos\Theta & -\sin\Phi & \cos\Phi\sin\Theta\\ \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi & \sin\Phi\sin\Theta\\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\Phi\cos\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & -\sin\Theta\\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ \cos\Phi\sin\Theta & \sin\Phi\sin\Theta & \cos\Theta\end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}\cos\Phi\cos\Theta & -\sin\Phi & \cos\Phi\sin\Theta\\ \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi & \sin\Phi\sin\Theta\\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\sin\Phi & -\mathrm{i}\cos\Phi & 0\\ \mathrm{i}\cos\Phi\cos\Theta & \mathrm{i}\sin\Phi\cos\Theta & -\mathrm{i}\sin\Theta\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\cos\Theta & \mathrm{i}\sin\Phi\sin\Theta\\ \mathrm{i}\cos\Theta & 0 & -\mathrm{i}\cos\Phi\sin\Theta\\ -\mathrm{i}\sin\Phi\sin\Theta & \mathrm{i}\cos\Phi\sin\Theta & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.58}$$

となるが、これは

$$\sin\Theta\cos\Phi\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_x}+\sin\Theta\sin\Phi\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_y}+\cos\Theta L_z\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_z} \tag{A.59}$$

となっており、「z 軸から x 軸に向かって Θ 倒し、そのあと z 軸まわりに Φ だけ回転した軸」の周りの回転を表現している。

前項で我々は$\underset{\to\,\mathrm{p126}}{\text{(A.48)}}$のように、「軸を回してから回転して後で軸を戻す」のようにして任意の軸の周りの回転を考えたわけであるが、実は最初から「任意の軸の周りの回転の生成子」を (A.59) で計算して、$-\mathrm{i}\alpha$ 倍して exp の方に乗せれば「この軸の周りの角度 α の回転」が表現できた。

A.6　章末演習問題

★【演習問題 A-1】

n 次の多項式をベクトル空間と考え

$$1\to\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, x\to\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, x^2\to\begin{bmatrix}0\\0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots x^n\to\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$$

のように式と基底ベクトルを対応させたとする。つまり

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+x^n=x^n=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix} \tag{A.60}$$

のように関係をつけて、$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}$ を多項式を表現するベクトルとする。このとき、微分演算子 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ はどのような行列で表現されるか。

また、その行列を $\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{bmatrix}$ に右から掛けるとどうなるか？

ヒント → p148 へ　解答 → p153 へ

★【演習問題 A-2】

$$\text{関数列}\qquad\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin mx\quad m=1,2,\cdots,N \tag{A.61}$$

は N 次元のベクトル空間をなす。この空間に属するベクトル（実は関数）は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned}&a_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x+a_2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x+\cdots+a_N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin Nx\\ =&\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x\cdots & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin Nx\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_N\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.62}$$

演算子 $(1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\quad(2)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ はこのベクトル空間内の演算子か？ —そうであるならば演算子を行列で表現せよ。

ヒント → p148 へ　解答 → p153 へ

付録 B　ベクトル空間

ここまで、ベクトルを「数を並べたもの」とか「矢印」とか、具体的なものとして扱ってきた。数学の利点の一つは「抽象化」である（抽象化することによって問題をより広い視点で見ることができるようになる）。そこで、以下では「ベクトル」という言葉の意味をずっと広く取ることにする。まず大雑把に述べておくと足し算とスカラー倍ができるものは全部ベクトルである。

B.1　そもそもベクトルとはなんぞや？

B.1.1　ベクトル空間の条件

以下では、「ベクトル」という言葉を非常に抽象的に使うので、その意味でのベクトルはこれまでの $\vec{a}$ のように矢印を使うのではなく、$\mathbf{a}$ のように色付[1]ゴシック体で表現することにする。

以下の性質を持つ二つの演算（これまでもやってきた「足し算と定数倍」）が定義されている集合を「**ベクトル空間 (vector space)**」（または「**線形空間 (linear space)**」）と呼ぶ。

定義 27: ベクトル空間の条件: 加法

次の性質を持つ「加法」と呼ぶ二つの元から一つの元への写像 $\boxed{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\mapsto\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ が定義[2]できる。

交換則　任意の元 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ について、

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{B.1}$$

結合則　任意の元 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ について、

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \tag{B.2}$$

単位元　任意の元 $\mathbf{a}$ に対し、

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \tag{B.3}$$

となる一つの元 $\mathbf{0}$（単位元と呼ぶ）が存在する。

逆元　任意の元 $\mathbf{a}$ それぞれに対し、

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0 \tag{B.4}$$

となる元 $-\mathbf{a}$（逆元と呼ぶ）が存在する。

定義 28: ベクトル空間の条件: スカラー倍

次の性質を持つ「スカラー倍」$\boxed{\mathbf{a}\mapsto\alpha\mathbf{a}}$ が定義[3]できる。

可換性　任意の元 $\mathbf{a}$ とスカラー α,β について、

$$\alpha(\beta\mathbf{a})=\beta(\alpha\mathbf{a}) \tag{B.5}$$

1 倍　任意の元 $\mathbf{a}$ について、

$$1\times\mathbf{a}=\mathbf{a} \tag{B.6}$$

分配則（ベクトルの和）　任意の元 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ とスカラー α について、

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b} \tag{B.7}$$

分配則（スカラー xsy）　任意の元 $\mathbf{a}$ とスカラー α,β について、

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a} \tag{B.8}$$

---

[1] 白黒印刷では色が出ないが勘弁。

[2] より精密に書くなら、ベクトル空間の要素の任意の組 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に対してベクトル空間の要素が一つ対応するという対応関係を作ることができる、ということになる。名前は「加法」であるが、この性質を持っていれば実際の演算はどんなものでもいい。

[3] こちらもより精密に書くなら、ベクトル空間の要素の任意 $\mathbf{a}$ とスカラー（実数または複素数）α の組に対してベクトル空間の要素が一つ対応するという対応関係を作ることができる、ということになる。

FAQ この「定義」は **結果 2** →p14 と同じものでは？

同じものを含んでいるが、**結果 2** →p14 を考えたときは、ベクトルとは「数を n 個並べたもの」であるという実態が先にあって、その足し算の定義もすでに行われていた。ここで考えているのは逆に、具体的な内容（数が n 個で表されているとか）を考えずに「こんな演算ができる空間があったとしたら」という仮定を出発点に置く。

上の定義の「スカラー（α や β）」が実数である場合を「**実ベクトル空間 (real vector space)**」（または「**実線形空間 (real linear space)**」）、複素数の場合を「**複素ベクトル空間 (complex vector space)**」（または「**複素線形空間 (complex linear space)**」）と言う[†4]。実ベクトル空間と複素ベクトル空間をそれぞれ「実数を係数体とするベクトル空間」「複素数を係数体とするベクトル空間」のように呼ぶこともある[†5]。

FAQ 交換則や結合則が成り立たない加法ってあるんですか？

定義 27 →p129 で書いている「加法」は「いわゆる普通の足し算」とは限らない。「いわゆる普通の足し算」ではない演算を持ってきて、それがベクトル空間になるかどうかを判断する。たとえば「この空間における加法とは二つの実数の平均を取る操作である」という定義を取ることができるが、その定義では結合法則が成り立たず、ベクトル空間ではない。数学では、なるべく一般的に物を考えようとするので、「当たり前」と思うところも前提として（ということはつまり、当たり前じゃないものも存在していると考えて）「そういう前提があれば何が言えるか」を考えていくのである。

我々はこの後しばらく「この公理が満たされるならどんな結果が導けるか」を考えていく。そうしておくことで後である空間がベクトル空間であると判明したならば、「〇〇の定理が使える」と即座に判断できるわけである。これらはいずれも「何を当たり前のことを」と言いたくなるほどに「当たり前」の条件である。それは我々が普段使っている量がすでに「ベクトル空間」に属する量だからである。

定義 27 →p129 の「加法」と **定義 28** →p129 の「スカラー倍」は、まとめて

〇〇と〇〇の線形結合は〇〇の〇〇が、考えているベクトル空間の中に存在していなくてはいけない。

と表現される。

いくつかの実例をみておこう。もっともつまらないベクトル空間は $\mathbf{0}$ だけを含む集合である。加法は $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ で定義し、スカラー倍を「$\mathbf{0}$ に何を掛けても $\mathbf{0}$」で定義すれば、ベクトル空間の公理をすべて満たす（とはいえ、つまらない）。

実数の集合はベクトル空間をなす。実数と実数の線形結合は実数だからである[†6]（単位元と逆元があることは自明としよう）。ただし、条件の中の「スカラー」が複素数だと線形結合を取ると複素数になってしまうから、実ベクトル空間であって複素ベクトル空間ではない。

同様に、複素数と複素数の線形結合は複素数なので、複素数もベクトル空間である（こちらはスカラーは実数でも複素数でもよいが、複素数にするのが普通である）。

もちろん、数ベクトル $\vec{A}$（3 次元の場合に成分で表現すれば、$(A_x\ A_y\ A_z)$ となる）は上の全ての条件を満たす。

普通に思いつく「ベクトル」よりも大きなものも「ベクトル」の範疇に入る。たとえばある共通の定義域（$a<x<b$ など）で定義された関数 $f(x)$ はベクトルである（関数と関数の線形結合は関数だ）[†7]。

「当たり前」とは言ったが、なかには上の条件を満たさないものもある。たとえば「自然数」の集合を考えると、交換則と結合則は満たすが、単位元（$\mathbf{0}$ はこの場合、数の 0 である）は「自然数」には含まれない[†8]し、a の逆元となる $-a$ は負の数であるから「自然数」に含まれない。自然数と自然数の線形結合は自然数とは限らないのだ。

ベクトル空間の公理を満たすならば、その空間では

結果 64: 単位元の唯一性

ベクトル空間には単位元は一つしかない。

[†4] もっと狭い集合として「整数ベクトル空間」や「有理数ベクトル空間」があってもいいし、もっと広い集合として「四元数ベクトル空間」があってもいいだろうが、それらはここでは考えない。

[†5] 「係数体」は上の定義の中で「スカラー」と呼んでいる数がどの「体」に属しているかを示す言葉。「体」はここで使う数の範囲（加法と乗法がちゃんと定義されていることが条件）を表現する言葉である。

[†6] 「ベクトルとは矢印で表せるもの」とか「ベクトルは向きと大きさがあるもの」と習った人には、単なる実数が「ベクトル」と呼ばれることには違和感があると思うが、ここでの「ベクトル」はそういう定義なのだ。

[†7] 定義域が共通でないと足し算ができないからベクトルではない。

[†8] 自然数が 0 を含むようにする定義もあるにはある。

結果 65: 逆元の唯一性

ベクトル空間の一つの元 $\mathbf{a}$ に対して逆元 $-\mathbf{a}$ は一つしかない。

のような定理が成り立つ。簡単なので問題としてやっておこう。

【問い B-1】 上の二つの結果を証明せよ。

ヒント → p141 へ　解答 → p147 へ

B.2　ベクトル空間の基底

有限次元ベクトル空間である場合、独立なベクトル有限個の線形結合を作ることで他のベクトルを表現できる[†9]。ベクトル空間 V があるとき、以下の性質を満たすベクトルの組を「V の基底」と呼ぶ。

定義 29: ベクトル空間の基底

ベクトル空間 V に含まれる全ての要素を、あるベクトルの組 $\{\mathbf{v}_*\}$ の線形結合で

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_N\mathbf{v}_N \tag{B.9}$$

のように一意的に表現できるとき、$\{\mathbf{v}_*\}$ を「V の基底」と呼ぶ。N を「V の次元」と呼び、$\boxed{N = \dim V}$ と表す。

上の「一意的に」という言葉の意味は「二つの方法で一つのベクトルが表現できたりしない」ことである。
定義によりほぼ自明だが、以下のことが言える。

結果 66: N 次元ベクトル空間は N 個の基底を持つ

(1)N 次元ベクトル空間内の N より大きい数のベクトルは必ず線形従属である。
(2)N 次元ベクトル空間内に線形独立な N 個のベクトルの組があれば、その組は基底をなす。

これまで考えていた N 個の数を並べた数ベクトルは

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

のように基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ の線形結合として表現できる。

B.3　ベクトル空間の例

B.3.1　n 成分のベクトル

n 個の実数を並べたもの $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ は実ベクトル空間となる。スカラーとして複素数を使ってはならない。そうすると元の空間からはみ出してしまうからである。実数の集合を $\mathbb{R}$ のように表すとき、n 個の実数を並べた集合は $\mathbb{R}^n$ と表す。

同様に、n 個の複素数を並べたもの $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ は複素ベクトル空間となる。$\mathbb{C}^n$ と表す。ベクトル空間の定理の中には $\mathbb{C}^n$ の場合は成り立つが $\mathbb{R}^n$ では成り立たないものが多い。よってこの二つの違いは重要である。
$\mathbb{R}^n$ も $\mathbb{C}^n$ も次元は n であるが、実は $\mathbb{C}^n$ の方は基底にかける係数は複素数であり、複素数は二つの実数で表現できるから、$\mathbb{C}^n$ は実数で考えると 2 倍の自由度を持っている。

【問い B-2】 x が実数で z が複素数である数字のペア $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ を考えよう。加法やスカラー倍は通常どうりに定義するとすると、この集合は実ベクトル空間になるか、複素ベクトル空間になるか？

解答 → p147 へ

[†9] 逆に、独立なベクトルを有限個の基底では表しきれない場合があって、その場合は「無限次元ベクトル空間」となる。本講義ではあまり扱わない。

B.3.2　行列

$n \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ の集合はベクトル空間になる。 足し算とスカラー倍は行列なのだから定義でき、結合法則・交換法則・分配法則を満たしていることも当然である。問題は演算が閉じるかどうかとなる。

行列と行列の線形結合は行列だから、特に条件をつけてない「行列」はベクトル空間になる。

行列にある程度の条件をつけてもベクトル空間になる例がある。たとえば対称行列 $\boxed{\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}}$ の集合は、「対称行列と対称行列の線形結合はやはり対称行列」という条件を満たすのでベクトル空間になる。

2×2 行列の場合、基底を

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

のように 4 つの行列で表現することができる。つまり、4 次元のベクトル空間である。対称行列なら

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

のように基底が選ばれる（3 次元のベクトル空間）。

以下で定義する「エルミート行列」は量子力学での応用が特に重要だ。

定義 30: エルミート共役とエルミート行列

「複素共役を取って、さらに転置する」操作を「**エルミート共役 (Hermitian conjugate)**」[†10] と呼び、記号 † を使って表現する[†11]。

$\boxed{\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}}$ を満たす行列を「**エルミート行列 (Hermitian matrix)**」と呼ぶ。

エルミート共役が以下の性質を満たすことはすぐにわかる。

結果 67: 行列のエルミート共役の性質

(1)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger$
(2)$(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$
(3)$(\alpha\mathbf{A})^\dagger = \alpha^* \mathbf{A}^\dagger$
(4)$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

2×2 の行列の場合、$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}}$ である。$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ がエルミート行列であるためには、a, d は実数であり、かつ、$\boxed{b = c^*}$ でなくてはいけない。u, v, x, y を実数とすると、$\begin{bmatrix} u & x - \mathrm{i}y \\ x + \mathrm{i}y & v \end{bmatrix}$ という形でなくてはいけない。この行列を以下のように展開することもできる。

$$\begin{aligned} & u\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = & \underbrace{\frac{u+v}{2}}_{w}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{z}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.13}$$

