

付録 E

章末演習問題のヒントと解答

★【演習問題 1-1】のヒント..... (問題は p20、解答は p9w)

- (1) 4つの物体の速度は観測者の速度の分だけ変化して、 $\vec{v}_i - \vec{V}$ に見える。
- (2) 上で求めた式を $\vec{V}$ の 0 次、1 次、2 次に分けてみる。それぞれが成立しなくてはいいない。

★【演習問題 1-2】のヒント..... (問題は p20、解答は p9w)

$d\theta$ に比例する部分 (つまり、 θ を変化させたことによるベクトルの変化) と、 $d\phi$ に比例する部分 (つまり、 ϕ を変化させたことによるベクトルの変化) に分けて考えるとよい。

★【演習問題 1-3】のヒント..... (問題は p20、解答は p10w)

ぶつかってきた球の速度を $\vec{v}$ 、衝突後の二つの球の速度を $\vec{v}'$, $\vec{V}$ とすると、エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}'|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{V}|^2 \quad (\text{E.1})$$

運動量保存則は

$$m\vec{v} = m\vec{v}' + m\vec{V} \quad (\text{E.2})$$

である。運動量保存則は 20 ページの三角形で表現される。

★【演習問題 2-1】のヒント..... (問題は p49、解答は p10w)

面積は $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ である。 $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$ となるから、 $a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = L$ という拘束条件をつけて考える。拘束条件は

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta &= (L - a - b)^2 \\ a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta &= L^2 + a^2 + b^2 - 2aL - 2bL + 2ab \\ 0 &= L^2 - 2aL - 2bL + 2ab(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

として、ラグランジュ未定乗数の方法を使おう。

★【演習問題 2-2】のヒント (問題は p50、解答は p11w)

3つの辺を a, b, c とすると、体積は $V = abc$ で、表面積は $S = 2(ab + bc + ca)$ である。ラグランジュ未定乗数を用いて、

$$V' = abc + \lambda(ab + bc + ca - \frac{S}{2}) \quad (\text{E.4})$$

が極値になる点を求める。

★【演習問題 2-3】のヒント (問題は p50、解答は p12w)

箱の容積は

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3 \quad (\text{E.5})$$

であるから、これを x で微分して 0 と置く。

★【演習問題 3-1】のヒント (問題は p82、解答は p12w)

つかい棒を外して替りに手で力を加えたのが右の図で、この場合、角度 θ が

120度 $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ から $\delta\theta$ だけ変化した時の仕事を考える。右側の、手が力を加えている

点の x 座標は $L \cos \theta$ から $L \cos(\theta + \delta\theta)$ へと変化する。また、一番下の棒の y 座標は、 $-2L \sin \theta$ から $-2L \sin(\theta + \delta\theta)$ へと変化する。

また、一番下の棒の y 座標は、 $-2L \sin \theta$ から $-2L \sin(\theta + \delta\theta)$ へと変化する。

★【演習問題 3-2】のヒント (問題は p82、解答は p13w)

額縁の重心 G と釘の距離は

$$Y = \sqrt{x^2 + (y + H)^2} \quad (\text{E.6})$$

である。これが「重心が釘に比べてどれだけ低くなっているか」を表す量だから、これが大きいほど位置エネルギーは小さい。

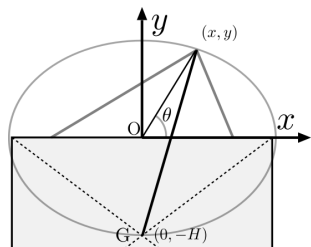
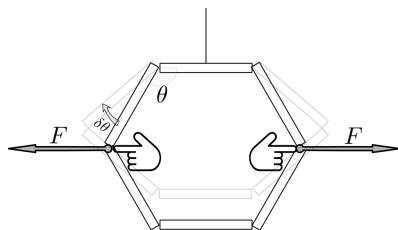
額縁を固定した座標系で考えると、釘の位置 (x, y) は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ただし、} a = \frac{\ell}{2}, b = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - L^2} \quad (\text{E.7})$$

を満たす位置にある。これを拘束条件としてラグランジュ未定乗数を使う方法もあるが、 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ として θ を変化させた時の

$$Y = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + (b \sin \theta + H)^2} \quad (\text{E.8})$$

の最大値を求めるのがよい。



★【演習問題 4-1】のヒント (問題は p110、解答は p13w)

$$L = \frac{1}{2}m_1((\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1)^2) + \frac{1}{2}m_2((\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2) - K\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (\text{E.9})$$

★【演習問題 4-2】のヒント (問題は p110、解答は p13w)

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_1\left|\dot{\vec{x}}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\dot{\vec{x}}_2\right|^2 + \frac{1}{2}m_3\left|\dot{\vec{x}}_3\right|^2 - V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \quad (\text{E.10})$$

だから、運動方程式は

$$-\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} - \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{x}}_i) = 0 \quad (\text{E.11})$$

である。

★【演習問題 4-3】のヒント (問題は p110、解答は p14w)

m_1 の方が x 上昇すると、 m_2 の方が x 下降するという関係にある。

★【演習問題 5-1】のヒント (問題は p137、解答は p14w)

ラグランジアンを (x, y, z) で書くと

$$L = \frac{m}{2}((v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{E.12})$$

なので、

$$-\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}x - \frac{d}{dt}(mv_x) = 0 \quad (\text{E.13})$$

のようなオイラー・ラグランジュ方程式が導ける (y, z 成分も同様)。

★【演習問題 5-2】のヒント (問題は p137、解答は p14w)

球対称な 3 次元問題は 2 次元問題になることはもうわかっているので、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の面に

限った話にしてよい。その時は $|\vec{L}| = h$ である。

解くべき式はどちらも

$$m\ddot{r} = \frac{|\vec{L}|^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \quad (\text{E.14})$$

だが、両辺に $\dot{r}$ を掛けて積分して

$$\frac{1}{2}m(\dot{r})^2 = -\frac{h^2}{2mr^2} - V(r) + E \quad (\text{E.15})$$

としてから $r = \frac{1}{x}$ として、

$$\frac{1}{2x^4}m(\dot{x})^2 = -\frac{h^2}{2m}x^2 - V\left(\frac{1}{x}\right) + E \quad (\text{E.16})$$

として、さらに、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{mr^2} = \frac{h}{m}x^2 \quad (\text{E.17})$$

から

$$\frac{d}{dt} = \frac{h}{m} x^2 \frac{d}{d\phi} \quad (\text{E.18})$$

という式を作ることで、

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 &= -\frac{h^2}{2m} x^2 - V\left(\frac{1}{x}\right) + E \\ \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 &= -x^2 + \frac{2m(E - V(\frac{1}{x}))}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

と変形できる。後はそれぞれの状況にあわせてこれを解く。

★【演習問題 5-3】のヒント (問題は p138、解答は p15w)

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} M ((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2) + \frac{1}{2} I_{\theta} (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_{\phi} (\dot{\phi})^2 \quad (\text{E.20})$$

である。これから x, y, θ, ϕ の 4 つに対応したオイラー・ラグランジュ方程式が出るが、
拘束条件(5.74)により、

→ p130

$$\delta x = R \cos \theta \delta \phi, \quad \delta y = R \sin \theta \delta \phi \quad (\text{E.21})$$

と変分の間に関係が付き。

★【演習問題 6-1】のヒント (問題は p167、解答は p16w)

左右のバネの長さはそれぞれ、 $\sqrt{(\ell + x)^2 + y^2}$ と $\sqrt{(\ell - x)^2 + y^2}$ だから、

$$L = \frac{1}{2} m ((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2) - \frac{1}{2} k \left(\sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} - \ell \right)^2 - \frac{1}{2} k \left(\sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - \ell \right)^2 \quad (\text{E.22})$$

となる。

★【演習問題 6-2】のヒント (問題は p167、解答は p16w)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2)^2 - \frac{1}{2} k (x_1)^2 - \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k (x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

というラグランジアンから出発する。

★【演習問題 6-3】のヒント (問題は p167、解答は p17w)

$\dot{x} = R\dot{\theta}(1 - \cos \theta)$, $\dot{y} = -R\dot{\theta} \sin \theta$ を $\frac{1}{2}m((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)$ に代入して、位置エネルギー mgy を引くことで

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left((R\dot{\theta}(1 - \cos \theta))^2 + (-R\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right) + mgR(1 - \cos \theta) \\ &= mR^2(\dot{\theta})^2(1 - \cos \theta) + mgR(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

というラグランジアンができる。このラグランジアンを

$$\frac{1}{2}M(\dot{X})^2 - \frac{1}{2}KX^2 \quad (\text{E.25})$$

の形に直せないか？

★【演習問題 7-1】のヒント (問題は p190、解答は p17w)

直方体については普通に積分すればよい。中空円筒は円筒座標を使って、 ρ の積分は $\int_r^R d\rho$ のように行う。

楕円体は、半径 R の球を考えて、 x 方向に $\frac{a}{R}$ 倍、 y 方向に $\frac{b}{R}$ 倍、 z 方向に $\frac{c}{R}$ 倍したものと考えればよい。そう考えて $x = \frac{a}{R}r \sin \theta \cos \phi$, $y = \frac{b}{R}r \sin \theta \sin \phi$, $z = \frac{c}{R}r \cos \theta$ のような「定数倍された極座標系」を考えると、積分要素は通常の極座標の積分要素を $\frac{abc}{R^3}$ 倍すればよい。すなわち、 $\frac{abc}{R^3} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta$ のような積分を行う。

★【演習問題 7-2】のヒント (問題は p190、解答は p19w)

θ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} &\overbrace{I_{xx}\omega_x \underbrace{\dot{\phi} \sin \psi \cos \theta}_{\frac{\partial \omega_x}{\partial \theta}} + I_{yy}\omega_y \underbrace{\dot{\phi} \cos \psi \cos \theta}_{\frac{\partial \omega_y}{\partial \theta}} - I_{zz}\omega_z \underbrace{\dot{\phi} \sin \theta}_{\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta}}}^{\frac{\partial L}{\partial \theta}} \\ &\quad - \frac{d}{dt} \underbrace{(I_{xx} \cos \psi \omega_x - I_{yy} \sin \psi \omega_y)}_{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

ϕ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$- \frac{d}{dt} \underbrace{(I_{xx}\omega_x \sin \psi \sin \theta + I_{yy}\omega_y \cos \psi \sin \theta + I_{zz}\omega_z \cos \theta)}_{\frac{\partial L}{\partial \phi}} = 0 \quad (\text{E.27})$$

である。これらを丁寧に計算する。

★【演習問題 7-3】のヒント (問題は p190、解答は p20w)

(7.71) を $e^{i\phi}(\dots)$ と置くと、その時間微分は
→ p190

$$i\dot{\phi}e^{i\phi}(\dots) + e^{i\phi}\frac{d}{dt}(\dots) \quad (\text{E.28})$$

という形の式になるから、 $i\dot{\phi}(\dots) + \frac{d}{dt}(\dots)$ を計算して 0 になることを言えばよい。

こうしておいて、 $\frac{d(I_{xx}\omega_x)}{dt} = (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z$ などを使う。

★【演習問題 7-4】のヒント (問題は p190、解答は p22w)

対称コマと同様に考える。 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4}$, $I_{zz} = \frac{MR^2}{2}$ とすると、回転による運動エネルギーが

$$T_1 = \frac{MR^2}{8} \left((\dot{\theta})^2 + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right) + \frac{MR^2}{4} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \quad (\text{E.29})$$

である。重心運動を考えると、 $z = R \sin \theta$ だけが動く変数なので、

$$T_2 = \frac{M}{2} \left(R\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 = \frac{MR^2}{2} \cos^2 \theta (\dot{\theta})^2 \quad (\text{E.30})$$

そして重力による位置エネルギーが

$$U = MgR \sin \theta \quad (\text{E.31})$$

である。

★【演習問題 8-1】のヒント (問題は p204、解答は p23w)

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{x}}_2|^2 - V(\vec{x}_1 - \alpha\vec{x}_2) \quad (\text{E.32})$$

である。 $\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_1 + \vec{\epsilon}$ と並進させたとして、作用が不変に保つためには $\vec{x}_2$ はどう変化すればよいかを考えよう。

★【演習問題 8-2】のヒント (問題は p204、解答は p23w)

このラグランジアンは $x \rightarrow \alpha x, y \rightarrow \alpha y$ と両方を定数倍する変換で不変である。微小変換としては、 $\delta x = \epsilon x, \delta y = \epsilon y$ で不変。これをネーターの定理の式に代入する。

★【演習問題 8-3】のヒント (問題は p204、解答は p23w)

不変性を示すには、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ がこの変換で不変であることを示せば十分である。

保存量は $\frac{\partial L}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi$ を丁寧に計算すればよい。

なお、この式(8.49)が、(8.46)と似ているがちょっと違うのが気になるかもしれない。
→ p204 → p203

オイラー角の θ は X 軸周りに回す角度になっている。しかし極座標の方の θ は z 軸から倒れる角度だが、($\phi = 0$ の時は x 軸方向に倒れるから) y 軸周りに回す角度になっている。つまり回し方が 90 度違うため、似ているが少し違う式になっている。

★【演習問題 9-1】のヒント (問題は p241、解答は p26w)

極座標のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \left((\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 \right) - \frac{1}{2} k r^2 \quad (\text{E.33})$$

である。まず、正準運動量を計算する。

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (\text{E.34})$$

p_θ だけちょっと違うので注意が必要である。

★【演習問題 9-3】のヒント (問題は p242、解答は p26w)

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{|x|} \quad (\text{E.35})$$

を積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \pm dt \\ 2\sqrt{|x|} &= \pm(t - t_0) \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

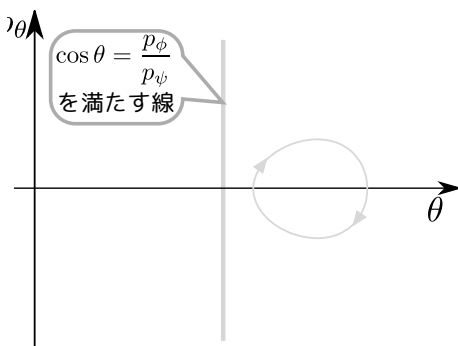
である。一方、この方程式の解には、「任意の t に対して $x = 0$ 」というものもある。この時、 $\frac{dx}{dt}$ も 0 になるから、両辺が 0 になって方程式が成立する。

★【演習問題 9-4】のヒント (問題は p242、解答は p27w)

ヒントでは、3つの線のうち、もっともエネルギーが低い (1) の場合だけを考えておこう (右の図)。この場合は常に $\cos \theta < \frac{p_\phi}{p_\psi}$ の領域で運動す

るから、 $\dot{\phi} = p_\psi \times \frac{\frac{p_\phi}{p_\psi} - \cos \theta}{I_{xx} \sin^2 \theta}$

は常に p_ψ と同符号である。 $\dot{\phi}$ は θ によって変化するものの、同じ方向の運動を続けることになる。 θ 方向に波打つような動きをしながら ϕ が増加していく、という動きをすることになるだろう ($p_\psi > 0$ の場合で考えている)。



★【演習問題 10-2】のヒント (問題は p278、解答は p29w)

(10.88) から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は

→ p268

$$-e^{\frac{K}{m}t} k q - \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{K}{m}t} m \dot{q} \right) = 0 \quad (\text{E.37})$$

で、整理すると

$$-kq - K\dot{q} - m\ddot{q} = 0 \quad (\text{E.38})$$

であるが、この解は $q = Ae^{\lambda t}$ と置くことで求められる。この解を代入すると

$$-k - K\lambda - m\lambda^2 = 0 \quad (\text{E.39})$$

が出てくるから、解は $\lambda_{\pm} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}$ として、

$$q = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \quad (\text{E.40})$$

と書ける。ただし、重解すなわち $\lambda_+ = \lambda_-$ の時は

$$q = (At + B)e^{\lambda_{\pm} t} \quad (\text{E.41})$$

が解である。

★【演習問題 10-3】のヒント…………… (問題は p278、解答は p30w)
 (10.101) を示せばよいから、たとえば $\{Q_j, Q_k\}_{q,p}$ を
 $\rightarrow$ p270

$$\begin{aligned} \{Q_j, Q_k\}_{q,p} &= \{q_j + \epsilon \{q_j, \mathcal{G}\}, q_k + \epsilon \{q_k, \mathcal{G}\}\} \\ &= \{q_j, q_k\} + \{q_j, \epsilon \{q_k, \mathcal{G}\}\} + \{\epsilon \{q_j, \mathcal{G}\}, q_k\} \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

のように計算していく。この後はヤコビ恒等式を使う。

★【演習問題 11-2】のヒント…………… (問題は p297、解答は p31w)

1 次元調和振動子では $W = \pm \int \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right)} dx$ だったから、

$$\begin{aligned} W &= \pm \int \sqrt{2m \left(E_x - \frac{1}{2} kx^2 \right)} dx \pm \int \sqrt{2m \left(E_y - \frac{1}{2} ky^2 \right)} dy \\ &= \pm \sqrt{2mE_x} \int \sqrt{1 - \frac{k}{2E_x} x^2} dx \pm \sqrt{2mE_y} \int \sqrt{1 - \frac{k}{2E_y} y^2} dy \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

とすればよさそうである。 $\frac{2E_x}{k} = (A_x)^2$, $\frac{2E_y}{k} = (A_y)^2$ として (こうすると $\sqrt{2mE_x} = \sqrt{mk}A_x$ のようになる)、 $x = A_x \sin \Theta$ (この Θ は極座標の座標である θ とは違う変数である) と変数変換すると、

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{(A_x)^2}} dx = \int \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta}}_{\cos \Theta} \underbrace{A_x \cos \Theta d\Theta}_{dx} = A_x \int \cos^2 \Theta d\Theta \quad (\text{E.44})$$

となり、これは $\cos^2 \Theta = \frac{1 + \cos 2\Theta}{2}$ を使って積分できる。

★【演習問題 11-3】のヒント…………… (問題は p297、解答は p32w)