つまり 2×2 エルミート行列の基底は

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

の四つ[†12]であり、係数 w, x, y, z は実数である（エルミート行列の作るベクトル空間は実ベクトル空間[†13]）。

【問い B-3】 以下の行列の集合はベクトル空間をなすか？ —係数体は複素数であるとする。

(1)反対称行列
(2)上三角行列
(3)行列式が 0 である行列

解答 → p147 へ

B.3.3　多項式

n 次の多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ の集合は、足し算とスカラー倍は結合法則・交換法則・分配法則を満たすように定義できるし、線形結合をとっても n 次の多項式であり、単位元 0 も逆元 $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots a_nx^n$ も存在するのでベクトル空間である。

[†10] シャルル・エルミート (Charles Hermite) というフランス人数学者の名前に因む。なので読み方は「エルミート」となる。もっとも、英語話者は Hermitian は「はーみっしゃん」のように発音するようだ。物理でよく出てくる「エルミート多項式」にも名を残している。

[†11] この記号 † は「ダガー」と読む。短剣を意味する。$\mathbf{A}^\dagger$ は「えー・だがー」のように読む。

[†12] $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は「パウリ行列」と呼ばれ、物理のあちらこちらでお世話になる行列である。

[†13] エルミート行列の成分には虚数が含まれているが、スカラー倍するときの係数が実数なのだから実ベクトル空間である。

注意して欲しいのは、$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ という一つの数がベクトルなのではなく、x を与えれば $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ がわかる という対応関係（関数）そのものがベクトルである、ということだ。5x + 3 と 7x^2 − 4 を足すと 7x^2 + 5x − 1 になる という関係は特定の x に対して成立するのではなく、「関数」そのものに対して成立する。

n 次の多項式は a_0 から a_n まで、$n+1$ 個のパラメータを持つ $n+1$ 次元のベクトル空間である。

B.4　線形写像と Ker , Im

B.4.1　一般的な線形写像

「線形写像」の定義は2.3.3 → p18 項で行ったが、その意味するところは

線形結合を取る という演算と線形写像は、順番を変えても結果は同じ。

であった。実例としてもっともよく目にするのは、「ベクトル $\vec{v}$ に行列 $\mathbf{M}$ を掛けてベクトル $(\mathbf{M}\vec{v})$ を作る」という計算で、この $\vec{v} \mapsto (\mathbf{M}\vec{v})$ という写像は確かに上の定義を満たす。

他に「$\vec{v}$ に対して、定ベクトル $\vec{A}$ との内積を取って $\vec{A}\cdot\vec{v}$ を作る」というベクトルからスカラーを作る写像 $\vec{v} \mapsto \vec{A}\cdot\vec{v}$ も線形写像である。

多項式に対する線形写像として重要なのが「微分」である。微分は以下の式をを満たす。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) \tag{B.15}$$

B.4.2　Ker と Im

ベクトルをベクトルに写す線形写像 $\phi(\ )$ により、$\mathbf{0}$ は $\mathbf{0}$ に写像される。

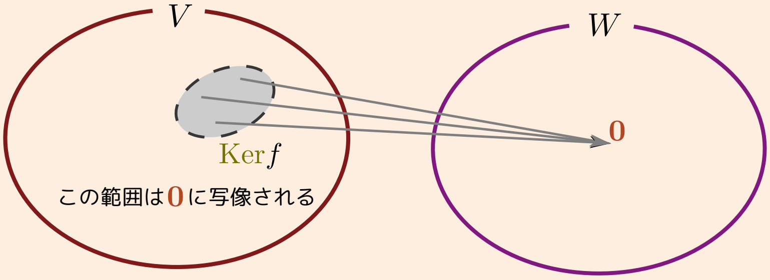
$$\phi(\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{0}}_{\mathbf{a}}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{0}) \tag{B.16}$$

のように写像前に $\mathbf{0}$ を足しても、写像後に $\phi(\mathbf{0})$ を行っても同じであるという式（線形写像ならこれを満たす）を作れば、$\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ であることがわかる。この性質は、考えている「ベクトル」が多項式であっても正しい（たとえば、上で書いた例である「微分」は、0 という多項式を 0 に写像する）。

逆に $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ になったからといって $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ とは限らない。$\mathbf{0}$ ではないベクトルの写像が $\mathbf{0}$ になる可能性はある（微分という写像の場合、定数を微分すれば 0 である）。写像 ϕ を施すと $\mathbf{0}$ になる要素の集合を「**核 (kernel)**」[†14]と呼び、Ker ϕ という記号で表現[†15]する。

定義 31: Ker の定義

V の集合要素のうち、写像 $f : V \to W$ の結果が $\mathbf{0}$ になる集合を、「f の核」と呼び、Ker f と表現する。



Ker という新しい記号を使っているが、実はこの概念自体は初めて出てきたわけではない。列基本変形を使って $\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ のように変形できることを(4.33) → p73 のあたりで示したが、この $\mathbf{0}$ になっている列がかかる相手が Ker $\mathbf{M}$ である。この行列を掛けると、

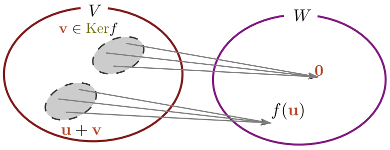
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ * \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

[†14] なんでこれが「核」なんだという気もしないでもないが、「中心（$\mathbf{0}$）を取り巻く部分」という意味なのだろう。より意味の明確な名称として「nullspace」と呼ぶこともある。「null」は 0 なので「0 になる空間」という意味。

[†15] 同じことを $\phi^{-1}(\mathbf{0})$ と表現する本もあるが、$\mathbf{0}$ 以外に Ker ϕ が存在する場合には ϕ には逆写像が存在しないので、この書き方はちょっと誤解を招く書き方である。

のようになって、「$*$」の部分は演算によって消される（これこそが Ker の意味）ことがわかる。この「0」が続く列が出てこない場合（行列の列の数と階数が同じ場合）は Ker は $\mathbf{0}$ のみを含む集合 $\{\mathbf{0}\}$ となる[†16]。

線形写像は $\boxed{\phi(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\phi(\mathbf{v})}$ を満たすから、あるベクトル $\mathbf{v}$ が $\mathrm{Ker}\,\phi$ に属するなら、その定数倍 $\lambda\mathbf{v}$ も $\mathrm{Ker}\,\phi$ に属する。また、$\mathrm{Ker}\,f$ に属さないベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathrm{Ker}\,f$ に属するベクトル $\mathbf{v}$ の線形結合を写像すると、



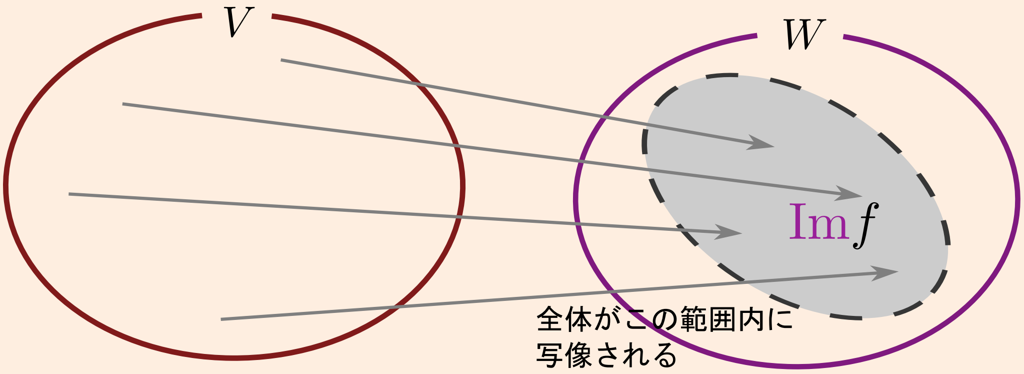
$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) \tag{B.18}$$

となる。つまり $\mathrm{Ker}\,f$ に属する部分の寄与は、写像によって「消えてしまう」ことになる。後で示すが写像により次元が下がるが、それは行列で表現した(B.17)$_{\to\,\mathrm{p133}}$を見てもわかるだろう。

Ker と一緒によく出てくる集合として、「**像 (image)**」[†17]がある。

定義 32: Im の定義

写像 $f: V \to W$ が行われるときの W の中の、写像の結果の集合を「f の像」と呼び、$\mathrm{Im}\,f$ と表現する。



Im も初めて出てきた概念ではない。(4.32)$_{\to\,\mathrm{p73}}$のあたりで行基本変形を使うと行列が $\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{M}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{0}\end{bmatrix}}$ のように変形できることを示したが、この $\mathbf{0}$ になっている行以外の部分が $\mathrm{Im}\,\mathbf{M}$ である。

$$\begin{bmatrix} * \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star \end{bmatrix} \tag{B.19}$$

のような演算の結果を考えれば、「$*$」の部分が Im であることがわかる。行列の行の数と階数が等しい場合、Im は V そのものになる。

Ker は $\hat{O}$ の写像前の空間 V の部分集合であり、一方 Im は $\hat{O}$ の写像後の空間 W の部分集合である。

簡単な例を見ておこう。$\boxed{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}}$ という写像（いわゆる「xy 平面への射影」を考えて、これを $\hat{P}_z$ と書くと、$\mathrm{Ker}\,\hat{P}_z$ は $\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}$（$z$ は任意）という集合である。$\mathrm{Im}\,\hat{P}_z$ は、もちろん xy 平面である。

2 次元でも 3 次元でも（あるいはもっと高い次元でも）回転という写像の Ker は原点 $\vec{0}$ しかない。Im は全空間である。

n 次多項式関数から n 次多項式関数への「微分」という写像においては、$\mathrm{Ker}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ は定数関数である。$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ は $n-1$ 次の多項式関数になる（微分すると次数が落ちるので、結果には n 次の項がない）。

B.4.3　単射・全射と Ker・Im

結果 68: 単射・全射と Ker・Im

集合 V から集合 W への写像 $f: V \to W$ において、$\boxed{\mathrm{Im}\,f = W}$ であるとき、f は全射である。また、$\boxed{\mathrm{Ker}\,f = \{\mathbf{0}\}}$ のとき、f は単射である。

全射とは「写像の結果が集合全体を覆うこと」であり、単射とは「写像が 1 対 1 対応すること」である。たとえば写像 $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x}$ は単射でかつ全射である。一方、写像 $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2}$ は単射でも全射でもない。像の中に負の数はないから全射ではないし、a も $-a$ も a^2 に写ってしまうから単射でもない。

[†16] $\mathbf{0}$ はすべての線形演算子の Ker に含まれる。よって Ker が空集合になることはない。

[†17] image は「イメージ」と読み、記号 Im で表す。

上の結果の全射の部分は全射という言葉の定義とほぼ同じである。単射の部分について説明しておこう。単射でなければ、$\boxed{\hat{O}\mathbf{v}_1 = \hat{O}\mathbf{v}_2}$となるベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が存在するが、その場合 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ が $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ に入るから、$\boxed{\mathrm{Ker}\,\hat{O} \neq \mathbf{0}}$である。逆に $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ が $\{\mathbf{0}\}$ ではないなら $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ の中に $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{u}$ があることなり、$\mathbf{v}_1$ と$\boxed{\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}}$は$\boxed{\hat{O}\mathbf{v}_1 = \hat{O}\mathbf{v}_2}$を満たす（写像が 1 対 1 ではない）。次のことも言える。

結果 69: $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ はベクトル空間

ベクトル空間 V の中の、$\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ は、ベクトル空間の定義を満たす。
→ p129

$\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ に属するベクトルの線形結合を取れば、やはりそれは $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ に属することは、$\boxed{\hat{O}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}}$ならば$\boxed{\hat{O}\left(\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}}$となることからすぐわかる。ベクトル空間であるための条件はこのあと単位元と逆元の存在だが、$\mathbf{0}$ が $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ 内にあることは自明。

【問い B-4】 $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ に属するベクトル $\mathbf{v}$ の逆元 $-\mathbf{v}$ は、必ず $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ の中にあることを示せ。 ヒント → p141 へ　解答 → p147 へ

いくつかの例を見ているとわかることとして「Ker が $\{\mathbf{0}\}$ ではないときは Im が小さく（狭く）なる」ことがある。それを定理としよう。

結果 70: Ker と Im の次元

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,\hat{O}\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,\hat{O}\right) = \dim V \tag{B.20}$$

が成り立つことは以下のようにして示せる。

$\boxed{\dim V = N, \dim\left(\mathrm{Ker}\,\hat{O}\right) = n}$とする。写像元の空間 V の基底を

$$\underbrace{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n}_{\in \mathrm{Ker}\,\hat{O}}, \mathbf{v}_{n+1}, \cdots, \mathbf{v}_N \tag{B.21}$$

のように選ぶことができる。V 内の任意のベクトルは $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{v}_i$ と書くことができて、これに $\hat{O}$ を掛けると、演算子の線形性により

$$\hat{O}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \hat{O}\mathbf{v}_i \tag{B.22}$$

となるが、i が 1 から n までは$\boxed{\hat{O}\mathbf{v}_i = 0}$なので、$\mathrm{Im}\,\hat{O}$ は

$$\sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i \hat{O}\mathbf{v}_i \tag{B.23}$$

と書かれるベクトルになる。これは $N - n$ 次元のベクトルである。

このことは Ker と Im を行列で表現した式、(B.17) → p133 と (B.19) → p134 を見てもわかる。$\dim(\mathrm{Ker}\,\mathbf{M})$ は行列の行数から $\mathrm{rank}\,\mathbf{M}$ を引いた数だし、$\dim(\mathrm{Im}\,\mathbf{M})$ は $\mathrm{rank}\,\mathbf{M}$ である。

B.5 部分空間と商空間

B.5.1 部分空間

ベクトル空間の中で、「より小さいベクトル空間」を作ることができたとき、それを「**部分空間 (subspace)**」と呼ぶ。たとえば 3 次元のベクトル $\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$ のうち第 3 成分を 0 にしたもの $\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}$ だけを抜き出したものは、やはりベクトル空間である。前節でベクトル空間 V 内の $\mathrm{Ker}\,V$ のみ取り出したものもベクトル空間になることを示したが、それも部分空間の例である。

単に「抜き出した」だけではベクトル空間になるとは限らない。たとえば「$\boxed{V_z \geq 0}$の条件を満たす成分を抜き出す」ことで作ったベクトル空間の部分集合は、ベクトル空間の条件 **定義 27** → p129 を満たさない（たとえば加法に対する逆元がなくなる）。

【問い B-5】 以下の例は「部分空間」になるか？

(1)3 次元のベクトルのうち第 3 成分を 1 にしたものだけを抜き出したもの
(2)3 次元のベクトルのうち長さが 1 であるものだけを抜き出したもの
(3)3 次元のベクトルのうち $V_x = V_y$ が成り立つものだけを抜き出したもの

解答 → p147 へ

以下の結果が知られている。

結果 71: 部分空間の共通部分は部分空間

あるベクトル空間 V の部分空間が W_1, W_2 と二つあるとき、その共通部分 $W_1 \cap W_2$ はやはり部分空間となる。

W_1 に属するベクトルの線形結合は W_1 に属し、W_2 に属するベクトルの線形結合は W_2 に属する。であれば共通部分 $W_1 \cap W_2$ に属するベクトルの線形結合は $W_1 \cap W_2$ に属する、ということは確認できるだろう（単位元と逆元についても同様）