短い時間 Δt の間に、右側の壁には $\frac{v\Delta t}{2L}$ 回衝突し、衝突するたびに $2u$ だけ速度を失っていくから、速度は

$$v \rightarrow v - \frac{uv\Delta t}{L} \quad (\text{E.45})$$

と変化する。

以下は解答編

★【演習問題 1-1】の解答 (問題は p20、ヒントは p1w)

(1)

$$\frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1 - \vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2 - \vec{V}|^2 = \frac{1}{2}m_3|\vec{v}_3 - \vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_4|\vec{v}_4 - \vec{V}|^2 + Q \quad (\text{E.46})$$

(2) (E.46) の $\vec{V}$ の 0 次は、元のエネルギー保存の式である。 $\vec{V}$ の 1 次を取り出すと、

$$m_1\vec{V} \cdot \vec{v}_1 + m_2\vec{V} \cdot \vec{v}_2 = m_3\vec{V} \cdot \vec{v}_3 + m_4\vec{V} \cdot \vec{v}_4 \quad (\text{E.47})$$

となるが、 $\vec{V}$ は任意なので、

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 \quad (\text{E.48})$$

が成り立つ。これは運動量保存則である。一方 $\vec{V}$ の 2 次を取り出すと、

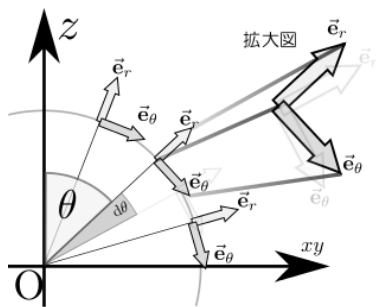
$$\frac{1}{2}m_1|\vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{V}|^2 = \frac{1}{2}m_3|\vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_4|\vec{V}|^2 \quad (\text{E.49})$$

となるが、これは $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ 、すなわち質量の保存則を導く。

この結果は、対称性と保存則が結びついていることの一例である。後でラグランジュ形式を使って系統的にこのような保存則を導く方法を知る。

★【演習問題 1-2】の解答 (問題は p20、ヒントは p1w)

まず、 θ の変化による部分 ($d\theta$ に比例する部分) を考えよう。18 ページの図の断面図にあたる図を描いてみる (右の図)。 θ が $d\theta$ だけ変化した時、 $\vec{e}_r$ も $\vec{e}_\theta$ も、角度 $d\theta$ だけ回る。長さ 1 のベクトルが $d\theta$ 回るのだから、その変化 (ベクトルの変化だからベクトル) の長さは $d\theta$ であり、その向きは、図からわかるように、 $\vec{e}_r$ の変化は $\vec{e}_\theta$ 方向を、 $\vec{e}_\theta$ の変化は $-\vec{e}_r$ 方向である。以上からまず、 θ の変化により、



$$d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta, \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r, \quad d\vec{e}_\phi = 0 \quad (\text{E.50})$$

がわかる。 $\vec{e}_\phi$ はこの変化の前後で同じ方向 (紙面の表から裏へ向かう向き) を向いているから変化量は 0 である。

(10w) 付録 E 章末演習問題のヒントと解答

次に ϕ を変化させた場合を考える。今度は z 軸の上（北極側）から見下ろした図（右の図）を描いてやると、今度は $\vec{e}_r$ のうち紙面（ x - y 面）内の成分（面に垂直な成分は変化していない）が回る。変化の方向は $\vec{e}_\phi$ 方向である。変化する部分の長さは 1 ではなく $\sin \theta$ なので、

$$d\vec{e}_r = d\phi \sin \theta \vec{e}_\phi \quad (\text{E.51})$$

が成り立つ。同様に考えて、

$$d\vec{e}_\theta = d\phi \cos \theta \vec{e}_\phi \quad (\text{E.52})$$

である。

また、 $\vec{e}_\phi$ は $d\phi$ だけ変化するのだが、その変化のベクトルの方向は $\vec{e}_r$ でも $\vec{e}_\theta$ でもなく、図に黒で描いたベクトルの方向である。このベクトルは長さ 1 であるが、 r 方向の成分が $-\sin \theta$ で θ 方向の成分が $-\cos \theta$ であることがわかるので、 $-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta$ となる。変化を表すベクトルは長さ $d\phi$ だから、

$$d\vec{e}_\phi = -d\phi (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \quad (\text{E.53})$$

となる。

★【演習問題 1-3】の解答 (問題は p20、ヒントは p1w)

エネルギー保存則から出る、 $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}'|^2 + |\vec{V}|^2$ は、20 ページの三角形において三平方の定理の成り立っている（つまり直角三角形である）ことを示している。

★【演習問題 2-1】の解答 (問題は p49、ヒントは p1w)

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta + \lambda (L^2 - 2aL - 2bL + 2ab(1 + \cos \theta)) \quad (\text{E.54})$$

を微分すると、

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2}b \sin \theta - 2\lambda L + 2\lambda b(1 + \cos \theta) = 0 \quad (\text{E.55})$$

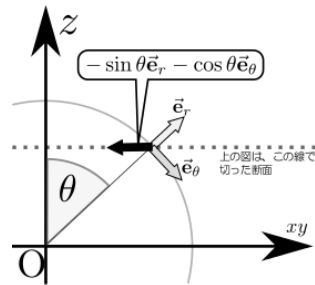
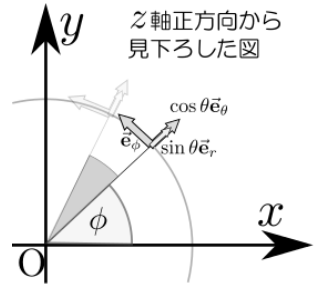
$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2}a \sin \theta - 2\lambda L + 2\lambda a(1 + \cos \theta) = 0 \quad (\text{E.56})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{2}ab \cos \theta - 2\lambda ab \sin \theta = 0 \quad (\text{E.57})$$

という条件式が出る。(E.55) $\div b - (E.56) \div a$ を計算すると、

$$\frac{2\lambda L}{b} - \frac{2\lambda L}{a} = 0 \quad (\text{E.58})$$

であり、 L は 0 ではないから、 $\lambda = 0$ でない限り $a = b$ である。しかし $\lambda = 0$ だと (E.55) が $\frac{1}{2}b \sin \theta = 0$ になってしまうがこれは有り得ない。よって $a = b$ がわかった。



(11w)

(E.57) から $\lambda = \frac{\cos \theta}{4 \sin \theta}$ とわかるのでこれを (E.56) に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a \sin \theta - \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} L + \frac{a \cos \theta}{2 \sin \theta} (1 + \cos \theta) &= 0 \\ a \sin^2 \theta - \cos \theta L + a \cos \theta (1 + \cos \theta) &= 0 \\ a - \cos \theta L + a \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

より、 $L = a \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta}$ となるので、これを拘束条件に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(a \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} \right)^2 - 4a \left(a \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} \right) + 2a^2 (1 + \cos \theta) &= 0 \quad \left(\times \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \right) \\ (1 + \cos \theta)^2 - 4 \cos \theta (1 + \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta (1 + \cos \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

$1 + \cos \theta$ は 0 ではないから、両辺を $1 + \cos \theta$ で割って、

$$\begin{aligned} 1 + \cos \theta - 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta &= 0 \\ (1 - \cos \theta)(1 - 2 \cos \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.61})$$

ありえるのは $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。

★【演習問題 2-2】の解答 (問題は p50、ヒントは p2w)

$$\frac{\partial V'}{\partial a} = bc + \lambda(b + c) = 0 \quad (\text{E.62})$$

$$\frac{\partial V'}{\partial b} = ac + \lambda(a + c) = 0 \quad (\text{E.63})$$

$$\frac{\partial V'}{\partial c} = ab + \lambda(a + b) = 0 \quad (\text{E.64})$$

$$\frac{\partial V'}{\partial \lambda} = ab + bc + ca - \frac{S}{2} = 0 \quad (\text{E.65})$$

を連立して解く。

$$\frac{S}{2} + 2\lambda(a + b + c) = 0 \quad (\text{E.66})$$

がまず計算できて、 $\lambda = \frac{S}{4(a + b + c)}$ がわかる。

(E.62) $\times a$ - (E.63) $\times b$ より、

$$\lambda a(b + c) - \lambda b(a + c) = 0 \quad (\text{E.67})$$

より、 $\lambda c(a - b) = 0$ となるが、すでに $\lambda \neq 0$ はわかっているので $a = b$ 。同様にして $b = c$ もわかるから $a = b = c$ となって立方体である。

★【演習問題 2-3】の解答…………… (問題は p50、ヒントは p2w)
 ヒントの式を微分して、

$$\frac{dV}{dx} = ab - 4(a+b)x + 12x^2 = 0 \quad (\text{E.68})$$

となるので、これを 2 次方程式として解く。

$$x = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{4(a+b)^2 - 12ab}}{12} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \quad (\text{E.69})$$

となる。二つ解があるように思われるが、複号が + の方は x の取り得る範囲 ($\frac{a}{2}$ と $\frac{b}{2}$ のうち小さい方よりも小さくなくてはならない) を超えてしまうので、 $x = \frac{a+b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$ が解である。

a の方が小さいとして、 $\frac{a+b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$ が $\frac{a}{2}$ より大きいことを示すために、引き算してみる。

$$\frac{a+b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} - \frac{a}{2} = \frac{-2a+b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \quad (\text{E.70})$$

となる。 $\sqrt{a^2 - ab + b^2} > |-2a+b|$ を示せば、この分子は負にならない。これらの左辺と右辺を自乗した量を比べて

$$a^2 - ab + b^2 - (-2a+b)^2 = -3a^2 + 3ab = 3a(b-a) > 0 \quad (\text{E.71})$$

から、 $\sqrt{a^2 - ab + b^2} > |-2a+b|$ がわかり、複号 + は不適である。

★【演習問題 3-1】の解答…………… (問題は p82、ヒントは p2w)
 仮想変位 $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ が行われた時の仕事は、

$$\text{手がする仕事} : 2F \times (-L \cos(\theta + \delta\theta) + L \cos \theta) = 2FL\delta\theta \sin \theta \quad (\text{E.72})$$

$$\begin{aligned} \text{重力がする仕事} : & mg(2L \sin(\theta + \delta\theta) - 2L \sin \theta) \\ & + 2mg \left(\frac{3L}{2} \sin(\theta + \delta\theta) - \frac{3L}{2} \sin \theta \right) \\ & + 2mg \left(\frac{L}{2} \sin(\theta + \delta\theta) - \frac{L}{2} \sin \theta \right) \\ & = 6mgL\delta\theta \cos \theta \quad (\leftarrow \cos \theta < 0 \text{ なので、これは負}) \end{aligned} \quad (\text{E.73})$$

仮想仕事の原理によりこの二つの和は 0 なので、 $F = -3mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ である。今 $\theta = \frac{2\pi}{3}$

であったから、 $F = -3mg \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}mg$ となる。

★【演習問題 3-2】の解答 (問題は p82、ヒントは p2w)
 (E.8)を θ で微分して、
 $\rightarrow$ p2

$$\begin{aligned}\frac{dY}{d\theta} &= \frac{-a^2 \cos \theta \sin \theta + b \cos \theta (b \sin \theta + H)}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + (b \sin \theta + H)^2}} \\ 0 &= a^2 \cos \theta \sin \theta - b \cos \theta (b \sin \theta + H) \\ bH \cos \theta &= (a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\quad (\text{E.74})$$

この解は $\cos \theta = 0 (\theta = \frac{\pi}{2})$ と、 $\sin \theta = \frac{bH}{a^2 - b^2}$ となる点である。

$$\frac{bH}{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - L^2} H}{L^2} \quad (\text{E.75})$$

であり、この量は $H > \frac{L^2}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - L^2}}$ であれば1より大きくなって $\sin \theta = \frac{bH}{a^2 - b^2}$ に

は解がない。その時は極値は $\theta = \frac{\pi}{2}$ しかない。逆に $H < \frac{L^2}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - L^2}}$ であれば3つ

の角度で極値がある。

極値が一つしかない($\theta = \frac{\pi}{2}$ のみが解)の時は位置エネルギーのグラフが



の形になるが極値が三つある時は位置エネルギーのグラフが



の形となり真ん中の $\theta = \frac{\pi}{2}$ はむしろ不安定な解になる。よってこの条件が満たされる時、額縁は傾いている方が安定になる。

★【演習問題 4-1】の解答 (問題は p110、ヒントは p3w)
 ヒントのラグランジアンから、

$$-K \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_1 \ddot{x}_1 = 0, \quad -K \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (\text{E.76})$$

となる(y 成分は省略)。これらの式から $\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = 0$ が導ける。

★【演習問題 4-2】の解答 (問題は p110、ヒントは p3w)
 ヒントの式(E.11)から、 $\sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i$ が0になるためにはどうすればよいかと考えると、
 $\rightarrow$ p3

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} = 0 \quad (\text{E.77})$$

であればよい。これは結局、 $\vec{\epsilon}$ を微小なベクトルとして、

$$V(\vec{x} + \vec{\epsilon}) = V(\vec{x}) \quad (\text{E.78})$$

という並進不変性と同じことを言っている。

★【演習問題 4-3】の解答 (問題は p110、ヒントは p3w)

m_1 の (適当に決めた原点からの) 上昇距離を x とすると、そのラグランジアンが $L_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x})^2 - m_1gx$ となる。 m_2 はその 4 倍下降するから、 $L_2 = \frac{1}{2}m_2(4\dot{x})^2 + 4m_2gx$ であり、

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x})^2 - m_1gx + \frac{1}{2}m_2(4\dot{x})^2 + 4m_2gx \quad (\text{E.79})$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$-m_1g + 4m_2g - \frac{d}{dt}(m_1\dot{x} + 16m_2\dot{x}) = 0 \quad (\text{E.80})$$

★【演習問題 5-1】の解答 (問題は p137、ヒントは p3w)

ベクトルで書き直したオイラー・ラグランジュ方程式は

$$-\frac{GMm}{r^3}\vec{x} - \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \quad (\text{E.81})$$

である。角運動量の保存は

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times m\vec{v}) = m \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_0 + \vec{x} \times \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v})}_{-\frac{GMm}{r^3}\vec{x}} = 0 \quad (\text{E.82})$$

でわかる。エネルギーも同様に微分すれば、

$$\frac{dE}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{GMm}{r^3}\vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{E.83})$$

である。ルンゲ-レンツベクトルも、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \times \vec{L} - \frac{GMm}{r}\vec{x}\right) &= \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} + m\vec{v} \times \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_0 + \frac{GMm}{r^3}(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{x} - \frac{GMm}{r}\vec{v} \\ &= -\frac{GM}{r^3}\vec{x} \times (\vec{x} \times m\vec{v}) + \frac{GMm}{r^3}(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{x} - \frac{GMm}{r}\vec{v} \\ &= -\frac{GMm}{r^3}(\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{v}) - (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{x} + |\vec{x}|^2\vec{v}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.84})$$

★【演習問題 5-2】の解答 (問題は p137、ヒントは p3w)

$V\left(\frac{1}{x}\right) = kQqx$ なので、解くべき式は

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = -x^2 + \frac{2m(E - kQqx)}{h^2} = -\left(x + \frac{mkQq}{h^2}\right)^2 + \frac{2mE}{h^2} + \frac{(mkQq)^2}{h^4} \quad (\text{E.85})$$

である。 $\frac{2mE}{h^2} + \frac{(mkQq)^2}{h^4} = C$ と置くと、

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(x + \frac{mkQq}{h^2}\right)^2 = C \quad (\text{E.86})$$

(15w)

となる ($C \geq 0$ でなくてはいけない)。

$$x = -\frac{mkQq}{h^2} + C \cos(\phi + \alpha) \quad (\text{E.87})$$

がこの微分方程式の解である。

$$r = \frac{h^2}{mkQq} \frac{1}{\epsilon \cos(\phi + \alpha) - 1} \quad (\text{E.88})$$

となる。ただし $\epsilon = C \frac{h^2}{mkQq}$ である。ケプラー運動の場合とは、分母の -1 の符号が逆になっている。

★【演習問題 5-3】の解答 (問題は p138、ヒントは p4w)

オイラー・ラグランジュ方程式を出す前段階の変分は

$$-\frac{d}{dt}(M\dot{x})\delta x - \frac{d}{dt}(M\dot{y})\delta y - \frac{d}{dt}(I_\theta\dot{\theta})\delta\theta - \frac{d}{dt}(I_\phi\dot{\phi})\delta\phi = 0 \quad (\text{E.89})$$

となる。ここから、 $\delta x, \delta y$ が $\delta\phi$ で表されているのでこれを代入するという方法もあるが、ラグランジュ未定乗数 λ_x, λ_y (それぞれが $\delta x, \delta y$ に対応している) を導入し、

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(M\dot{x}) &= \lambda_x & -\frac{d}{dt}(M\dot{y}) &= \lambda_y \\ -\frac{d}{dt}(I_\theta\dot{\theta}) &= 0 & -\frac{d}{dt}(I_\phi\dot{\phi}) &= -\lambda_x R \cos \theta - \lambda_y R \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{E.90})$$

という 4 本の方程式と、拘束条件 $\dot{x} = R \cos \theta \dot{\phi}, \dot{y} = R \sin \theta \dot{\phi}$ を加えて連立方程式として解けばよい。

θ に関してはすぐに解けて、 $\theta = \omega t + \alpha$ という解が出る (ω, α は積分定数である)。さらに

$$-\frac{d}{dt}(MR\dot{\phi} \cos \theta) = \lambda_x, \quad -\frac{d}{dt}(MR\dot{\phi} \sin \theta) = \lambda_y \quad (\text{E.91})$$

を使って代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(I_\phi\dot{\phi}) &= \frac{d}{dt}(MR\dot{\phi} \cos \theta) R \cos \theta + \frac{d}{dt}(MR\dot{\phi} \sin \theta) R \sin \theta \\ -I_\phi\ddot{\phi} &= MR^2\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (\text{E.92})$$