同様の状況で、和集合 $W_1 \cup W_2$ はやはり部分空間は一般には成り立たないことに注意しよう。例としては W_1 が $\begin{bmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のようなベクトル、W_2 が $\begin{bmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}$ のようなベクトルの場合である。$W_1 \cup W_2$ の中には $\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}$（$V_x$ も V_y も 0 ではない）は入ってない。しかし、$W_1 \cup W_2$ 内のベクトルの線形結合を取ると、結果にはこの形のベクトルが入ってくる。

B.5.2　直和と不変部分空間による分解

以下のように、「部分空間と部分空間の和」および直和を定義しよう。

定義 33: ベクトル空間の和

ベクトル空間 V が二つの部分空間 W_1, W_2 を持つとする。二つのベクトル空間の和 $W_1 + W_2$ とは「W_1 の元と W_2 の元の線形結合で作られるベクトル空間」である。

少し具体的に書くと、W_1, W_2 に含まれるベクトルを

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{M_1} \alpha_i \mathbf{u}_i}^{W_1\text{内の任意のベクトル}}, \qquad \overbrace{\sum_{i=1}^{M_2} \beta_i \mathbf{v}_i}^{W_2\text{内の任意のベクトル}} \tag{B.24}$$

のように基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{M_1}$ と基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{M_2}$ を使って表したとき、両方の基底を合わせた $\{\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*\}$ は V の基底となる場合、$V = W_1 + W_2$ のように、足し算記号で示す。

定義 34: ベクトル空間の直和

$W_1 + W_2 = V$ でかつ $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるとき「V は W_1 と W_2 の**直和 (direct sum)** である」と言い、$V = W_1 \oplus W_2$ と表す。

上の具体的表現で、$\{\mathbf{u}_*\}$ と $\{\mathbf{v}_*\}$ に重なりがない[†18]場合が直和であり、$V = W_1 \oplus W_2$ と表現する。このとき、V 内の任意のベクトルは

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M_1} \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{M_2} \beta_i \mathbf{v}_i \\ = & \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{M_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{M_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.25}$$

[†18] 厳密に表現すると、「重なりがない」とは、「$\sum_{i=1}^{M_1} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{M_2} \beta_i \mathbf{v}_i$ となることは、全ての α, β が 0 になる（つまりベクトルが $\mathbf{0}$ である）場合以外にはありえない」ということ。$\{\mathbf{u}_*\}$ の線形結合を $\{\mathbf{v}_*\}$ の線形結合で表現できてしまうなら「重なりがある」ことになる。

で表現できる。$\{\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*\}$ を基底として使えば、V 内のベクトルは、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{M_1} & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M_1} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{M_2} \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

となり、その成分は、$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M_1} \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{M_2} \end{bmatrix}$ のようにきれいに分けて表現される。この書き方を「直和分解」と呼ぶ。

以上のようにベクトルの成分を直和分解したとき、ある行列 $\mathbf{M}$ が

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(2)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \alpha_* \\ \hline \beta_* \end{array}\right] \tag{B.27}$$

のように別れた形で表現できることがある（もちろんこうならないときもある）。つまり「$\mathbf{M}$ を掛けても W_1 からベクトルが外に出ることはない（W_2 に関しても同様）」という状況であるが、こうなったとき、「W_1 と W_2 は $\mathbf{M}$ の**不変部分空間 (invariant subspace)** である」と言う。逆に不変部分空間であったときは、ベクトルの基底を調整することで（これは後で定義する行列の相似変換を行うことに対応する）、かならず (B.27) の形に書き直せる。

→ p83

$\mathbf{M}^{(1)}$ は $M_1 \times M_1$ 行列、$\mathbf{M}^{(2)}$ は $M_2 \times M_2$ 行列である。

例として、z 軸回りの回転の行列を考えると、

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline z \end{array}\right] \tag{B.28}$$

により、z 成分は変化せず、x 成分と y 成分が混ざる。ベクトルも行列も、x-y 部分と z 部分に別れている。xy 平面と z が不変部分空間である。

この行列の行列式は

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{M}^{(1)} \det \mathbf{M}^{(2)} \tag{B.29}$$

と、各々の行列の行列式の積で計算できる（$\boxed{\textbf{結果 29}}$）。

→ p59

B.5.3　商空間

部分空間の作り方の一つとして「ベクトル空間 V をベクトル空間 W で割る」と表現される操作がある。この言葉の意味することは、その「W に属するベクトル」の方向を無視するのである。たとえば W が $\mathbf{a}$ を含むなら、V の中にある $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}+\mathbf{a}$ は「$\mathbf{a}$ だけの違いを無視すれば同じ」だから「同じベクトルだとみなす」操作を行う。さらに $\mathbf{a}$ をスカラー倍して足した $\mathbf{v}+k\mathbf{a}$ も、$\mathbf{v}$ と同じベクトルだとみなす。この空間を「**商空間 (quotient space)**」と呼ぶ。

地図を作るとき、空間（3 次元）から、高さを無視することで作られた紙面上の地図（2 次元）は、商空間の一例と言える。

この「同じベクトル」であることを「同値」あるいはより丁寧には「$\mathbf{a}$ を無視する立場では同値」と表現し、「$\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}+k\mathbf{a}$ は同値類に属する」と表現する。「同値類に属する」とは「$\mathbf{a}$ のスカラー倍を足せば一致させることができる」という意味である。記号としては $\boxed{\mathbf{v} \sim \mathbf{w}}$ のように書く。$\boxed{\mathbf{v} \sim \mathbf{w}}$ は、$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{w} + k\mathbf{a} \text{ となる } k \text{ が存在する}}$ という意味である。

同値関係を入れたベクトル空間は、次元が元のベクトル空間より下がる部分空間となる。

B.6　演算子の積と Ker

B.6.1　二つの演算子の Ker

数 x と y に対しては、

$\boxed{xy = 0}$ ならば、「$\boxed{x = 0}$ または $\boxed{y = 0}$」[†19] が成り立つ。

が言える。しかし、演算子 $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ の場合、

[†19] 念の為注意。数学において「A または B が成り立つ」は A と B が両方成り立つ場合を含む。

$\hat{X}\hat{Y}=\hat{0}$ ならば、「$\hat{X}=\hat{0}$ または $\hat{Y}=\hat{0}$」[†20] が成り立つ。

とは ならない。まず、$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が交換しないなら、$\hat{X}\hat{Y}=\hat{0}$ だが $\hat{Y}\hat{X}\neq\hat{0}$ も有り得ることに注意しよう。さらに、もしも $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が交換したとしても、上は成り立たない。

たとえば、行列 $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ と行列 $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}$ の場合、これらは交換するけど、

$$\mathbf{XY}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\tag{B.30}$$

となって、$\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ が $\mathbf{0}$ でなくてもその積は $\mathbf{0}$ になる。

演算子ではなく、演算子が掛かる相手であるベクトルに対しては、$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が交換するならば、以下の定理が成り立つ。

結果 72: 演算子の積の Ker

相異なる演算子 $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が交換するとき、$\hat{X}\hat{Y}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{v}$ は、$\hat{X}\mathbf{v}_x=\mathbf{0}$ となるベクトルと $\hat{Y}\mathbf{v}_y=\mathbf{0}$ となるベクトルの線形結合で表すことができる。すなわち、適切な係数を用いて

$$\mathbf{v}=\alpha_x\mathbf{v}_x+\alpha_y\mathbf{v}_y\tag{B.31}$$

と書ける[†21]。

上の場合で、さらに $\mathrm{Ker}\left(\hat{X}\right)$ と $\mathrm{Ker}\left(\hat{Y}\right)$ の共通部分が零ベクトルしかない（つまり $\mathbf{v}_x$ の線形結合では $\mathbf{v}_y$ が表せない）場合は、

$$\mathrm{Ker}\left(\hat{X}\hat{Y}\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{X}\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(\hat{Y}\right)\tag{B.32}$$

のように $\mathrm{Ker}\left(\hat{X}\hat{Y}\right)$ を直和で書くことができる。

(B.31) のように書かれた $\mathbf{v}$ は $\hat{X}\hat{Y}\mathbf{v}=0$ であるが、$\begin{cases}\hat{X}\mathbf{v}=\alpha_y\hat{X}\mathbf{v}_y\\ \hat{Y}\mathbf{v}=\alpha_x\hat{Y}\mathbf{v}_x\end{cases}$ となって、どちらも結果は一般に $\mathbf{0}$ ではない。

☐【問い B-6】 (B.30) で使った行列 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ の場合、$\mathrm{Ker}(\mathbf{XY})$ は 2 次元のベクトル空間全体である。これが $\mathrm{Ker}\,\mathbf{X}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathbf{Y}$ であることを確認せよ。 解答 → p147 へ

☐【問い B-7】 もう少し複雑な例として、

$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix}$ の場合（この場合も $\mathrm{Ker}(\mathbf{XY})$ は 2 次元ベクトル空間全体である）でも、$\mathrm{Ker}(\mathbf{XY})$ が $\mathrm{Ker}\,\mathbf{X}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathbf{Y}$ であることを確認せよ。 解答 → p147 へ

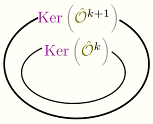
B.6.2 演算子のべき乗の Ker

次に同じ演算子の積について考えることにする。$\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^2\right)$ の中に $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ が含まれることはすぐにわかるが、「$\hat{O}$ を掛けると $\mathrm{Ker}\,\hat{O}$ に入るベクトル」も入る。

同様に $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^n\right)$ について考えると、$\mathrm{Ker}\,\hat{O}^n$ は $\mathrm{Ker}\,\hat{O}^{n-1}$ より広い（次元が大きい）か、あるいは同じ次元かであることがわかる。以上のように考えると、一般の線形演算子（以下、$\hat{O}$ と書く）の Ker に関して以下の定理が成り立つことがすぐにわかる。

結果 73: $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)$ は $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)$ に含まれる

$$\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)\subseteq\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)\tag{B.33}$$



ゆえに、

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)\right)\leq\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)\right)\tag{B.34}$$

よって

$$\{0\}\subseteq\mathrm{Ker}\,\hat{O}^1\subseteq\mathrm{Ker}\,\hat{O}^2\cdots\subseteq\mathrm{Ker}\,\hat{O}^n\subseteq\mathrm{Ker}\,\hat{O}^{n+1}\cdots\tag{B.35}$$

[†20] 右辺が数 0 ではなく、零演算子 $\hat{0}$ であることに注意。

[†21] $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が交換しないときは、これに「$\hat{X}$ を掛けることで $\mathrm{Ker}\left(\hat{Y}\right)$ に入るベクトル」などを加える必要がある。

しかしどこまでも Ker が広がり続けることはありえない。Ker の次元はベクトル空間の次元を超えられないからである。$\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)$ の次元がベクトル空間の次元に一致したことは、考えているベクトル空間内で$\boxed{\hat{O}^k=\hat{0}}$になったことを意味する。このように「$k$ 乗すると $\hat{0}$ になる演算子は「べき零 (nilpotent)」な演算子と呼ばれる。

「0 じゃないのに、k 乗すると 0 になるなんて、そんな演算子あるの？」と思う人のために例を挙げておく。行列 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ はもちろん零行列ではないが、自乗すると

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{B.36}$$

である。「3 乗すると $\mathbf{0}$」という行列は 2×2 では作れない（3×3 の大きさが必要）。

また、いったん Ker が広がらなくなったらそれ以上は上がらないこと、すなわち

結果 74: Ker の広がりは止まれば止まる

ある正の整数 k で$\boxed{\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)}$が満たされたなら、

$$\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+2}\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+3}\right)=\cdots \tag{B.37}$$

も示せる（証明は略す）。すなわち、ベクトル空間 V の基底を

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{v}_*^{(1)}\}\ \text{は}\ \mathrm{Ker}(\hat{O})\ \text{に属するベクトル}\\
&\{\mathbf{v}_*^{(2)}\}\ \text{は}\ \mathrm{Ker}(\hat{O}^2)\ \text{に属するが、}\mathrm{Ker}(\hat{O})\ \text{に属さないベクトル}\\
&\{\mathbf{v}_*^{(3)}\}\ \text{は}\ \mathrm{Ker}(\hat{O}^3)\ \text{に属するが、}\mathrm{Ker}(\hat{O})\ \text{と}\ \mathrm{Ker}(\hat{O}^2)\ \text{に属さないベクトル}\\
&\vdots\\
&\{\mathbf{v}_*^{(k)}\}\ \text{は}\ \mathrm{Ker}(\hat{O}^k)\ \text{に属するが、}\mathrm{Ker}(\hat{O}^i)\,(i<k)\ \text{に属さないベクトル}\\
&\{\mathbf{u}_*\}\ \text{は}\ \mathrm{Ker}(\hat{O}^i)\,(i\le k)\ \text{のどれにも属さないベクトル}
\end{aligned} \tag{B.38}$$

のようにグループ分けしていくことができる。最後の $\{\mathbf{u}_*\}$ は、$\hat{O}$ を何度掛けても $\mathbf{0}$ にならない。

m を 0 以上の整数として、$\boxed{\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k}\right)\subseteq\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k+1}\right)}$は既にわかっているので、$\boxed{\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k}\right)\supseteq\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k+1}\right)}$を示せば$\boxed{\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k}\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k+1}\right)}$となる。

あるベクトル $\mathbf{v}$ が $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k+1}\right)$ に含まれている（すなわち、$\boxed{\hat{O}^{m+k+1}\mathbf{v}=0}$）とする。これを

$$\hat{O}^{k+1}\left(\hat{O}^m\mathbf{v}\right)=\hat{O}^{m+k+1}\mathbf{v}=0 \tag{B.39}$$

と解釈すれば、$\hat{O}^m\mathbf{v}$ が $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)$ に属するということ。ところが今$\boxed{\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)=\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{k+1}\right)}$と仮定したので、$\hat{O}^m\mathbf{v}$ が $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)$ に属する。これは$\boxed{\hat{O}^{m+k}\mathbf{v}=0}$すなわち、$\mathbf{v}$ が $\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^{m+k}\right)$ に含まれていることを示す。

以上から、$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\hat{O}^k\right)\right)$ は k が増加するにつれて、

(1) $\boxed{k=1}$から 0 で、ずっと 0 に留まる。

(2) $\boxed{k=1}$から増えるが、どこかで増加しなくなり、以後変化しない。

のどちらかとなる。k が n 以降は変化しない。

付録 C　問い・演習問題のヒントと解答

C.1　問いのヒント

【問い 2-2】のヒント ……………………… （問題は p16、解答は p141）

(2) については考えるまでもない。(1) については、$\boxed{x\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}5\\0\\14\end{bmatrix}=\vec{0}}$ に解があるかどうかを探す。(3) も同様。

【問い 2-3】のヒント ……………………… （問題は p17、解答は p141）

2 次関数の最小値（あるいは最大値）を求めるときたら、これは「微分して 0」である（今の場合 2 次の係数 $|\vec{a}|^2$ は正なので、グラフにすると下に凸な放物線となり、微分して 0 の場所は最小値で OK）。