となるので、 ϕ の方も解けて、 $\phi = \omega' t + \alpha'$ としておこう。

ということは、

$$\dot{x} = R\omega' \cos \theta, \dot{y} = R\omega' \sin \theta \quad (\text{E.93})$$

となって、これは θ に応じて回る円運動になっている。

ラグランジュ未定乗数 $\lambda_x = -M\ddot{x}, \lambda_y = -M\ddot{y}$ はそれぞれ、 x 方向、 y 方向に働く力 (ただし符号は逆) を意味する。円運動するためには中心方向に向かう向心力が必要だが、今の場合はラグランジュ未定乗数とその役を果たしている。その物理的実体は床面と車輪の間に働く静止摩擦力である。

★【演習問題 6-1】の解答 (問題は p167、ヒントは p4w)

ヒントに書いたラグランジアンから、 $y = 0$ にすると、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - kx^2 \quad (\text{E.94})$$

となるから、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2kx \quad (\text{E.95})$$

である。これは単振動となる。

次に、ラグランジアンで $x = 0$ にすると、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y})^2 - k\left(\sqrt{\ell^2 + y^2} - \ell\right)^2 \quad (\text{E.96})$$

になるから、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -2k\left(\sqrt{\ell^2 + y^2} - \ell\right) \times \frac{y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}} \\ &= -2k\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + y^2}}\right)y \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

となる。こちらは単振動より複雑な式となっている。

★【演習問題 6-2】の解答 (問題は p167、ヒントは p4w)

位置エネルギーに含まれる行列を対角化する。

$$\begin{vmatrix} k + K - \lambda & -K \\ -K & k + K - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{E.98})$$

から

$$(k + K - \lambda)^2 - K^2 = 0 \quad (\text{E.99})$$

を解いて、固有値は

$$\lambda = k + K \pm K = k, k + 2K \quad (\text{E.100})$$

の二つで、各々に対する固有ベクトルは $\lambda = k$ の時、

$$\begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.101})$$

$\lambda = k + 2K$ の時、

$$\begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.102})$$

となり、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}_2)^2 - \frac{k}{2}(X_1)^2 - \frac{k + 2K}{2}(X_2)^2 \quad (\text{E.103})$$

という形に書きなおされて、角振動数 $\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$ の二つの調和振動子の問題に書きなおされる。

★【演習問題 6-3】の解答 (問題は p167、ヒントは p5w)

ヒントにあるように、 $mR^2(\dot{\theta})^2(1 - \cos \theta)$ という運動エネルギーの項を、 $\frac{1}{2}M(\dot{X})^2$ の形にしたい。そこで、

$$\dot{X} = \dot{\theta}\sqrt{1 - \cos \theta} \quad (\text{E.104})$$

と置いてみる。これを

$$dX = d\theta \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{\pm \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta \quad (\text{E.105})$$

と書き直すと積分ができて、

$$X = \mp 2\sqrt{1 + \cos \theta} \quad (\text{E.106})$$

(積分定数は $\theta = \pi$ で $X = 0$ になるよう選んだ) から

$$\frac{1}{4}X^2 = 1 + \cos \theta \quad (\text{E.107})$$

としてラグランジアンに代入すれば、

$$L = mR^2(\dot{X})^2 + mgR \left(2 - \frac{1}{4}X^2 \right) \quad (\text{E.108})$$

となり、これは質量 $2mR^2$ 、バネ定数 $\frac{1}{2}mgR$ のバネ振り子と同じ単振動をする。

★【演習問題 7-1】の解答 (問題は p190、ヒントは p5w)

直方体 I_{xx} の計算を示す。 I_{yy}, I_{zz} は $(x, y, z)(a, b, c)$ を取り替えるだけである。

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx}_{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \rho_v (y^2 + z^2) = \rho_v a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz (y^2 + z^2) \\ &= \rho_v a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho_v a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left(y^2 c + \frac{c^3}{12} \right) \\ &= \rho_v a \left[\frac{y^3 c}{3} + y \frac{c^3}{12} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho_v a \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{bc^3}{12} \right) = \frac{\rho_v abc}{12} (b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (\text{E.109})$$

$\rho_v abc = M$ として、 $I_{xx} = \frac{M(b^2 + c^2)}{12}$ を得る。

なお、 $I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{zx} = I_{xz}$ については、積分式を書いてみれば奇関数の積分となっているので 0 であることがすぐにわかる。これは他の形に対しても同様のので省略する。

中空円筒

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \rho_v \int_r^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \rho \underbrace{(\rho \sin \phi)^2}_y + z^2 \\
&= \rho_v \int_r^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left[z\rho^3 \sin^2 \phi + \frac{z^3 \rho}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
&= \rho_v \int_r^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(h\rho^3 \sin^2 \phi + \frac{h^3}{12} \rho \right) \\
&= \rho_v \int_r^R d\rho \left(\pi h \rho^3 + \frac{\pi h^3}{6} \rho \right) \\
&= \pi \rho_v \left[\frac{h\rho^4}{4} + \frac{h^3}{12} \rho^2 \right]_r^R \\
&= \pi \rho_v \left(\frac{h}{4} (R^4 - r^4) + \frac{h^3}{12} (R^2 - r^2) \right) = \underbrace{\pi \rho_v (R^2 - r^2) h}_{M} \left(\frac{1}{4} (R^2 + r^2) + \frac{h^2}{12} \right)
\end{aligned} \tag{E.110}$$

I_{yy} は $\sin^2 \theta \rightarrow \cos^2 \theta$ と変わるだけで同じ。

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho_v \int_r^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \rho \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\rho^2} \\
&= \rho_v \underbrace{\int_r^R d\rho \rho^3}_{\frac{R^4 - r^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz}_h \\
&= \frac{\pi \rho_v}{2} (R^4 - r^4) h = \frac{1}{2} \underbrace{\pi \rho_v (R^2 - r^2) h}_{M} (R^2 + r^2)
\end{aligned} \tag{E.111}$$

楕円体

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{\rho_v abc}{R^3} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \left(\underbrace{\left(\frac{a}{R} r \sin \theta \cos \phi \right)^2}_x + \underbrace{\left(\frac{b}{R} r \sin \theta \sin \phi \right)^2}_y \right) \\
&= \frac{\rho_v abc}{R^5} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^4 \sin^3 \theta (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \\
&= \frac{\rho_v abc}{R^5} \underbrace{\int_0^R dr r^4}_{\frac{R^5}{5}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta}_{\frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)}_{\pi(a^2 + b^2)} \\
&= \frac{\frac{4}{3} \pi \rho_v abc}{5} (a^2 + b^2) = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)
\end{aligned} \tag{E.112}$$

I_{xx}, I_{yy} に関しては a, b, c の立場を入れ替えて、 $I_{xx} = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), I_{yy} = \frac{M}{5} (a^2 + c^2)$ となる。

★【演習問題 7-2】の解答 (問題は p190、ヒントは p5w)
 ヒントに書いた式を丁寧に計算していく。(E.26)から、
 $\rightarrow$ p5

$$\begin{aligned}
 & I_{XX}\omega_X\dot{\phi}\sin\psi\cos\theta + I_{YY}\omega_Y\dot{\phi}\cos\psi\cos\theta - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta \\
 & + I_{XX}\omega_X\dot{\psi}\sin\psi + I_{YY}\omega_Y\dot{\psi}\cos\psi - \cos\psi\frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) + \sin\psi\frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0 \\
 & I_{XX}\omega_X\sin\psi\left(\underbrace{\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta}_{\omega_Z}\right) + I_{YY}\omega_Y\cos\psi\left(\underbrace{\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta}_{\omega_Z}\right) - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta \\
 & - \cos\psi\frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) + \sin\psi\frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0 \\
 & I_{XX}\omega_X\omega_Z\sin\psi + I_{YY}\omega_Y\omega_Z\cos\psi - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta \\
 & - \cos\psi\frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) + \sin\psi\frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0
 \end{aligned} \tag{E.113}$$

となるが、 $\sin\psi\omega_X + \cos\psi\omega_Y = \dot{\phi}\sin\theta$ という式が作れるので、

$$\begin{aligned}
 & I_{XX}\omega_X\omega_Z\sin\psi + I_{YY}\omega_Y\omega_Z\cos\psi - I_{ZZ}\omega_Z(\sin\psi\omega_X + \cos\psi\omega_Y) \\
 & - \cos\psi\frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) + \sin\psi\frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0 \\
 \cos\psi\left((I_{YY} - I_{ZZ})\omega_Y\omega_Z - \frac{d(I_{XX}\omega_X)}{dt}\right) + \sin\psi\left((I_{XX} - I_{ZZ})\omega_X\omega_Z + \frac{d(I_{YY}\omega_Y)}{dt}\right) & = 0
 \end{aligned} \tag{E.114}$$