微分するときは、

$$(\vec{a}\underbrace{t}_{\text{ここと}}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\underbrace{t}_{\text{ここを}}+\vec{b}) \tag{C.1}$$

の「ここと」「ここを」の場所をそれぞれ微分して、和を取れば全体の微分になると考えるのが楽（微分のライプニッツ則をベクトルの式にも使う）。

【問い 2-4】のヒント ……………………… （問題は p20、解答は p141）

考えている量は全部 0 以上なので、

$$\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|^2 \le |\vec{u}+\vec{v}|^2 \le (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 \tag{C.2}$$

を証明すればよい。内積を使って書くと

$$(|\vec{u}|-|\vec{v}|)^2 \le (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \le (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 \tag{C.3}$$

である。この式は Schwarz の不等式から出る。

【問い 2-6】のヒント ……………………… （問題は p32、解答は p141）

線形従属なら $\boxed{\vec{c}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}}$ となる α,β が見つけられる。

【問い 2-7】のヒント ……………………… （問題は p34、解答は p141）

まずは $\ell,m,n=1,2,3$ である場合を考えてみる。$\epsilon_{ijk}\epsilon_{123}$ という量は、1 か -1 か 0 にしか成りえない。どういうときに 1 になり、どういうときに -1 になるかをクロネッカーのデルタを使って表現する。

【問い 3-2】のヒント ……………………… （問題は p54、解答は p142）

行列式を $\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ とする。

$\boxed{\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\det(\vec{v}_1,\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_3)}$ である。

【問い 3-3】のヒント ……………………… （問題は p54、解答は p142）

$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{33}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$ という行列があったとして、行列式を変化させない変形として「1 行目の $-\frac{A_{21}}{A_{11}}$ を 2 行目に足す」を行なうことができれば（できないこともあるので注意！）、(1,2) 成分が消せる。

【問い 3-4】のヒント ……………………… （問題は p54、解答は p142）

行列式を $\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ と考えたとき、3 本のベクトルが独立ではないので、どれか 1 本のベクトルを他のベクトルの線形結合で表すことができる。つまり求める行列式は、$\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)$ なのである。

【問い 3-5】のヒント ……………………… （問題は p61、解答は p142）

$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{bmatrix}$ を計算してその det を取る。

【問い 4-1】のヒント ……………………… （問題は p64、解答は p142）

【問い 3-3】→ p54 の解答 → p142 と同じことをやればよい。

【問い 4-2】のヒント ……………………… （問題は p64、解答は p143）

行列式が 0 だったということは、上三角行列にした後の A_{ii} のうちどれかが 0 だったということである。たとえば A_{11} が 0 だったとして、そのとき行ベクトルが独立でないことを示す。

【問い 5-2】のヒント ……………………… （問題は p80、解答は p143）

反例を一個作れば良い。つまり、$*$ を取らないで内積を取ると負になるベクトルを一個作る。

【問い 5-3】のヒント ……………………… （問題は p81、解答は p143）

$\boxed{\langle\mathbf{X}|\mathbf{X}\rangle\ge 0}$ という式を展開する。t は複素数なので $\alpha+\mathrm{i}\beta$（α,β は実数）として、α,β に関する式を作る。

【問い 6-1】のヒント ……………………… （問題は p88、解答は p144）

線形独立でないと仮定して矛盾を示す。(6.2) → p88 が成り立つとしてみて、演算子 $\hat{O}$ を掛けてみる。

【問い 6-2】のヒント ……………………… （問題は p89、解答は p144）

この微分をそのまま実行すれば、

$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\sin n\theta=-n^2\sin n\theta}$ である。部分積分を 2 回やってから実行すると？

【問い 6-4】のヒント ……………………… （問題は p104、解答は p144）

(1) 特性方程式が $(2-\lambda)\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$ で固有値は 1 で重解。$\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ なので、固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。ジョルダン鎖を作るために、$\boxed{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}}$ となるベクトルを探す。

(2) 特性方程式が $(3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)+2-2(4-\lambda)+3(3-\lambda)=(\lambda-3)^3$ で三重解。

【問い 7-1】のヒント ……………………… （問題は p112、解答は p145）

$\boxed{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}}$ なので、偶数べきと奇数べきを分けて考えるとよい。

【問い 7-2】のヒント ……………………… （問題は p113、解答は p145）

$\boxed{\mathbf{J}_i(a)=a\mathbf{I}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}}$ と置く。$\boxed{(\mathbf{D})^i=\mathbf{0}}$ なので、$(a\mathbf{I}+\mathbf{D})^n$ を 2 項定理を使って計算すると、

$$(a\mathbf{I}+\mathbf{D})^n=\sum_{j=0}^{i-1}{}_nC_j\,a^{n-j}\,(\mathbf{D})^j \tag{C.4}$$

と $i-1$ 乗までで止まる。$(\mathbf{D})^j$ は、j が増えるごとに行列の中の 1 の位置が右にずれていくと考えればよい。

【問い A-3】のヒント ……………………… （問題は p122、解答は p146）

1.3 節 → p3 で考えた行列の中にある。

【問い A-6】のヒント ……………………… （問題は p126、解答は p146）

【問い A-5】→ p146 の答の三つのベクトルが、適切な α,β を持ってくれば

$\begin{bmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$ になることを示す。

【問い A-7】のヒント .... （問題は p126、解答は p147）

まずすぐにわかるのは、$\boxed{A_{33}=\cos\theta}$ であろう。これで θ が一つに決まるかというと、0 から 2π まで限ったとしても、この式を満たす解は θ_1 と $2\pi-\theta$ の二つがある（$\boxed{0<\theta_1<\pi}$ としよう）。他の条件から θ が一つに決まるかどうかを考えよう。

$\boxed{A_{33}=\pm1}$ のときは角度は一つしかない（$\boxed{A_{33}=1}$ なら $\boxed{\theta=0}$、$\boxed{A_{33}=-1}$ なら $\boxed{\theta=\pi}$）。この場合はどうなるかも考えておこう。

【問い B-1】のヒント .... （問題は p131、解答は p147）

単位元： $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ のように二つあったと仮定すると、$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$ となることを示す。

逆元： $\mathbf{b},\mathbf{c}$ がどちらも $\mathbf{a}$ の逆元だと仮定する。結合法則を使うと $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ が示される。

【問い B-4】のヒント .... （問題は p135、解答は p147）

$\boxed{\hat{\mathcal{O}}\mathbf{v}=\mathbf{0}}$ なのに $\boxed{\hat{\mathcal{O}}(-\mathbf{v})\neq\mathbf{0}}$ だとしたら？

C.2 問いの回答

【問い 1-1】の解答 .... （問題は p6）

(a) と (d)

【問い 2-1】の解答 .... （問題は p11）

二つのベクトルが平行な場合。足し算しても元のベクトルに平行なベクトルにしかならない。

【問い 2-2】の解答 .... （問題は p16、ヒントは p140）

(1) $x\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}5\\0\\14\end{bmatrix}$ を計算し $\begin{bmatrix}3x+y+5z\\2x-y\\4x+5y+14z\end{bmatrix}$ とする。

これが 0 ベクトルになるには、まず $\boxed{y=2x}$ になる必要がある。代入すると $\begin{bmatrix}5x+5z\\0\\14x+14z\end{bmatrix}$ だが、$\boxed{x=-z}$ であればこれは零ベクトルになる。よって従属。

(2) は計算するまでもなく、2 次元のベクトルが 2 本あれば任意のベクトルが表現できるから、3 本のベクトルは独立ではない。

(3)$x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ を計算すると $\begin{bmatrix}x+2y+3z\\2x+3y+z\\3x+y+2z\end{bmatrix}$ になる。

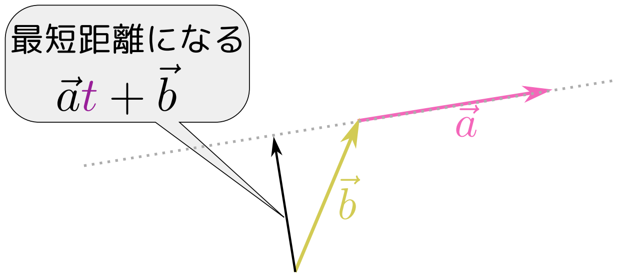
1 番上の成分を 0 にするには $\boxed{x=-2y-3z}$ とすればよいから、$\begin{bmatrix}0\\-y-5z\\-5y-7z\end{bmatrix}$ となる。次に $\boxed{y=-5z}$ にして $\begin{bmatrix}0\\0\\18z\end{bmatrix}$ となるが、これは z が 0 でない限り零ベクトルにはならない。よって独立。

【問い 2-3】の解答 .... （問題は p17、ヒントは p140）

微分の結果は

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}t+\vec{b})+(\vec{a}t+\vec{b})\cdot\vec{a}=2\vec{a}\cdot(\vec{a}t+\vec{b}) \tag{C.5}$$

となる。これはつまり、「$\vec{a}$ と $\vec{a}t+\vec{b}$ が垂直」だということ。これが最短距離になる条件である。図に描いてみても納得できる。



【問い 2-4】の解答 .... （問題は p20、ヒントは p140）

Schwarz の不等式を 2 倍して、全部の式に $|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ を足すと

$$\underbrace{|\vec{u}|^2-2|\vec{u}|\,|\vec{v}|+|\vec{v}|^2}_{(|\vec{u}|-|\vec{v}|)^2}\le\underbrace{|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2}_{|\vec{u}+\vec{v}|^2}\le\underbrace{|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|\,|\vec{v}|+|\vec{v}|^2}_{(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2} \tag{C.6}$$

となる。平方根を取ることで三角不等式を得る。ヒントに述べたように、式がすべて 0 以上の量であることに注意（そうでなかったら不等式が成立しない場合がある）。

【問い 2-5】の解答 .... （問題は p21）

$$\vec{b}\cdot\vec{a}_\perp=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0} \tag{C.7}$$

【問い 2-6】の解答 .... （問題は p32、ヒントは p140）

ヒントの式 $\boxed{\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}$ を代入すると、

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\overbrace{(\alpha\vec{a}+\underbrace{\beta\vec{b}))}_{\text{外積で }0}}^{\vec{c}}=\alpha\vec{a}\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})}_{\vec{a}\text{と垂直}}=0 \tag{C.8}$$

となる。$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ も同様。

$$\overbrace{(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})}^{\vec{c}}\cdot\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{a}\text{とも}\vec{b}\text{とも垂直}}=0 \tag{C.9}$$

【問い 2-7】の解答 .... （問題は p34、ヒントは p140）

i,j,k が $1,2,3$ の置換であり、ℓ,m,n も $1,2,3$ の置換であるときにのみ、 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mn}$ は 0 ではない。i,j,k が $1,2,3$ およびそのサイクリック置換なら 1、$1,3,2$ およびそのサイクリック置換なら -1 と考えると、

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\underbrace{\epsilon_{123}}_{1}=&\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}+\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1}+\delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2}\\&-\delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2}-\delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3}-\delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1}\end{aligned} \tag{C.10}$$

という式を作ることができる（これで i,j,k のうちどれか二つが等しいときには 0 という性質も持っている）。

この式を、求めたい式(2.99)$\underset{\to\text{ p34}}{}$に $\boxed{\ell=1,m=2,n=3}$ を代入したものだと解釈する。元の式をもう一度見ると

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mn}=&\delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{k\ell}+\delta_{in}\delta_{j\ell}\delta_{km}\\&-\delta_{i\ell}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{k\ell}\end{aligned} \tag{C.11}$$

であるが、この式はちゃんと ℓ,m,n に関する反対称も持っていて、ℓmn が 123 の偶置換なら (C.10) と同じ式になり、123 の奇置換なら (C.10) と符号が反対の式になる（ℓ,m,n の中に等しいものがあれば 0 になるということも満たしている）。

後はこの式で $\ell=k$ として k を足し上げる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\Big(&\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kk}+\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{km}\\&-\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{j}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kk}\Big)\end{aligned} \tag{C.12}$$

となるが、足し算されることにより $\delta_{kk}\to 3$ と置き換えられることを使うと、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}=&\delta_{in}\delta_{jm}+3\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}\\&-\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{im}\delta_{jn}-3\delta_{in}\delta_{jm}\\=&\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\end{aligned} \tag{C.13}$$

が導かれる。

【問い 3-1】の解答 ……………………………… （問題は p49）

$\mathbf{A}$ の 1 列めは全て 0 である。よって、$\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}$ の 1 行めに何があっても、$\mathbf{A}\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}$ の結果によらない。つまり 1 行めは何があってもよいので、$\mathbf{A}_{\rangle}^{-1}$ は無数にある。

【問い 3-2】の解答 ……………………………… （問題は p54、ヒントは p140）

$$\begin{aligned}&\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\det(\vec{v}_1,\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_3)\\=&\det(-\vec{v}_2,\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\det(-\vec{v}_2,\vec{v}_1,\vec{v}_3)\end{aligned}\tag{C.14}$$

となる。

【問い 3-3】の解答 ……………………………… （問題は p54、ヒントは p140）

まず $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$ から出発する。この A_{11} が 0 だと以下の作業ができないので、その場合は行の交換を行って A_{21},A_{31} のうち 0 でない方を A_{11} の位置に持ってくる。もしも $A_{\cdot 1}$ が全部 0 だとこれはできないが、そのときはこの列については何もしなくてもいいので次に進む。

A_{11} が 0 でなかったら、

$\begin{cases}1\text{ 行目の }-\dfrac{A_{21}}{A_{11}}\text{ を 2 行目に足す}\\1\text{ 行目の }-\dfrac{A_{31}}{A_{11}}\text{ を 3 行目に足す}\end{cases}$ 操作をすると、行列を $\begin{bmatrix}*&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}$ の形に変形できる。

さっき「A_{*1} が全部 0」の場合を別に考慮したが、それはすでに（変形しなくても）$\begin{bmatrix}*&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}$ の形だったということ（この場合は (1,1) 成分の $*$ も 0）である。

次の段階として、$\left[\begin{array}{c|cc}*&*&*\\\hline 0&*&*\\0&*&*\end{array}\right]$ のように行列を区切って、右下の 2 × 2 の領域に対して同じことを繰り返せば、$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\0&A_{22}&A_{23}\\0&0&A_{33}\end{bmatrix}$ の形になる。

ここで、A_{11},A_{22},A_{33} がすべて 0 でなければ、さらに「3 行めの $-\dfrac{A_{13}}{A_{33}}$ 倍を 1 列めに足す」のような操作を行って、対角行列にまで変形することもできる（A_{11},A_{22},A_{33} のどれかが 0 だとその列に関してはもう何もできない）。

【問い 3-4】の解答 ……………………………… （問題は p54、ヒントは p140）

独立でないということは、$\boxed{\vec{v}_3=\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2}$ を満たす α,β が存在する。よって求めるべき行列式は $\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)$ を書くことができるが、行列式を不変にする変形を使うと、

$$\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{0})\tag{C.15}$$

になってしまう。行列式の 3 重線形性より、$\boxed{\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\gamma\vec{v}_3)=\gamma\det\mathbf{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)}$ という公式が成り立つが、(C.15) はこの公式の $\boxed{\gamma=0}$ の場合になっている。よって行列式は 0。

【問い 3-5】の解答 ……………………………… （問題は p61、ヒントは p140）

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\qquad\frac{\partial x}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\phi\qquad\frac{\partial x}{\partial\phi}=-r\sin\theta\sin\phi\tag{C.16}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\sin\phi\qquad\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta\sin\phi\qquad\frac{\partial y}{\partial\phi}=r\sin\theta\cos\phi\tag{C.17}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\qquad\frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\sin\theta\qquad\frac{\partial z}{\partial\phi}=0\tag{C.18}$$

のように微分できるので、

$\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&r\cos\theta\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\\cos\theta&-r\sin\theta&0\end{bmatrix}$ を計算する。

$\boxed{\cos\theta\neq 0}$ の場合は「1 列めの $\dfrac{r\sin\theta}{\cos\theta}$ 倍を 2 列目に足すことで

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&r\left(\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&r\left(\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\\cos\theta&0&0\end{bmatrix}\\=&\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&\dfrac{r}{\cos\theta}\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&\dfrac{r}{\cos\theta}\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\\cos\theta&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{C.19}$$

となり、次に「3 行目の $\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta}$ 倍を 2 行目から引く」と「3 行目の $\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta}$ 倍を 1 行目から引く」を行うと $\det\begin{bmatrix}0&\dfrac{r}{\cos\theta}\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\0&\dfrac{r}{\cos\theta}\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\\cos\theta&0&0\end{bmatrix}$ となる。行の取替を 2 回行うと $\det\begin{bmatrix}\cos\theta&0&0\\0&\dfrac{r}{\cos\theta}\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\0&\dfrac{r}{\cos\theta}\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\end{bmatrix}$ となり、後は $\det\begin{bmatrix}\dfrac{r}{\cos\theta}\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\dfrac{r}{\cos\theta}\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\end{bmatrix}$ の部分を

$$\begin{aligned}&\frac{r}{\cos\theta}\cos\phi\times r\sin\theta\cos\phi-(-r\sin\theta\sin\phi)\times\frac{r}{\cos\theta}\sin\phi\\=&\frac{r^2}{\cos\theta\sin\theta}\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)=\frac{r^2}{\cos\theta\sin\theta}\end{aligned}\tag{C.20}$$

と計算して、結局 $r^2\sin\theta$ が答え。$\boxed{\cos\theta=0}$ の場合は

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&0&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&0&r\sin\theta\cos\phi\\0&-r\sin\theta&0\end{bmatrix}\\=&\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi&0\\\sin\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi&0\\0&0&r\sin\theta\end{bmatrix}\\=&r\sin\theta\times\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\end{bmatrix}\\=&r\sin\theta\times r\sin\theta^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)=r^2\sin^3\theta\end{aligned}\tag{C.21}$$

となる。$\boxed{\cos\theta=0}$ のときは $\boxed{\sin\theta=\pm1}$ だから、これは $r^2\sin\theta$ と同じことである。

【問い 3-6】の解答 ……………………………… （問題は p63）

(1) $\displaystyle\sum_{i,j,k,\ell=1}^{4}\epsilon_{ijk\ell}M_{1i}M_{2j}M_{3k}M_{4\ell}$ を M_{11} で微分すると、$\boxed{i=1}$ の項だけが生き残るから、

$$\frac{\partial\left(\det\mathbf{M}\right)}{\partial M_{11}}=\sum_{j,k,\ell=1}^{4}\epsilon_{1jk\ell}M_{2j}M_{3k}M_{4\ell}\tag{C.22}$$

(2)上では $\tilde{M}_{11}$ を求めたわけだが、一般的な $\tilde{M}_{jk}$ を考えると、微分することによって $M_{1i}M_{2j}M_{3k}M_{4\ell}$ のうち、前の添字が k であるものが消える。そのとき、ϵ の添字のうち一つは

【問い 4-1】の解答 ……………………………… （問題は p64、ヒントは p140）

$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1N}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{N1}&A_{N2}&\cdots&A_{NN}\end{bmatrix}$ において、A_{11} が 0 だと以下の作業ができないので、その場合は行の交換を行って $\{A_{*1}\}$ のうち 0 でない方

を A_{11} の位置に持ってくる。$A_{\cdot 1}$ が全部 0 だとこれはできないが、そのときはこの列については何もしなくてもいいので次に進む。

$$\left\{\begin{array}{l} 1\text{ 行目の } -\dfrac{A_{21}}{A_{11}} \text{ を 2 行目に足す} \\ 1\text{ 行目の } -\dfrac{A_{31}}{A_{11}} \text{ を 3 行目に足す} \end{array}\right. \quad \text{操作をすると、行列を}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \text{ の形に変形できる。}$$

残りの部分について、同じことを繰り返せば、上三角行列になる。

【問い 4-2】の解答……………………（問題は p64、ヒントは p140）

ヒントより、行列式が 0 だったということは、行列がたとえば

$$\begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \text{ のような形に（行列式を変えずに）変形できたと}$$

いうことである。この行列を列ベクトルを並べたものと見たとき、第 1 列が $\vec{0}$ なので、独立なベクトルは N 本ない。また、行ベクトルを並べたものと考えると、第 1 成分はすべて 0 なので $N-1$ 次元ベクトルになり、独立なベクトルが N 本あることはありえない。

【問い 4-3】の解答……………………………（問題は p69）

(1)ある行に別の行の定数倍を足す。

(2)ある列に別の列の定数倍を足す。

の二つについては、$\underset{\to\ \text{p67}}{(4.10)}$の $\mathbf{T}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}(\lambda)$ を前または後ろから掛けることで実現する。この行列の行列式は 1 である。

(3)ある行と別の行を交換し、どちらか片方の行を -1 倍する。

(4)ある列と別の列を交換し、どちらか片方の列を -1 倍する。

の二つについては、$\underset{\to\ \text{p68}}{(4.15)}$の $\mathbf{T}_{\mathbf{i}\leftrightarrow\mathbf{j}}$（行または列を交換する行列）にさらにマイナス符号を片方にだけつけた行列

$$\mathbf{T}_{\mathbf{i}\leftrightarrow-\mathbf{j}} \equiv \underbrace{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & & i\text{列め} & & j\text{列め} & \\ & \mathbf{I}_{\mathbf{i-1}} & & & & \\ \hline i\text{ 行め} & & & & -1 & \\ \hline & & & \mathbf{I}_{\mathbf{j-i-1}} & & \\ \hline j\text{ 行め} & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \mathbf{I}_{\mathbf{N-j}} \end{array}}_{\text{表記のない部分の成分は }0} \tag{C.23}$$

を前または後ろから掛けることで実現する。この行列の行列式は 1 である。

【問い 4-4】の解答……………………………（問題は p76）

(3) 積の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} A_{ik}B_{kj}$ であるが、$\mathbf{A}$ が上三角行列であることから、$\boxed{i<k}$ なら A_{ik} は 0 である。ゆえに積の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=i}^{N} A_{ik}B_{kj}$ となる（和は 1 からではなく i からになる）。$\mathbf{B}$ も上三角行列なので、$\boxed{k<j}$ なら B_{kj} は 0 である。よって和は N までではなく j までとなり、積は $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} A_{ik}B_{kj}$ となる。$i>j$ ならばこの成分は 0 となる。$i=j$ ならこの成分は $A_{ii}B_{ii}$ である。つまり積も上三角行列で、対角成分は $(A_{11}B_{11}, A_{22}B_{22}, \cdots, A_{NN}B_{NN})$ である。

(4) $\boxed{\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}}$ を考えよう。逆行列が存在する場合を考えているので、対角成分 $A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{NN}$ は、すべて 0 ではないことに注意しよう。

$\boxed{\text{逆行列 } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix}}$ の k 行めの行ベクトル $\begin{bmatrix} B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kN} \end{bmatrix}$ と $\mathbf{M}$ を構成する列ベクトルとの内積を考える。$\begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ との内積は $A_{11}B_{k1}$ になるが、A_{11} は 0 でないとしたから $\boxed{k>1}$ なら $\boxed{B_{k1}=0}$ である。次に $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ との内積も 0 であるべきという条件と A_{22} が 0 でないことから、$\boxed{k>2}$ なら $\boxed{B_{k2}=0}$ が出る。同様に続けていくと、k 列めの $\begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \vdots \\ A_{Nk} \end{bmatrix}$ との内積が 1 でなくてはいけないことから、N 行めの行ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{A_{kk}} & * & \cdots & * \end{bmatrix}$ である。つまり逆行列は

$$\boxed{\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{11}} & * & \cdots & * \\ 0 & \dfrac{1}{A_{22}} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{A_{NN}} \end{bmatrix}} \text{である。}$$

【問い 5-1】の解答……………………………（問題は p79）

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が負になる可能性があるので、(3) を満たさない。また、$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ が $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=0}$ になる可能性が出てくるので、(4) も満たさない。

【問い 5-2】の解答……………………（問題は p80、ヒントは p140）

シンプルに、$\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix}$ が反例。複素共役を取らないで内積を取れば $\boxed{\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}^2 = -1 < 0}$ である。

【問い 5-3】の解答……………………（問題は p81、ヒントは p140）

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle - t\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle - t^*\langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle + t^*t\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \geq 0 \tag{C.24}$$

$\boxed{t=\alpha\text{（}\alpha\text{ は実数）}}$ とすれば、

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle - \alpha\left(\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle\right) + \alpha^2\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \geq 0 \tag{C.25}$$

であり、これが任意の α に対して成り立つ条件は

$$\left(\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle\right)^2 - 4\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \leq 0 \tag{C.26}$$

より、

$$-|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \leq \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle}{2} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \tag{C.27}$$

である。

一方、$\boxed{t=i\beta\text{（}\beta\text{ は実数）}}$ とすれば、

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle - \mathrm{i}\beta\left(\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle\right) + \beta^2\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \geq 0 \tag{C.28}$$

であり、これが任意の β に対して成り立つ条件は

$$\left(\mathrm{i}\left(\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle\right)\right)^2 - 4\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle \leq 0 \tag{C.29}$$

より、

$$-|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \le \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle}{2\mathrm{i}} \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \tag{C.30}$$

である。

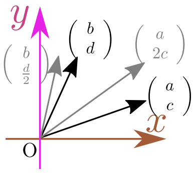
【問い 5-4】の解答 ……………………………… (問題は p86)

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$ の場合。逆行列は $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta}\end{bmatrix}$ である。これらを前後から挟むと、

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha a & \beta b\\ \alpha c & \beta d\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a & \frac{\beta}{\alpha}b\\ \frac{\alpha}{\beta}c & d\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.31}$$

となる。

すなわちこの変換は対角要素を変えずに非対角要素の一方を $\frac{\alpha}{\beta}$ 倍、もう一方をその逆数倍する（もしも $\alpha = \beta$ なら何もしなかった）。



$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$による、$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の相似変換

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ の場合、逆行列は $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ である。これらを前後から挟むと、

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix} \tag{C.32}$$

となる。すなわちこの変換は行と列の入れ替えをいっせいに行う（行のみ、あるいは列のみの入れ替えだと相似変換ではない[†1]）。

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ の場合。逆行列は $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ である。これらを前後から挟むと、

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b & b\\ c+d-a-b & d-b\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.33}$$

となる。この変換は「左の列に右の列を足す」の後で「下の行から上の行を引く」をやっている[†2]。

【問い 6-1】の解答 ……………………… (問題は p88、ヒントは p140)

(6.2) → p88 $\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = 0$ の両辺に演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ を掛けることで

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i \mathbf{v}_i = 0 \tag{C.34}$$

を得る。一方、固有値のうち最後のものである λ_K（$\neq 0$ とする[†3]）という数を(6.2) → p88 に掛けることで、

$$\lambda_K \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \mathbf{v}_i = 0 \tag{C.35}$$

という式も得ることができる。これを $\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = 0$ から引くと

$$\sum_{i=1}^{K-1} (\lambda_i - \lambda_K)\,\alpha_i \mathbf{v}_i = 0 \tag{C.36}$$

を得る（$i = K$ の項はなくなるので、和は 1 から $K-1$ までとなる）。つまり、固有値が違うベクトル K 個が線形独立でないという仮定が正しいならば、そのうち $K-1$ 個を取り出すと、やはり線形独立ではない。この手順をベクトルが 1 個になるまで繰り返すと、$\mathbf{v}_1 = 0$ になってしまう[†4]。これは矛盾である。

【問い 6-2】の解答 ……………………… (問題は p89、ヒントは p140)

部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \sin n\theta\\ &= -\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin m\theta\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin n\theta\\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \sin m\theta\right)\sin n\theta\end{aligned} \tag{C.37}$$

となる（部分積分の表面項は、$\sin m\pi = \sin n\pi = \sin 0 = 0$ により 0 である）。

この微分を実行すると $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \sin m\theta = -m^2 \sin m\theta$ となる。つまり、同じ式を 2 通りの計算をすることで、

$$-m^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \sin n\theta = -n^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \sin n\theta \tag{C.38}$$

が導かれる。$m \neq n$ ならば、$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin m\theta \sin n\theta = 0$ でなくてはならない。

【問い 6-3】の解答 ……………………………… (問題は p92)

(1)

$$(\lambda_\pm - d)\begin{bmatrix}b\\ \lambda_\pm - a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b(\lambda_\pm - d)\\ (\lambda_\pm - a)(\lambda_\pm - d)\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}\lambda_\pm - d\\ c\end{bmatrix} \tag{C.39}$$

(2)

$$(\lambda_\pm - a)\begin{bmatrix}\lambda_\pm - d\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda_\pm - a)(\lambda_\pm - d)\\ (\lambda_\pm - a)c\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}b\\ \lambda_\pm - a\end{bmatrix} \tag{C.40}$$

【問い 6-4】の解答 ……………………… (問題は p104、ヒントは p140)

(1) $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ であるから、もう一つの列ベクトルを $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ と選ぶ。相似変換のための行列を $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ とする。逆行列は $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ であるから、

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{C.41}$$

[†1] 行のみ、列のみの操作では、行列式やトレースが変化してしまう。

[†2] 「左の列に右の列を足す」だけ、あるいは「下の行から上の行を引く」だけの変換は、（それぞれ行基本変形と列基本変形に含まれるが）相似変換ではない。これら二つの操作はトレースを変えてしまうから、相似ではないことがわかる。

[†3] 固有値 0 のベクトルを含んでいる場合は、それを 1 番最初に持っていくことにしよう（つまり、$\lambda_1 = 0$）。

[†4] 先の脚注 ††3 で書いたように $\mathbf{v}_1$ は固有値が 0 である場合があるが、その場合でも $\mathbf{v}_1 = 0$ となる。

(2)$\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$ で、これを掛けて 0 になるベクトルは $\begin{bmatrix}a\\ 0\\ 2a\end{bmatrix}$ の形なので、まずジョルダン鎖の最初のメンバーを $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$ とする。

$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})^2=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$ だが、これを掛けて 0 になるベクトルは $\begin{bmatrix}a\\ b\\ 2a+b\end{bmatrix}$ の形。

$\boxed{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\end{bmatrix}}$ という式が作れるので、ジョルダン鎖のメンバーとして $\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$ を採用する。

最後のジョルダン鎖のメンバーとしてはこれまでの 2 本と独立になるようにとる。

$\boxed{\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}}$ となるので $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$ を使う。