という式に直せる。が、(E.27)から
 $\rightarrow$ p5

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X\sin\psi\sin\theta + I_{YY}\omega_Y\cos\psi\sin\theta + I_{ZZ}\omega_Z\cos\theta) = 0 \\
 & I_{XX}\omega_X(\dot{\psi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi\cos\theta) + I_{YY}\omega_Y(-\dot{\psi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\cos\theta) \\
 & - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\theta}\sin\theta + \sin\psi\sin\theta\frac{d(I_{XX}\omega_X)}{dt} + \cos\psi\sin\theta\frac{d(I_{YY}\omega_Y)}{dt} + \cos\theta\frac{d(I_{ZZ}\omega_Z)}{dt} = 0
 \end{aligned} \tag{E.115}$$

が出る。(7.39)を使って、
 $\rightarrow$ p180

$$\begin{aligned}
 & I_{XX}\omega_X\omega_Z\cos\psi - I_{YY}\omega_Y\omega_Z\sin\psi \\
 & - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\theta} + \sin\psi\frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) + \cos\psi\frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0
 \end{aligned} \tag{E.116}$$

上の式と、(E.113)の結果である

$$\begin{aligned}
 & -I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta + \cos\psi\left(I_{YY}\omega_Y\omega_Z - \frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X)\right) \\
 & + \sin\psi\left(I_{XX}\omega_X\omega_Z + \frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y)\right) = 0
 \end{aligned} \tag{E.117}$$

を、 $\cos\psi \times (E.116) + \sin\psi \times (E.117)$ と組み合わせると、

$$\begin{aligned}
 & -I_{ZZ}\omega_Z\dot{\theta}\cos\psi - I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + I_{XX}\omega_X\omega_Z + \frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0 \\
 & -I_{ZZ}\omega_Z\omega_X + I_{XX}\omega_X\omega_Z + \frac{d}{dt}(I_{YY}\omega_Y) = 0
 \end{aligned} \tag{E.118}$$

が出る。同様に、 $\sin \psi \times (E.116) - \cos \psi \times (E.117)$ と組み合わせると、

$$\begin{aligned} -I_{ZZ}\omega_Z\dot{\theta}\sin\psi + I_{ZZ}\omega_Z\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - I_{YY}\omega_Y\omega_Z + \frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) &= 0 \\ I_{ZZ}\omega_Z\omega_Y - I_{YY}\omega_Y\omega_Z + \frac{d}{dt}(I_{XX}\omega_X) &= 0 \end{aligned} \quad (E.119)$$

となり、欲しかった式が出てきた。

★【演習問題 7-3】の解答 (問題は p190、ヒントは p6w)

$$\begin{aligned} & i\dot{\phi}(I_{XX}\omega_X(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta) + I_{YY}\omega_Y(-\sin\psi + i\cos\psi\cos\theta) - iI_{ZZ}\omega_Z\sin\theta) \\ & + \frac{d(I_{XX}\omega_X)}{dt}(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta) + I_{XX}\omega_X(-\dot{\psi}\sin\psi + i\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta) \\ & + \frac{d(I_{YY}\omega_Y)}{dt}(-\sin\psi + i\cos\psi\cos\theta) + I_{YY}\omega_Y(-\dot{\psi}\cos\psi - i\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta) \\ & - i\frac{d(I_{ZZ}\omega_Z)}{dt}\sin\theta - iI_{ZZ}\omega_Z\dot{\theta}\cos\theta \\ = & I_{XX}\omega_X(i\dot{\phi}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\psi\cos\theta - \dot{\psi}\sin\psi + i\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta) \\ & + I_{YY}\omega_Y(-i\dot{\phi}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\cos\theta - \dot{\psi}\cos\psi - i\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta) \\ & + I_{ZZ}\omega_Z(\dot{\phi}\sin\theta - i\dot{\theta}\cos\theta) \\ & + (I_{YY} - I_{ZZ})\omega_Y\omega_Z(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta) \\ & + (I_{ZZ} - I_{XX})\omega_Z\omega_X(-\sin\psi + i\cos\psi\cos\theta) \\ & - i(I_{XX} - I_{YY})\omega_X\omega_Y\sin\theta \end{aligned} \quad (E.120)$$

この中の $I_{XX}\omega_X$ の係数を取り出すと、

$$\begin{aligned} & i\dot{\phi}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\psi\cos\theta - \dot{\psi}\sin\psi + i\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta \\ & - \omega_Z(-\sin\psi + i\cos\psi\cos\theta) - i\omega_Y\sin\theta \\ = & i\dot{\phi}\cos\psi - \cancel{(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\sin\psi} + i\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta - \cancel{i\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta} \\ & - (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(-\sin\psi + i\cos\psi\cos\theta) - i(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta)\sin\theta \\ = & i\dot{\phi}\cos\psi(1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \end{aligned} \quad (E.121)$$

$I_{YY}\omega_Y$ の係数は

$$\begin{aligned} & -i\dot{\phi}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\cos\theta - \dot{\psi}\cos\psi - i\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta - i\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta \\ & + \omega_Z(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta) + i\omega_X\sin\theta \\ = & -i\dot{\phi}\sin\psi - i\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta - \cancel{(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\psi} - \cancel{i\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta} \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\cos\psi + i\sin\psi\cos\theta) + i(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta)\sin\theta \\ = & -i\dot{\phi}\sin\psi(1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \end{aligned} \quad (E.122)$$

$I_{ZZ}\omega_Z$ の係数は

(21w)

$$\begin{aligned}
& \dot{\phi} \sin \theta - \dot{\mathbf{i}} \dot{\theta} \cos \theta - \omega_Y (\cos \psi + \mathbf{i} \sin \psi \cos \theta) + \omega_X (-\sin \psi + \mathbf{i} \cos \psi \cos \theta) \\
= & \dot{\phi} \sin \theta - \dot{\mathbf{i}} \dot{\theta} \cos \theta - \left(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \right) (\cos \psi + \mathbf{i} \sin \psi \cos \theta) \\
& + \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \right) (-\sin \psi + \mathbf{i} \cos \psi \cos \theta) = 0 \\
= & \dot{\phi} \sin \theta - \dot{\mathbf{i}} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\mathbf{i}} \dot{\theta} (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) \cos \theta - \dot{\phi} (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) \sin \theta = 0
\end{aligned}
\tag{E.123}$$

★【演習問題 7-4】の解答…………… (問題は p190、ヒントは p6w)
 ヒントに書いた式より、全ラグランジアンは

$$L = \frac{MR^2}{8} \left((\dot{\theta})^2 (1 + 4 \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right) + \frac{MR^2}{4} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 - MgR \sin \theta \quad (\text{E.124})$$

で、これから導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{MR^2}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \right) = 0 \quad (\text{E.125})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{MR^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\phi} + \frac{MR^2}{2} \cos \theta \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \right) = 0 \quad (\text{E.126})$$

$$\begin{aligned} & -MR^2 (\dot{\theta})^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{MR^2}{4} \cos \theta \sin \theta (\dot{\phi})^2 - \frac{MR^2}{2} \dot{\phi} \sin \theta \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) - MgR \cos \theta \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{MR^2}{4} (1 + 4 \cos^2 \theta) \dot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.127})$$

である。(E.125) より

$$\frac{MR^2}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) = C_1 (\text{定数}) \quad (\text{E.128})$$

として、(E.126) に代入し、

$$\frac{MR^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\phi} + C_1 \cos \theta = C_2 \quad \text{より} \quad \dot{\phi} = \frac{4(C_2 - C_1 \cos \theta)}{MR^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{E.129})$$

となるから、これを (E.127) に代入して、

$$\begin{aligned} & -MR^2 (\dot{\theta})^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{MR^2}{4} \cos \theta \sin \theta \left(\frac{4(C_2 - C_1 \cos \theta)}{MR^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \\ & - C_1 \left(\frac{4(C_2 - C_1 \cos \theta)}{MR^2 \sin^2 \theta} \right) \sin \theta - MgR \cos \theta \\ & = -2MR^2 \sin \theta \cos \theta (\dot{\theta})^2 + \frac{MR^2}{4} (1 + 4 \cos^2 \theta) \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{E.130})$$

であるが、 θ が一定になるのは、

$$\frac{4 \cos \theta}{MR^2 \sin^3 \theta} (C_2 - C_1 \cos \theta)^2 - \frac{4C_1 (C_2 - C_1 \cos \theta)}{MR^2 \sin \theta} - MgR \cos \theta = 0 \quad (\text{E.131})$$

が成り立つ時である。

★【演習問題 8-1】の解答 (問題は p204、ヒントは p6w)

$\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_1 + \vec{\epsilon}$ と同時に $\vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_2 + \frac{1}{\alpha} \vec{\epsilon}$ と並進しても、ラグランジアンは不変である。
よって、

$$\vec{\epsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_1} + \frac{1}{\alpha} \vec{\epsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_2} = \vec{\epsilon} \cdot \left(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + \frac{1}{\alpha} m_2 \dot{\vec{x}}_2 \right) \quad (\text{E.132})$$

が保存量となる。

★【演習問題 8-2】の解答 (問題は p204、ヒントは p6w)