$\boxed{\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}}$ として、

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \tag{C.42}$$

【問い 6-5】の解答 .... （問題は p105）

$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ の 6 種類。ただし、順番を入れ替えてできるものは同じ種類として数えた。

【問い 7-1】の解答 .... （問題は p112、ヒントは p140）

ヒントより、

$$\begin{aligned}\exp\begin{bmatrix}0 & \theta\\ \theta & 0\end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}\exp\begin{bmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.44}$$

【問い 7-2】の解答 .... （問題は p113、ヒントは p140）

ヒントより $(\mathbf{J}_{i}(a))^n$ は

$$\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3} & \cdots\\ 0 & a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & \cdots\\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & a^n & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{C.45}$$

になる。

【問い 7-3】の解答 .... （問題は p113）

【問い 7-2】の答えの (C.45) より、

→ p113

$$\frac{1}{n!}(\mathbf{J}_{i}(a))^n\,t^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{n!}(at)^n & t\frac{1}{(n-1)!}(at)^{n-1} & \frac{t^2}{2}\frac{1}{(n-2)!}(at)^{n-2} & \frac{t^3}{3!}\frac{1}{(n-3)!}(at)^{n-3} & \cdots\\ 0 & \frac{1}{n!}(at)^n & t\frac{1}{(n-1)!}(at)^{n-1} & \frac{t^2}{2}\frac{1}{(n-2)!}(at)^{n-2} & \cdots\\ 0 & 0 & \frac{1}{n!}(at)^n & t\frac{1}{(n-1)!}(at)^{n-1} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n!}(at)^n & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{C.46}$$

となるのでこれを足し上げた結果

$$\exp\left[\mathbf{J}_{i}(a)t\right]=\mathrm{e}^{at}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots\\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{C.47}$$

【問い 7-4】の解答 .... （問題は p114）

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{XP}$ が対角行列になったとすると、

$\boxed{\exp\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{XP}\right)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}}$ となる（この行列の固有値はすべて正であることに注意）。対角行列に対する log は普通の関数の log と同様なので、$\log\left(\exp\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{XP}\right)\right)$ は

$$\begin{bmatrix}\log\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots\\ 0 & \log\left(\mathrm{e}^{\lambda_2}\right) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots\\ 0 & \lambda_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{C.48}$$

となる。逆の相似変換で戻せば、$\boxed{\log\left(\exp\left(\mathbf{X}\right)\right)=\mathbf{X}}$ となる。

【問い A-1】の解答 .... （問題は p118）

まず式の割り算を行い、

$$(x-2)^2=x^2-4x+4=x(x-1)-3(x-1)+1 \tag{C.49}$$

を得る。これからすぐに、

$$(x-2)^2-(x-3)(x-1)=1 \tag{C.50}$$

がわかるので、$\boxed{g_1(x)=1, g_2(x)=-x+3}$ である。

【問い A-2】の解答 .... （問題は p119）

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & 0\\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{C.51}$$

【問い A-3】の解答 .... （問題は p122、ヒントは p140）

左右反転の行列 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ と上下反転の行列 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。どちらも直交行列であるが、回転ではない。

【問い A-4】の解答 .... （問題は p126）

(A.45)については単純に計算するだけで、
→ p125

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.52}$$

を得る。次に、

$$\begin{aligned}&\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_z}(\psi)}\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_y}(\theta)}\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_x}(\phi)}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi+\cos\phi\sin\theta\cos\psi\\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi+\sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\sin\theta\cos\psi\\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}&\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_x}(\phi)}\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_y}(\theta)}\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{\mathbf{R_z}(\psi)}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\\ \cos\phi\sin\psi+\sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\theta\\ \sin\phi\sin\psi-\cos\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.54}$$

である。よく見るとこの 2 つの行列は互いに「転置して、角度をすべて逆符号にする」操作を行うことで入れ替わることがわかる。

【問い A-5】の解答 .... （問題は p126）

(A.45)の行列が掛け算されると考えれば
→ p125

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix}\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi\\ \sin\psi\sin\theta\end{matrix}}}_{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\text{を変換したもの}}\underbrace{\boxed{\begin{matrix}-\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi\\ -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi\\ \cos\psi\sin\theta\end{matrix}}}_{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{を変換したもの}}\underbrace{\boxed{\begin{matrix}\sin\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\end{matrix}}}_{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\text{を変換したもの}} \tag{C.55}$$

と読み取れる。

【問い A-6】の解答 .... （問題は p126、ヒントは p140）

3 列めのベクトル $\begin{bmatrix}\sin\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\end{bmatrix}$ を $\boxed{\alpha=\theta, \beta=\phi-\dfrac{\pi}{2}}$ とすれば $\begin{bmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$ になる。

2 列めのベクトル $\begin{bmatrix}-\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi\\ -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi\\ \cos\psi\sin\theta\end{bmatrix}$ については、まず $\boxed{\cos\alpha=\cos\psi\sin\theta}$ と置く。考えている α の範囲 $\boxed{0\le\alpha\le\pi}$ では $\cos\alpha$ は 1 対 1 関数だから、α は一意に決まる。このとき、ベクトルの第 1 成分と第 2 成分の自乗を足すと

$$\begin{aligned}&(-\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi)^2\\ &+(-\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi)^2\\ &=\sin^2\psi+\cos^2\psi\cos^2\theta\end{aligned} \tag{C.56}$$

となるので、この式を $\sin^2\alpha$ とする（ちゃんと $\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}$ になっている）。$\sin\alpha$ を前に出して、ベクトルを $\begin{bmatrix}\sin\alpha\left(-\dfrac{\sin\psi}{\sin\alpha}\cos\phi-\dfrac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\alpha}\sin\phi\right)\\ \sin\alpha\left(-\dfrac{\sin\psi}{\sin\alpha}\sin\phi+\dfrac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\alpha}\cos\phi\right)\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$ と書く。

$\boxed{-\dfrac{\sin\psi}{\sin\alpha} = \cos\gamma, \dfrac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\alpha} = \sin\gamma}$ と置く（$\boxed{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1}$ になるから、こうなる γ は存在する）。こうして 2 番目のベクトルは

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha\underbrace{(\cos\gamma\cos\phi - \sin\gamma\sin\phi)}_{\cos(\gamma+\phi)} \\ \sin\alpha\underbrace{(\cos\gamma\sin\phi + \sin\gamma\cos\phi)}_{\sin(\gamma+\phi)} \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

と書き直すことができた。

$\boxed{\beta = \gamma + \phi}$ と置けば $\begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ になる。

1 列めのベクトル $\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi \\ \sin\psi\sin\theta \end{bmatrix}$ も同様に、

$\boxed{\cos\alpha = \sin\psi\sin\theta, \sin^2\alpha = \cos^2\psi + \sin^2\psi\cos^2\theta}$ と置いて整理すれば

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha\left(\dfrac{\cos\psi}{\sin\alpha}\cos\phi - \dfrac{\sin\psi\cos\theta}{\sin\alpha}\sin\phi\right) \\ \sin\alpha\left(\dfrac{\cos\psi}{\sin\alpha}\sin\phi + \dfrac{\sin\psi\cos\theta}{\sin\alpha}\cos\phi\right) \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

となり、

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\cos\gamma = \dfrac{\cos\psi}{\sin\alpha}} \\ \boxed{\sin\gamma = \dfrac{\sin\psi\cos\theta}{\sin\alpha}} \end{array}\right.$$

と置くことで $\begin{bmatrix} \sin\alpha\cos(\gamma+\phi) \\ \sin\alpha\sin(\gamma+\phi) \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ となる。

【問い A-7】の解答 .... （問題は p126、ヒントは p141）

θ が θ_1 でも $2\pi - \theta_1$ でも $\cos\theta$ は変わらないが、$\sin\theta$ は符号が変わる。ところが行列を見ると、$\sin\theta$ が出てくるところには必ず ϕ, ψ の三角関数が入っていて、これらは $\left\{\begin{array}{l}\boxed{\phi = \phi_1} \\ \boxed{\psi = \psi_1}\end{array}\right.$ と選ぶか $\left\{\begin{array}{l}\boxed{\phi = \phi_1 + \pi} \\ \boxed{\psi = \psi_1 + \pi}\end{array}\right.$ を選ぶかで符号を変えることができる。よって、同じ行列に対して選べる角度が

$$(\phi, \theta, \psi) = \left\{\begin{array}{l}\boxed{(\phi_1, \theta_1, \phi_1)} \\ \boxed{(\phi_1 + \pi, 2\pi - \theta_1, \psi_1 + \pi)}\end{array}\right.$$

と 2 セットずつある。

$\boxed{\cos\theta = \pm 1}$ のときはもっと深刻で、このときの行列は（$\boxed{\sin\theta = 0}$ なので）、

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi \mp \sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi \mp \cos\psi\sin\phi & 0 \\ \cos\psi\sin\phi \pm \sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi \pm \cos\psi\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} \cos(\psi\pm\phi) & -\sin(\psi\pm\phi) & 0 \\ \sin(\psi\pm\phi) & \cos(\psi\pm\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.57}$$

となって、$\boxed{\psi\pm\phi}$ が一定なら ψ, ϕ を変化させても行列は変わらない。よってこの行列を表現する (ψ, θ, ϕ) の組み合わせは無限個ある。

オイラー角での表現には「同じ回転を表現する ψ, θ, ϕ がユニークに決まらない（ことがある）」という弱点がある。

【問い B-1】の解答 .... （問題は p131、ヒントは p141）

単位元： $\mathbf{0}_2$ は単位元であるから、任意の $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a} + \mathbf{0}_2 = \mathbf{a}$ を満たす。よって、$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ である。交換則を使うと、$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$ であり、$\mathbf{0}_1$ もまた単位元であるなら、$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$ となる。よって $\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ である。すなわち単位元は一つしかない。

逆元： $\mathbf{a}$ の逆元が $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ のように二つあったと仮定する。$\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c}$ に結合法則を使うと

$$\begin{aligned} \mathbf{b} + \overbrace{\mathbf{a} + \mathbf{c}}^{\text{先に計算}} &= \overbrace{\mathbf{b} + \mathbf{a}}^{\text{先に計算}} + \mathbf{c} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{c} \end{aligned} \tag{C.58}$$

となる。よって逆元は一つ。

【問い B-2】の解答 .... （問題は p131）

複素数の係数でスカラー倍してしまうと (x, z) は今考えている空間をはみ出してしまう。よって実ベクトル空間である。

【問い B-3】の解答 .... （問題は p132）

(1)反対称行列は足してもスカラー倍しても反対称行列であるから、条件に現れるスカラーが何であってもベクトル空間をなす。

(2)トレースが 0 であるという条件は足してもスカラー倍しても変わらないから、条件に現れるスカラーが何であってもベクトル空間をなす。

(3)行列式が 0 の行列と行列式が 0 の行列を足しても行列式が 0 の行列になるとは限らない（例はすぐに作れる）。よってベクトル空間ではない。

【問い B-4】の解答 .... （問題は p135、ヒントは p141）

$\boxed{\hat{O}(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = \mathbf{0}}$ でなくてはいけないが、演算子は線形なので、この左辺は $\hat{O}\mathbf{v} + \hat{O}(-\mathbf{v})$ となる。$\boxed{\hat{O}\mathbf{v} = \mathbf{0}}$ を仮定したいので、$\boxed{\hat{O}(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}}$ である。

【問い B-5】の解答 .... （問題は p136）

(1)それでは $\vec{0}$ を含まないのでだめ。

(2)やはり $\vec{0}$ を含まないのでだめ。

(3)これは $\vec{0}$ を含むし、線形結合によってこの空間をはみ出すこともない（逆元も存在している）。よってこれは部分空間になる。

【問い B-6】の解答 .... （問題は p138）

$\mathrm{Ker}\,\mathbf{X}$ は $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ のスカラー倍、$\mathrm{Ker}\,\mathbf{Y}$ は $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ のスカラー倍である。任意のベクトルがこの二つの線形結合で表すことができるのは自明。

【問い B-7】の解答 .... （問題は p138）

$\boxed{\mathbf{XY} = \mathbf{YX} = \mathbf{0}}$ はすぐ確認できる。$\mathrm{Ker}\,\mathbf{X}$ は $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ のスカラー倍、$\mathrm{Ker}\,\mathbf{Y}$ は $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ のスカラー倍である。任意のベクトル $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ は

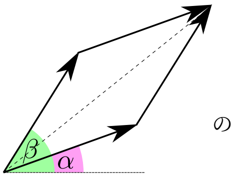
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \tag{C.59}$$

で表すことができる。

C.3　演習問題のヒント

★【演習問題 2-1】のヒント .... （問題は p35、解答は p148）

2 つの図を重ねて、ベクトルが平行四辺形を描くようにすると



のような図ができる。平行四辺形の対角線（図の破線）の長さを考えてみよ。

★【演習問題 2-2】のヒント .... （問題は p36、解答は p148）

極座標の方は、$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\vec{\mathbf{e}}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_x + \sin\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_y} \\ \boxed{\vec{\mathbf{e}}_\theta = -\sin\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_x + \cos\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_y}\end{array}\right.$ であることに注意して、$\vec{\mathbf{e}}_r(t)$ の微分をちゃんと行う。

★【演習問題 3-1】のヒント .... （問題は p63、解答は p149）

結果 22 を使ってできる限り簡単にしていく。

→ p53

★【演習問題 3-2】のヒント .... （問題は p63、解答は p149）

$\boxed{\vec{v}_i = \sum_j A_{ij}\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_j}_{}}$ なので

$$\det\mathbf{A} = \det\left[\sum_j A_{1j}\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_j}_{}, \sum_j A_{2j}\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_j}_{}, \cdots, \sum_j A_{Nj}\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_j}_{}\right] \tag{C.60}$$

とした上で N 重線形性を使うと示せる。

★【演習問題 3-3】のヒント……………… （問題は p63、解答は p149）

全行列の成分を M_{IJ}（I,J は 1 から $2N$ まで）として

$$\det\mathbf{M} = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_N,\\ i_{N+1},\cdots,i_{2N}}} \epsilon_{i_1\cdots i_N i_{N+1}\cdots i_{2N}} M_{1i_1}\cdots M_{Ni_N} M_{N+1\,i_{N+1}}\cdots M_{2N i_{2N}} \tag{C.61}$$

と書く。1 行目から N 行目までの $M_{ij}(j=1,\cdots,N)$ は B_{ij} しかない。ゆえにこの式の $M_{1i_1}\cdots M_{Ni_N}$ の部分は B になる。

★【演習問題 3-4】のヒント……………… （問題は p63、解答は p150）

計算は簡単にできるだろう。図解のためには、$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$ の 2 本のベクトルを図に描いてみる。

★【演習問題 3-5】のヒント……………… （問題は p63、解答は p150）

(3.156) → p63 にこの 3 点の座標、あるいは 3 点を内分・外分した点の座標を代入すると 0 になることを確かめる。

★【演習問題 4-1】のヒント……………… （問題は p78、解答は p150）

$\mathbf{B}$ をを $\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{b}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{b}_2)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{(\vec{b}_N)^\top}\end{bmatrix}$ と表現して、$\mathbf{AB}$ がどうなるかを考えてみよう。$\operatorname{rank}\mathbf{B}$ とは、「$\{\vec{b}_*\}$ のうち独立なベクトルの数」である。