保存量は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} y = \frac{x}{\dot{y}} - \frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} y \quad (\text{E.133})$$

である。保存することを確認しよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\dot{y}} - \frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} y \right) &= \frac{\dot{x}}{\dot{y}} + x \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{y}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} \right) y - \frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} \dot{y} \\ &= x \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{y}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} \right) y \end{aligned} \quad (\text{E.134})$$

であるが、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$-\frac{k}{y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{y}} \right) = 0, \quad -\frac{kx}{y^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} \right) = 0 \quad (\text{E.135})$$

の 2 本なので、これを使うと

$$x \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{y}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{(\dot{y})^2} \right) y = x \left(-\frac{k}{y} \right) - \left(-\frac{kx}{y^2} \right) y = 0 \quad (\text{E.136})$$

と確認できた。

★【演習問題 8-3】の解答 (問題は p204、ヒントは p6w)

ϵ_x に比例する部分を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega_x}{\epsilon_x} &= \frac{\delta \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \delta \psi \sin \psi + \delta \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \delta \psi \cos \psi \sin \theta + \dot{\phi} \delta \theta \sin \psi \cos \theta}{\epsilon_x} \\ &= \frac{-\dot{\phi} \sin \phi \cos \psi - \dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \sin \psi + \frac{d}{dt} (-\cot \theta \sin \phi) \sin \psi \sin \theta}{\epsilon_x} \\ &\quad + \frac{\dot{\phi} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\phi} \cos \phi \sin \psi \cos \theta}{\epsilon_x} \\ &= -\dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \sin \psi + \left(\dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin^2 \theta} - \dot{\phi} \cot \theta \cos \phi \right) \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.137})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega_y}{\epsilon_x} &= \frac{-\dot{\theta} \delta \sin \psi - \dot{\theta} \delta \psi \cos \psi + \delta \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\phi} \delta \psi \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \delta \theta \cos \psi \cos \theta}{\epsilon_x} \\ &= \frac{\dot{\phi} \sin \phi \sin \psi - \dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \cos \psi + \frac{d}{dt} (-\cot \theta \sin \phi) \cos \psi \sin \theta}{\epsilon_x} \\ &\quad - \frac{\dot{\phi} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \cos \phi \cos \psi \cos \theta}{\epsilon_x} \\ &= -\dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \cos \psi + \left(\dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\sin^2 \theta} - \dot{\phi} \cot \theta \cos \phi \right) \cos \psi \sin \theta + \dot{\phi} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.138})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\omega_z}{\epsilon_x} &= \frac{\delta\dot{\psi} + \delta\dot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\delta\theta\sin\theta}{\epsilon_x} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta} \right)^{\epsilon_x} + \frac{d}{dt} (-\cot\theta\sin\phi)\cos\theta - \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\
&= \dot{\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\theta} - \dot{\theta}\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} + \left(\dot{\theta}\frac{\sin\phi}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\cot\theta\cos\phi \right)\cos\theta - \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\
&= \dot{\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\theta} - \dot{\theta}\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dot{\theta}\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\frac{\cos^2\theta\cos\phi}{\sin\theta} - \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\
&= \dot{\phi}\cos\phi\frac{1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta} = 0
\end{aligned} \tag{E.139}$$

となり、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ がこの変換に対して不変なので、ラグランジアンも不変となる。

ϵ_y に関しても同様にいう。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\omega_x}{\epsilon_y} &= \frac{\delta\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\theta}\delta\psi\sin\psi + \delta\dot{\phi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\phi}\delta\psi\cos\psi\sin\theta + \dot{\phi}\delta\theta\sin\psi\cos\theta}{\epsilon_y} \\
&= \cancel{\dot{\phi}\cos\phi\cos\psi} + \dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\sin\psi + \frac{d}{dt}(\cot\theta\cos\phi)\sin\psi\sin\theta \\
&\quad - \cancel{\dot{\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\cos\psi\sin\theta} + \dot{\phi}\sin\phi\sin\psi\cos\theta \\
&= \dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\sin\psi + \left(-\dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\cot\theta\sin\phi \right)\sin\psi\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi\sin\psi\cos\theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{E.140}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\omega_y}{\epsilon_y} &= \frac{-\delta\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\theta}\delta\psi\cos\psi + \delta\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\phi}\delta\psi\sin\psi\sin\theta + \dot{\phi}\delta\theta\cos\psi\cos\theta}{\epsilon_y} \\
&= -\cancel{\dot{\phi}\cos\phi\sin\psi} + \dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\cos\psi + \frac{d}{dt}(\cot\theta\cos\phi)\cos\psi\sin\theta \\
&\quad + \cancel{\dot{\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\sin\psi\sin\theta} + \dot{\phi}\sin\phi\cos\psi\cos\theta \\
&= \dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\cos\psi + \left(-\dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\cot\theta\sin\phi \right)\cos\psi\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi\cos\psi\cos\theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{E.141}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\omega_z}{\epsilon_y} &= \frac{\delta\dot{\psi} + \delta\dot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\delta\theta\sin\theta}{\epsilon_y} \\
&= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\cos\phi}{\sin\theta} \right)^{\epsilon_y} + \frac{d}{dt}(\cot\theta\cos\phi)\cos\theta - \dot{\phi}\sin\phi\cos\theta \\
&= \dot{\phi}\frac{\sin\phi}{\sin\theta} + \dot{\theta}\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} + \left(-\dot{\theta}\frac{\cos\phi}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\cot\theta\sin\phi \right)\cos\theta - \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\
&= \dot{\phi}\frac{\sin\phi}{\sin\theta} + \dot{\theta}\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dot{\theta}\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dot{\phi}\frac{\cos^2\theta\sin\phi}{\sin\theta} - \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\
&= \dot{\phi}\sin\phi\frac{1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta} = 0
\end{aligned} \tag{E.142}$$

ϵ_z に関しては、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は $\dot{\phi}$ を含むが ϕ そのものを含んでいないので、 $\phi \rightarrow \phi + \epsilon_z$ という定数のずらしで変化しない。

ϵ_x の変換に対応する保存量を計算しよう。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \delta \theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi \\
&= (I_{XX} \omega_X \cos \psi - I_{YY} \omega_Y \sin \psi) \cos \phi \\
&\quad - (I_{XX} \omega_X \sin \psi \sin \theta + I_{YY} \omega_Y \cos \psi \sin \theta + I_{ZZ} \omega_Z \cos \theta) \cot \theta \sin \phi \\
&\quad + I_{ZZ} \omega_Z \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\
&= I_{XX} (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi) + I_{YY} (-\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \\
&\quad + I_{ZZ} \underbrace{\frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\sin \theta}}_{\sin \theta} \sin \phi
\end{aligned} \tag{E.143}$$

これは(7.48)の L_x である。

→ p183

次に ϵ_y の変換に対する保存量は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \delta \theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi \\
&= (I_{XX} \omega_X \cos \psi - I_{YY} \omega_Y \sin \psi) \sin \phi \\
&\quad + (I_{XX} \omega_X \sin \psi \sin \theta + I_{YY} \omega_Y \cos \psi \sin \theta + I_{ZZ} \omega_Z \cos \theta) \cot \theta \cos \phi \\
&\quad - I_{ZZ} \omega_Z \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \\
&= I_{XX} (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi) + I_{YY} (-\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi) \\
&\quad - I_{ZZ} \underbrace{\frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\sin \theta}}_{\sin \theta} \cos \phi
\end{aligned} \tag{E.144}$$

であり、これは(7.49)の L_y である。

→ p183

最後に ϵ_z による部分だが、これは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_{XX} \omega_X \sin \psi \sin \theta + I_{YY} \omega_Y \cos \psi \sin \theta + I_{ZZ} \omega_Z \cos \theta \tag{E.145}$$

となって確かに(7.50)の L_z である。

→ p183

★【演習問題 9-1】の解答 (問題は p241、ヒントは p7w)

直交座標のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} ((p_x)^2 + (p_y)^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \quad (\text{E.146})$$

正準方程式は

$$\frac{dp_x}{dt} = -kx, \quad \frac{dp_y}{dt} = -ky, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m} \quad (\text{E.147})$$

極座標のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_r)^2 + \frac{(p_\theta)^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2}kr^2 \quad (\text{E.148})$$

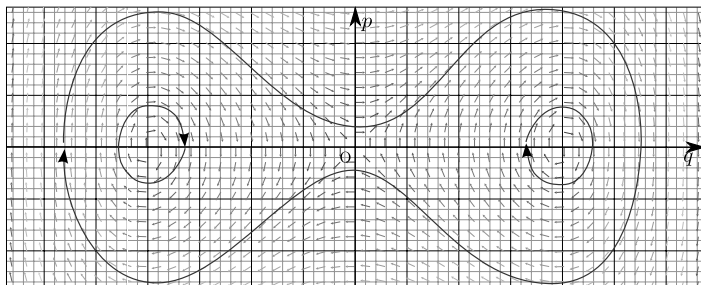
正準方程式は

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{(p_\theta)^2}{mr^3} - kr, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (\text{E.149})$$