★【演習問題 4-2】のヒント……………… （問題は p78、解答は p150）

$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ * & *\end{bmatrix}}$ となる行列 $\mathbf{X}$ を作ってみる。2×2 行列で考えてみるとよい。

★【演習問題 6-1】のヒント……………… （問題は p109、解答は p151）

任意の行列は $\boxed{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}}$ を満たすので、$\mathbf{M}-x\mathbf{I}$ も

$$(\mathbf{M}-x\mathbf{I})\,(\widetilde{\mathbf{M}-x\mathbf{I}}) = \underbrace{\det(\mathbf{M}-x\mathbf{I})}_{f(x)}\mathbf{I} \tag{C.62}$$

を満たすことがわかり、$f(x)\mathbf{I}$ を $(\mathbf{M}-x\mathbf{I})\,(\widetilde{\mathbf{M}-x\mathbf{I}})$ に置き換えることができる。これを使って $f(\mathbf{M})$ を $(\mathbf{M}-x\mathbf{I})$ にある行列を掛けたものと表現する。その式の右辺を x で展開して各項を考えよ。

★【演習問題 6-3】のヒント……………… （問題は p109、解答は p151）

$\boxed{\mathbf{J}_1\lambda = \begin{bmatrix}\lambda\end{bmatrix}}$ の逆行列はあまりにトリビアルなので、まず、$\boxed{\mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}}$ の逆行列を求めてみると、$\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$ である。これを元に予想する。

★【演習問題 7-1】のヒント……………… （問題は p116、解答は p153）

(1)逆行列は $\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}$ だから、すぐに指数関数は計算できる。

(2) $\boxed{\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda^2}\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}}$ とすると、

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}^2 = \frac{1}{\lambda^4}\begin{bmatrix}\lambda^2 & -2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}^3 = \frac{1}{\lambda^6}\begin{bmatrix}\lambda^3 & -3\lambda^2\\ 0 & \lambda^3\end{bmatrix},\cdots \tag{C.63}$$

と計算されることから、n 乗するとどうなるか予想する。

★【演習問題 A-1】のヒント……………… （問題は p128、解答は p153）

$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^i = ix^{n-1}}$ だから、微分は、「i 番目の要素が 1 で、他は 0」というベクトルを「$i-1$ 番目の要素が i で、他は 0」というベクトルに変換する。

★【演習問題 A-2】のヒント……………… （問題は p128、解答は p153）

微分という演算の結果、元のベクトル空間の基底で表せなくなったら、その演算子はベクトル空間内の演算子ではない。

C.4 演習問題の解答

★【演習問題 1-1】の解答…………………… （問題は p8）

(1)まず普通の式は、$\boxed{X = \frac{a+b}{2}, Y = a-b}$ である。行列では

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \tag{C.64}$$

となる。

(2)逆関係を求めると、$\boxed{a = X + \frac{1}{2}Y, b = X - \frac{1}{2}Y}$ である。行列で書くと

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} \tag{C.65}$$

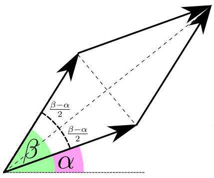
となる。この行列 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ から即座に逆を表す行列 $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ を求める方法を後で考える。

★【演習問題 1-2】の解答…………………… （問題は p8）

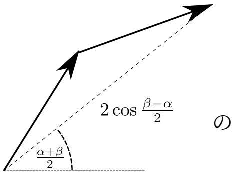
(1) $\boxed{\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 100 & 150 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

★【演習問題 2-1】の解答……………… （問題は p35、ヒントは p147）



のように考えると、ヒントにある対角線の長さは、$2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ になる。そして、対角線の水平に対する角度は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ である。



のように図を描くと、(2.111) → p35 と (2.112) → p36 がわかる。

★【演習問題 2-2】の解答……………… （問題は p36、ヒントは p147）

時間微分を $\dot{x}$ で表す。

直交座標ではシンプルに、$\boxed{\vec{\dot{P}} = \dot{x}(t)\vec{\mathbf{e}}_x + \dot{y}(t)\vec{\mathbf{e}}_y}$ となる。極座標の

方は $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = \dot{r}(t)\vec{\mathbf{e}}_r(t) + r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{e}}_r(t)}$ であり、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{e}}_r(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cos\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_x + \sin\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_y\right) = -\dot{\theta}\sin\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_x + \dot{\theta}\cos\theta(t)\vec{\mathbf{e}}_y = \dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{C.66}$$

となることを使うと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = \dot{r}\vec{\mathbf{e}}_r(t) + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{C.67}$$

★【演習問題 3-1】の解答 ………………… （問題は p63、ヒントは p147）

(1) について

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{bmatrix} \\
\xrightarrow[\text{1 行めを 2,3 行めから引く}]{} &\begin{bmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{bmatrix} \\
\xrightarrow[\text{3 列めを 1,2 列めから引く}]{} &\begin{bmatrix} x-z & y-z & a+z \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix} \\
\xrightarrow[\text{1 列めの } \frac{y-z}{x-z} \text{ 倍を 2 列めから引く}]{} &\begin{bmatrix} x-z & 0 & a+z \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.68}$$

となるので、行列式は 0（$\boxed{x - z = 0}$ だと困るのでは、と思う人がいるかもしれないが、それなら最後の計算をするまでもなく行列式は 0 である）。

(2) まず $\boxed{\cos\theta \neq 0}$ は仮定して、

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1 行めの } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ 倍を 2 列めに足す}]{} \\
&\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \left(\cos\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\cos\phi & \left(\cos\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\sin\phi & 0 \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \dfrac{1}{\cos\theta}\cos\phi & \dfrac{1}{\cos\theta}\sin\phi & 0 \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{\text{3 列めの } \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta} \text{ 倍を 1 列めから引} \\ \text{くと同時に 3 列めの } \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta} \text{ 倍を 2} \\ \text{列めから引く}}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\theta \\ \dfrac{1}{\cos\theta}\cos\phi & \dfrac{1}{\cos\theta}\sin\phi & 0 \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{列交換 2 回}]{} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\theta}\cos\phi & \dfrac{1}{\cos\theta}\sin\phi \\ 0 & -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.69}$$

後は、$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos\theta}\cos\phi & \dfrac{1}{\cos\theta}\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}$ の部分の行列式が

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\theta}\cos\phi \times \sin\theta\cos\phi - \frac{1}{\cos\theta}\sin\phi \times (-\sin\theta\sin\phi) \\
&\qquad = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}
\end{aligned} \tag{C.70}$$

であることを使えば、行列式が $\sin\theta$ だとわかる。

$\boxed{\cos\theta = 0}$ の場合は

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\
\xrightarrow[\text{1 行めと 2 行め交換}]{} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & 0 \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\
\xrightarrow[\text{列交換 2 回}]{} &\begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.71}$$

となり、後は $\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}$ の部分の行列式が

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\cos\phi \times \sin\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \times (-\sin\theta@s\phi) \\
&\qquad = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \sin^2\theta
\end{aligned} \tag{C.72}$$

となる。よって行列式は $\sin^3\theta$ となる。今は $\boxed{\cos\theta = 0}$ の場合を考えているので $\boxed{\sin^2\theta = 1\text{（あるいは、}\sin\theta = \pm 1\text{）}}$ であることを思えば、これは $\sin\theta$ に等しい。

★【演習問題 3-2】の解答 ………………… （問題は p63、ヒントは p147）

ヒントより、

$$\det\mathbf{A} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_N} A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{Nj_N} \det[\vec{\mathbf{e}}_{j_1}, \vec{\mathbf{e}}_{j_2}, \cdots, \vec{\mathbf{e}}_{j_N}] \tag{C.73}$$

となるが、

$$\det[\vec{\mathbf{e}}_{j_1}, \vec{\mathbf{e}}_{j_2}, \cdots, \vec{\mathbf{e}}_{j_N}] = \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N} \tag{C.74}$$

である。なぜなら、$\boxed{\det[\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{e}}_N] = 1}$ と決まっており、反対称性から $j_1 j_2 \cdots j_N$ が $123 \cdots N$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1、同じ添字を含めば 0 となるからである。

★【演習問題 3-3】の解答 ………………………………………… （問題は p63、ヒントは p148）

ヒントに書いたように、1 行目から N 行目までには B しかないので、

$$\det\mathbf{M} = \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_N, \\ i_{N+1}, \cdots, i_{2N}}} \epsilon_{i_1 \cdots i_N i_{N+1} \cdots i_{2N}} B_{1i_1} \cdots B_{Ni_N} M_{N+1\, i_{N+1}} \cdots M_{2N\, i_{2N}} \tag{C.75}$$

となる。B は $N+1$ 列から $2N$ 列までにしか値がない（B_{i1} から B_{iN} までは 0）。このことから、i_1 から i_N までの和は $N+1$ から $2N$ まで取られる。Levi-Civita 記号があるので、i_1 から i_N までが $N+1$ から $2N$ までなら、残りの i_{N+1} から i_{2N} までは 1 から N までの値しか取れない（そうでない場合は ϵ が 0 になる）。

つまり和記号が $\displaystyle\sum_{i_1, \cdots, i_N = N+1}^{2N} \sum_{i_{N+1}, \cdots, i_{2N} = 1}^{N}$ に置き換わる。結局計算すべき量は

$$\det\mathbf{M} = \sum_{i_1, \cdots, i_N = N+1}^{2N} \sum_{i_{N+1}, \cdots, i_{2N} = 1}^{N} \epsilon_{i_1 \cdots i_N i_{N+1} \cdots i_{2N}} B_{1i_1} \cdots B_{Ni_N} C_{N+1\, i_{N+1}} \cdots C_{2N\, i_{2N}} \tag{C.76}$$

である。後は、$\overbrace{\epsilon_{i_1 \cdots i_N i_{N+1} \cdots i_{2N}}}^{2N \text{ 次元}}$ と $\overbrace{\epsilon_{i_1 \cdots i_N}}^{N \text{ 次元}} \overbrace{\epsilon_{i_{N+1} \cdots i_{2N}}}^{N \text{ 次元}}$ の関係を知ればよい。$\boxed{\overbrace{\epsilon_{1 \cdots N\, N+1 \cdots 2N}}^{2N \text{ 次元}} = \overbrace{\epsilon_{1 \cdots N}}^{N \text{ 次元}} \overbrace{\epsilon_{N+1 \cdots 2N}}^{N \text{ 次元}}}$ はすぐにわかる。しかし今計算

の結果出てきたのは $\left\{\begin{array}{l}\boxed{i_1 \text{ から } i_N \text{ までの添字が } N+1 \text{ から } 2N \text{ まで}}\\ \boxed{i_{N+1} \text{ から } i_{2N} \text{ までの添字が } 1 \text{ から } N \text{ まで}}\end{array}\right.$ となっているので、$\epsilon_{\overbrace{N+1\cdots 2N\,1\cdots N}^{2N\text{ 次元}}}$ のように順番が入れ替わっている。

順番を直すと

$$\epsilon_{N+1\cdots 2N\,12\cdots N} = (-1)^N \epsilon_{\overset{(-1)^N}{1N+1\cdots 2N\,23\cdots N}} = \cdots = (-1)^{N^2} \epsilon_{1\cdots N\,N+1\cdots 2N} \tag{C.77}$$

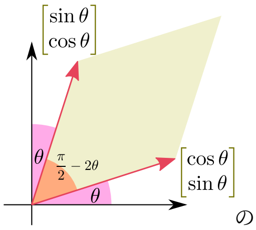
となる。$(-1)^{N^2}$ は N が奇数なら -1、偶数なら 1 なので、$(-1)^N$ と書いても同じこと。よって求めたい式は $(-1)^N \det B \det C$ である。

★【演習問題 3-4】の解答 …………………… （問題は p63、ヒントは p148）

行列式は $\boxed{\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta}$ となる。

これが $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$ なのは三角関数の関係からすぐわかる。

ここで計算した行列式が、2 本のベクトル $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$（一辺の長さが 1 で、二つのベクトルのなす角度が $\frac{\pi}{2} - 2\theta$）が作る菱形の面積に等しいことは、のような図を描いてあげるとわかる。それは底辺が 1 で高さが $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$ の平行四辺形だと考えれば、$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$ になることは納得できる。



★【演習問題 3-5】の解答 …………………… （問題は p63、ヒントは p148）

(3.156)の左辺の $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ に $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$ を代入すれば、
→ p63

$$\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{bmatrix} \tag{C.78}$$

となって（1 行目と 2 行目が等しいので）行列式が 0 となり、(3.156) → p63 は満たされる。他の 2 点も同様だし、これら 3 点を内分（外分）した点である $\lambda_1\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{bmatrix}$ を代入しても、やはり行列式は 0 となる。よってこの 3 点を通る平面の方程式になっている。

★【演習問題 4-1】の解答 …………………… （問題は p78、ヒントは p148）

A が $M \times N$ 行列、**B** が $N \times P$ 行列だとして考えよう。**B** を $\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{b}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{b}_2)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{(\vec{b}_N)^\top}\end{bmatrix}$ と表現すれば、**AB** は

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{(\vec{b}_1)^\top}\\ \boxed{(\vec{b}_2)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{(\vec{b}_N)^\top}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boxed{\left(\sum_i A_{1i}\vec{b}_i\right)^\top}\\ \boxed{\left(\sum_i A_{2i}\vec{b}_i\right)^\top}\\ \vdots\\ \boxed{\left(\sum_i A_{Mi}\vec{b}_i\right)^\top}\end{bmatrix} \tag{C.79}$$

である。ここに現れた M 本のベクトルは **B** に含まれていた $\{\vec{b}_*\}$ の線形結合なのだから、独立なベクトルの数が「$\{\vec{b}_*\}$ のうち独立なベクトルの数」である rank **B** より増えることはありえない。

同様に、**A** を $\begin{bmatrix}\boxed{\vec{a}_1} & \boxed{\vec{a}_2} & \cdots & \boxed{\vec{a}_N}\end{bmatrix}$ と表現したとすると、

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}\boxed{\vec{a}_1} & \boxed{\vec{a}_2} & \cdots & \boxed{\vec{a}_N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1P}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2P}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NP}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boxed{\sum_i \vec{a}_i B_{i1}} & \boxed{\sum_i \vec{a}_i B_{i2}} & \cdots & \boxed{\sum_i \vec{a}_i B_{iP}}\end{bmatrix} \tag{C.80}$$

である。ここに現れた N 本のベクトルは **A** に含まれていた $\{\vec{a}_*\}$ の線形結合なのだから、独立なベクトルの数が「$\{\vec{a}_*\}$ のうち独立なベクトルの数」である rank **A** より増えることはありえない。

★【演習問題 4-2】の解答 …………………… （問題は p78、ヒントは p148）

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{C.81}$$

が成り立つ。両辺の行列式を考えると、

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\underbrace{\det\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}}_{1} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{C.82}$$

から、求めたい式が出る。

★【演習問題 5-1】の解答 ……………………………… （問題は p86）

(1) $\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & \beta\\ \alpha & 0\end{bmatrix}}$ の逆行列は $\boxed{\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\beta} & 0\end{bmatrix}}$ である。これらを前後から挟むと、

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\beta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \beta\\ \alpha & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\beta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha b & \beta a\\ \alpha d & \beta c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d & \frac{\beta}{\alpha}c\\ \frac{\alpha}{\beta}b & a\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.83}$$

となる。この **P** は $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$ と書くこともでき、$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ による相似変換と $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$ による相似変換の合成になっている。

(2) $\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{bmatrix}}$ の逆行列は $\boxed{\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\alpha & 1\end{bmatrix}}$ である。これらを

前後から挟むと、

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+\alpha b & b\\ c+\alpha d & d\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+\alpha b & b\\ c+\alpha d-\alpha a-\alpha^2 b & d-\alpha b\end{bmatrix} \tag{C.84}$$

となる。

(3) $\boxed{\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}$ の逆行列は $\boxed{\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}$ である。これらを前後から挟むと、

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+b & a-b\\ c+d & c-d\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}a+b-c-d & a-b-c+d\\ a+b+c+d & a-b+c-d\end{bmatrix} \tag{C.85}$$

となる。

★【演習問題 5-2】の解答 .... (問題は p86)

行列式もトレースも相似変換では変わらないから、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ のそれらを計算すればよい。行列式は ace、トレースは $a+c+e$ である。

★【演習問題 6-1】の解答 .... (問題は p109、ヒントは p148)

ヒントより

$$f(\mathbf{M})-(\mathbf{M}-x\mathbf{I})(\widetilde{\mathbf{M}-x\mathbf{I}})=(\mathbf{M}-x\mathbf{I})g(x,\mathbf{M})$$

$$f(\mathbf{M})=(\mathbf{M}-x\mathbf{I})(\widetilde{\mathbf{M}-x\mathbf{I}})+(\mathbf{M}-x\mathbf{I})g(x,\mathbf{M})$$

$$f(\mathbf{M})=(\mathbf{M}-x\mathbf{I})\underbrace{\left((\widetilde{\mathbf{M}-x\mathbf{I}})+g(x,\mathbf{M})\right)}_{h(x,\mathbf{M})\text{と置く}} \tag{C.86}$$

がわかる。右辺の $h(x,\mathbf{M})$ を

$$h(x,\mathbf{M})=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1} \tag{C.87}$$

と x で展開したとしよう。

左辺は x に依存しないから、右辺も x に依存しない。ということはまず右辺の x の最高次の項（x^n の項）$-x\mathbf{I}\alpha_{n-1}x^{n-1}$ は 0 なので、$\boxed{\alpha_{n-1}=\mathbf{0}}$ となる。これがわかったので、次の最高次である x^{n-1} の項は $-x\mathbf{I}\alpha_{n-2}x^{n-2}$ となり、$\boxed{\alpha_{n-2}=\mathbf{0}}$ となる。これを繰り返していけば全ての α_* は $\mathbf{0}$ となり、結局 $\boxed{f(\mathbf{M})=0}$ が言える。

★【演習問題 6-2】の解答 .... (問題は p109)

この行列 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ の固有値方程式は

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+\underbrace{ad-bc}_{=D}=0 \tag{C.88}$$

だからこれから

$$\lambda_\pm=\frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4D}}{2} \tag{C.89}$$

を得る（$\boxed{\lambda_+ + \lambda_- = a+d}$ に注意）。

今は固有値が異なる固有ベクトルを考えたいので、重解になる $\boxed{(a+d)^2-4D=0}$ の場合は除外して考えていこう。

$\boxed{\begin{bmatrix}a-\lambda_\pm & b\\ c & d-\lambda_\pm\end{bmatrix}\vec{v}_\pm=0}$ の解として、

$$\vec{v}_\pm=\begin{bmatrix}-b\\ a-\lambda_\pm\end{bmatrix}\quad\text{あるいは}\quad\begin{bmatrix}d-\lambda_\pm\\ -c\end{bmatrix} \tag{C.90}$$

を得る（規格化はしない）[†5]。左固有ベクトルは

$$(\vec{w}_\pm)^\top=\begin{bmatrix}-c & a-\lambda_\pm\end{bmatrix}\quad\text{あるいは}\quad\begin{bmatrix}d-\lambda_\pm & -b\end{bmatrix} \tag{C.91}$$

である。この形を見るとわかるように、$\boxed{b=c}$ なら（対称行列なら）右固有ベクトルと左固有ベクトルは一致する。

以下の計算においては、$\lambda_\pm$ の 2 次が出ないように「あるいは」の左右を選びながら行う。

$$\vec{w}_+\cdot\vec{v}_-=-b(d-\lambda_+)-b(a-\lambda_-)=-b(a+d-\lambda_+-\lambda_-)=0 \tag{C.92}$$

となって、直交。$\vec{w}_-\cdot\vec{v}_+$ は複号が逆になるだけなので、同様に直交する。

★【演習問題 6-3】の解答 .... (問題は p109、ヒントは p148)

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix} \tag{C.93}$$

と予想できる。これが正しいことは、実際に掛け算してみると確かめることができる。

★【演習問題 6-4】の解答 .... (問題は p109)

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$ について、

(1) 特性方程式は

$$\det\begin{bmatrix}1-x & 2 & 3\\ 0 & 1-x & 4\\ 0 & 3 & -3-x\end{bmatrix}=-(x-1)(x-3)(x+5) \tag{C.94}$$

なので、固有値は 1 と 3 と −5。

(2) 固有ベクトルの空間を考えるため、$\mathbf{M}-\mathbf{I},\mathbf{M}-3\mathbf{I},\mathbf{M}+5\mathbf{I}$ を考えておくと、$\boxed{\mathbf{M}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -4\end{bmatrix}}$、$\boxed{\mathbf{M}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 3 & -6\end{bmatrix}}$、$\boxed{\mathbf{M}+5\mathbf{I}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}}$ である。

これから固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$（固有値 1）、$\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$（固有値 3）、$\begin{bmatrix}-\frac{5}{6}\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$（固有値 −5）の 3 本である。

[†5] b,c がどちらも 0 でないなら、この二つは比例するベクトルになるので、どちらを使ってもよい。$\boxed{b=0}$ の場合は (C.88) から、$a-\lambda_+$ か $d-\lambda_+$ か、どちらかが 0 になる。$\boxed{a-\lambda_\pm=0}$ なら「あるいは」の左のベクトルが $\vec{0}$ になってしまう（ので右を使うしかない）。$\boxed{d-\lambda_\pm=0}$ ならば (C.90) の二つベクトルはどちらも $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ に比例するベクトルになる。$\boxed{c=0}$ の場合も同様。

(3) Cayley-Hamilton の定理の式が満たされるには $\boxed{(\mathbf{M}-\mathbf{I})(\mathbf{M}-3\mathbf{I})(\mathbf{M}+5\mathbf{I})=\mathbf{0}}$ となればよい。

$$\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&3\\0&-2&4\\0&3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&3\\0&6&4\\0&3&2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&5&10\\0&12&-24\\0&18&-36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&3\\0&6&4\\0&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{C.95}$$

のような具体的計算で確認できる。

(4)

$\boxed{A(x-3)(x+5)+B(x-1)(x+5)+C(x-1)(x-3)=1}$ になるようにする。A,B,C が定数となる解を探すと、

$$x^2\text{の係数から}\quad A+B+C=0 \tag{C.96}$$
$$x\text{ の係数から}\quad 2A+4B-4C=0 \tag{C.97}$$
$$\text{定数項から}\quad -15A+-5B+3C=1 \tag{C.98}$$

となり、答えは $\boxed{A=-\frac{1}{12},B=\frac{1}{16},C=\frac{1}{48}}$ である。

$$-\frac{1}{12}\overbrace{\begin{bmatrix}-2&2&3\\0&-2&4\\0&3&-6\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}-3\mathbf{I}}\overbrace{\begin{bmatrix}6&2&3\\0&6&4\\0&3&2\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}+5\mathbf{I}}+\frac{1}{16}\overbrace{\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&3&-4\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}-\mathbf{I}}\overbrace{\begin{bmatrix}6&2&3\\0&6&4\\0&3&2\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}+5\mathbf{I}}+\frac{1}{48}\overbrace{\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&3&-4\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}-\mathbf{I}}\overbrace{\begin{bmatrix}-2&2&3\\0&-2&4\\0&3&-6\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}-3\mathbf{I}}$$
$$=\underbrace{-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-12&4&9\\0&-12&16\\0&9&-12\end{bmatrix}}_{\text{固有値 1 への射影}}+\underbrace{\frac{1}{16}\begin{bmatrix}0&4&9\\0&0&16\\0&9&-8\end{bmatrix}}_{\text{固有値 3 への射影}}+\underbrace{\frac{1}{48}\begin{bmatrix}0&4&9\\0&0&16\\0&9&24\end{bmatrix}}_{\text{固有値}-5\text{ への射影}} \tag{C.99}$$

となる。ここで $\boxed{-\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=0}$ を使うと、三つの行列に同じ数字が入っているところは足し算により 0 となる。これを使うと、

$$=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-12&0&0\\0&-12&0\\0&0&-12\end{bmatrix}+\frac{1}{16}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-8\end{bmatrix}+\frac{1}{48}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{C.100}$$

となって、確かに単位行列となった。

次に、$\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&-3\\1&-1&0\end{bmatrix}$ について、

(1)特性方程式は

$$\det\begin{bmatrix}1-x&1&3\\2&-x&-3\\1&-1&-x\end{bmatrix}=-(x-2)^2(x+3) \tag{C.101}$$

なので、固有値は 2 と 3（2 の方は重複度 2）。

(2)一般化固有ベクトルの空間を考えるため、$(\mathbf{M}-2)^2$ と $\mathbf{M}+3$ を考えておくと、

$$\mathbf{M}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-1&1&3\\2&-2&-3\\1&-1&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{M}+3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4&1&3\\2&3&-3\\1&-1&3\end{bmatrix} \tag{C.102}$$

と

$$(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^2=\begin{bmatrix}6&-6&-12\\-9&9&18\\-5&5&10\end{bmatrix} \tag{C.103}$$

である。これから固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$、固有値 -3 の固有ベクトルは $\begin{bmatrix}6\\-9\\-5\end{bmatrix}$ である。固有値 2 は重複度 2 なので、$\boxed{(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^2\vec{v}=0}$ だが $\boxed{(\mathbf{M}-2\mathbf{I})\vec{v}\neq 0}$ であるベクトルを探すと

$$\begin{bmatrix}-1&1&3\\2&-2&-3\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \tag{C.104}$$

が見つかる。$\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ がジョルダン鎖。

(3)Cayley-Hamilton の定理の式が満たされるには $\boxed{(\mathbf{M}+3\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^2=\mathbf{0}}$ となればいいが、上で計算した $(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^2$ を見るとたしかに、$\mathbf{M}+3\mathbf{I}$ を掛けると $\vec{0}$ になるベクトルが並んでいる。これで Cayley-Hamilton の定理の成立が確認できた。

(4) $\boxed{A(x)(x-2)^2+B(x)(x+3)=1}$ を探す。

$$(x-2)^2-x(x+3)=-7x+4$$
$$(x-2)^2-x(x+3)=-7(x+3)+25$$
$$(x-2)^2-(x+7)(x+3)=25$$
$$\frac{1}{25}(x-2)^2-\frac{1}{25}(x-7)(x+3)=1 \tag{C.105}$$

のように計算する。

$$\frac{1}{25}(\mathbf{M}-2)^2=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}6&-6&-12\\-9&9&18\\-5&5&10\end{bmatrix} \tag{C.106}$$

$$-\frac{1}{25}(\mathbf{M}-7)(\mathbf{M}+3)=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}19&6&12\\9&16&-18\\5&-5&15\end{bmatrix} \tag{C.107}$$

となって、この 2 つの和は確かに単位行列となる。

これらが射影演算子であることを確認しておくと、

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}6&-6&-12\\-9&9&18\\-5&5&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}19&6&12\\9&16&-18\\5&-5&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}6&-6&-12\\-9&9&18\\-5&5&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}19&6&12\\9&16&-18\\5&-5&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}6 & -6 & -12\\ -9 & 9 & 18\\ -5 & 5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -9\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 9\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}19 & 6 & 12\\ 9 & 16 & -18\\ 5 & -5 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -9\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{C.108}$$

最後に $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ について、

(1)特性方程式は

$$\det\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=-(x-2)^3 \tag{C.109}$$

なので、固有値は 2 しかない（重複度 3)。

(2)

$$\mathbf{M}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{C.110}$$

となる。これから固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$ であることがわかる。$\mathbf{M}-2\mathbf{I}$ を掛けるとこのベクトルになるベクトルは、

$$\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \tag{C.111}$$

という式を見れば $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ がすぐ見つかる。次に

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \tag{C.112}$$

という式を見て少し計算すれば $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$ がこれを満たすとわかる。$\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$ がジョルダン鎖。

(3)Cayley-Hamilton の定理の式が満たされるには $\boxed{(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^3=\mathbf{0}}$ となればよい。

$$(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -9\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \tag{C.113}$$

$$(\mathbf{M}-2\mathbf{I})^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{C.114}$$

これで Cayley-Hamilton の定理の成立が確認できた。

(4)今は考えている空間が全部一つの一般化固有空間に入っているので、射影演算子を作る必要はない。

★【演習問題 7-1】の解答 ……………………（問題は p116、ヒントは p148）

(1)ヒントより、$\boxed{\exp\mathbf{A}^{-1}=\exp\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\frac{1}{a}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{b}}\end{bmatrix}}$ となり、これは $\boxed{\exp\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{a} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{b}\end{bmatrix}}$ の逆行列ではない。

(2)ヒントより、

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}^n=\frac{1}{\lambda^{2n}}\begin{bmatrix}\lambda^n & -n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix} \tag{C.115}$$

と予想される。この予想が正しいことは、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^{2n}}\begin{bmatrix}\lambda^n & -n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}\frac{1}{\lambda^2}\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\\ =&\frac{1}{\lambda^{2n+2}}\begin{bmatrix}\lambda^{n+1} & -(n+1)\lambda^n\\ 0 & \lambda^{n+1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.116}$$

となることで確認できる。

$$\begin{aligned}\exp\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda^{2n}}\begin{bmatrix}\lambda^n & -n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda^n} & -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda^{n+1}}\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda^n}\end{bmatrix}\\ &=\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\lambda^2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.117}$$

$\exp(\mathbf{J}_2(\lambda))$ は【問い 7-3】→ p113 の答え(C.47)→ p145 で $\boxed{i=2, t=1}$ にした

$$\exp\left[\mathbf{J}_2(\lambda)\right]=\mathrm{e}^{\lambda}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{C.118}$$

の逆行列ではない。

★【演習問題 A-1】の解答 ………………（問題は p128、ヒントは p148）

行列は

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{C.119}$$

である。$\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{bmatrix}$ に右から掛けると

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}0 & 1 & 2x & \cdots & nx^{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.120}$$

となる。「微分」を表現する行列になっていることがわかる。

★【演習問題 A-2】の解答 ………………（問題は p128、ヒントは p148）

(1) $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin mx=m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos mx}$ となって、結果は元のベクトル空間の基底で表現できなくなるので、ベクトル空間内の演算子ではない。

(2) $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin mx=-m^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin mx}$ となって、結果は元のベクトル空間内なので、ベクトル空間内の演算子と言える。行列で表現すると、$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -4 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -9 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -N^2\end{bmatrix}$ となる。