である。 p_x, p_y, p_r, p_θ という 4 種類の運動量のうち、 p_θ のみが保存量になっている (θ は循環座標である)。

★【演習問題 9-2】の解答 (問題は p242)

おおざっぱに、3つの運動に分けられる。



★【演習問題 9-3】の解答 (問題は p242、ヒントは p7w)

ヒントに書いた積分より、

$$|x| = \frac{1}{4}(t - t_0)^2 \quad (\text{E.150})$$

がこの微分方程式の解になっている。右辺は $t = t_0$ において 0 になるから、初期条件として「 $t = t_0$ で $x = 0$ 」を置いた時、「恒等的に 0」も解ならば、

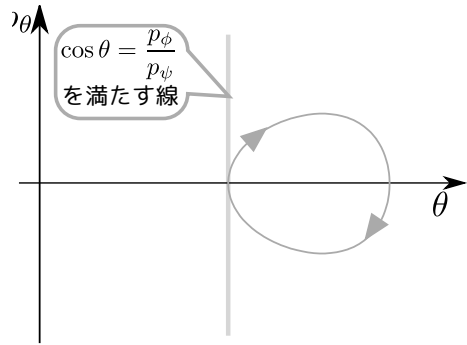
$$x = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ \frac{1}{4}(t - t_0)^2 & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{E.151})$$

も解である。つまり解は一意的でない。それは $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{|x|}$ という方程式がリプシッツ連続の条件を満たしていないからである。

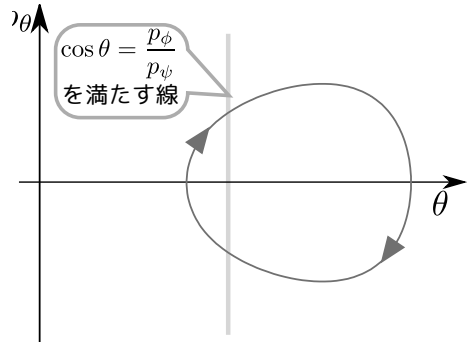
★【演習問題 9-4】の解答..... (問題は p242、ヒントは p7w)

ヒントで (1) の場合を考えたので、ここではまず (2) の場合を考えよう。

この場合はある一点において $\dot{\phi}$ が 0 になるから「一瞬だけ、 ϕ 方向の運動が止まる (その時は θ が最小値)」という運動をする。つまりこの場所では θ 方向に動いていったん止まりまた戻る (地球上の運動としてみれば「北上していったん静止し、すぐに南下する」ような運動) を定期的に繰り返しつつ、 ϕ 方向の回転が続く。

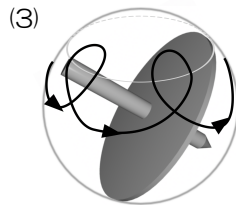
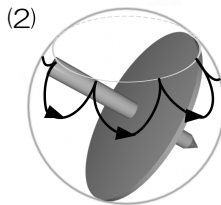
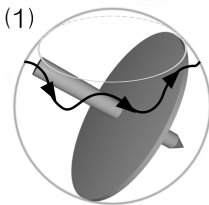


最後の (3) の場合は、グラフで $\cos \theta = \frac{p_\phi}{p_\psi}$ を満たす線より左側にも行く。その時は $\dot{\phi}$ が p_ψ と逆符号になる。 $p_\psi > 0$ で考えると「逆回りをする」ということである。



この場合の運動では ϕ がほとんどの間は正方向に回るのだが、 $\cos \theta = \frac{p_\phi}{p_\psi}$ より θ が小さいところでは逆に運動するということになる。

略図を描いてみると、次の通りである (あくまで概略図で、ちゃんと計算したものではない)。



★【演習問題 10-1】の解答..... (問題は p278)

計算すべきは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial p_r} & \frac{\partial x}{\partial p_\theta} & \frac{\partial x}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial p_r} & \frac{\partial y}{\partial p_\theta} & \frac{\partial y}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial p_r} & \frac{\partial z}{\partial p_\theta} & \frac{\partial z}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \phi} & \frac{\partial r}{\partial p_r} & \frac{\partial r}{\partial p_\theta} & \frac{\partial r}{\partial p_\phi} \end{vmatrix} \quad (E.152)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial r} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta} & \frac{\partial p_x}{\partial \phi} & \frac{\partial p_x}{\partial p_r} & \frac{\partial p_x}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_x}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial p_y}{\partial r} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta} & \frac{\partial p_y}{\partial \phi} & \frac{\partial p_y}{\partial p_r} & \frac{\partial p_y}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_y}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial p_z}{\partial r} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta} & \frac{\partial p_z}{\partial \phi} & \frac{\partial p_z}{\partial p_r} & \frac{\partial p_z}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_z}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \phi} & \frac{\partial r}{\partial p_r} & \frac{\partial r}{\partial p_\theta} & \frac{\partial r}{\partial p_\phi} \end{vmatrix}$$

であるが、これも 365 ページの脚注に書いたように、右上の $\frac{\partial x}{\partial p_r}$ などを含む部分は 0 となり、行列式の基本変形を使うことで左下の部分も計算から関係なくなり、ブロック対角行列となるので行列式は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \phi} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial p_r} & \frac{\partial p_x}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_x}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial p_y}{\partial p_r} & \frac{\partial p_y}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_y}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial p_z}{\partial p_r} & \frac{\partial p_z}{\partial p_\theta} & \frac{\partial p_z}{\partial p_\phi} \\ \frac{\partial r}{\partial p_r} & \frac{\partial r}{\partial p_\theta} & \frac{\partial r}{\partial p_\phi} \end{vmatrix} \quad (E.153)$$

を計算すればよいが、

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad (E.154)$$

という座標変換の関係がある。 $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_j}$ という関係があるので、上の $\frac{\partial}{\partial r}$ などと

$\frac{\partial}{\partial x}$ などとの関係は、それぞれに $\cdot$ をつけても成立する。よって、

$$\begin{cases} p_r = p_x \sin \theta \cos \phi + p_y \sin \theta \sin \phi + p_z \cos \theta \\ p_\theta = p_x r \cos \theta \cos \phi + p_y r \cos \theta \sin \phi - p_z r \sin \theta \\ p_\phi = -p_x r \sin \theta \sin \phi + p_y r \sin \theta \cos \phi \end{cases} \quad (E.155)$$

が成り立つ。逆は

(29w)

$$\begin{cases} p_x = p_r \sin \theta \cos \phi + \frac{p_\theta}{r} \cos \theta \cos \phi - \frac{p_\phi}{r \sin \theta} \sin \phi \\ p_y = p_r \sin \theta \sin \phi + \frac{p_\theta}{r} \cos \theta \sin \phi + \frac{p_\phi}{r \sin \theta} \cos \phi \\ p_z = p_r \cos \theta - \frac{p_\theta}{r} \sin \theta \end{cases} \quad (\text{E.156})$$

これを使って行列式を計算すれば、

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}_{r^2 \sin \theta} \times \underbrace{\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi & -\frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi & \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi \\ \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}_{\frac{1}{r^2 \sin \theta}} \quad (\text{E.157})$$

となって答えは1である。

★【演習問題 10-2】の解答 (問題は p278、ヒントは p7w)
(10.95)から導かれる正準方程式は
→ p269

$$\dot{Q} = \frac{\tilde{P}}{m}, \quad \dot{\tilde{P}} = -\left(k - \frac{K^2}{4m}\right) Q \quad (\text{E.158})$$

$k - \frac{K^2}{4m} = 0$ の時、 $\dot{\tilde{P}} = 0$ になるから、 $\tilde{P} = (\text{定数})$ だから $\dot{Q} = (\text{定数})$ であり、

$$Q = At + B \quad \text{よって、} \quad q = (At + B)e^{-\frac{K}{2m}t} \quad (\text{E.159})$$

となる ($q = Qe^{-\frac{K}{2m}t}$ というのが q と Q の関係であった)。
→ p268

$k - \frac{K^2}{4m} \neq 0$ の時は、

$$\ddot{Q} = \frac{K^2 - 4mk}{4m^2} Q \quad (\text{E.160})$$

となるから、

$$Q = A_+ e^{\frac{\sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}t} + A_- e^{-\frac{\sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}t} \quad (\text{E.161})$$

が解になる。このとき q は

$$q = A_+ e^{\frac{-K + \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}t} + A_- e^{\frac{-K - \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}t} \quad (\text{E.162})$$

であるが、これはヒントに書いた(E.40)と全く同じ式である。
→ p8

★【演習問題 10-3】の解答 (問題は p278、ヒントは p8w)

まずヒントの続きを計算すると、

$$\begin{aligned}\{Q_j, Q_k\}_{q,p} &= \{q_j, q_k\} + \epsilon \left(\{q_j, \{q_k, \mathcal{G}\}\} + \{\{q_j, \mathcal{G}\}, q_k\} \right) \\ &= \underbrace{\{q_j, q_k\}}_0 - \epsilon \left(\underbrace{\left\{ \mathcal{G}, \{q_j, q_k\} \right\}}_0 \right) = 0\end{aligned}\quad (\text{E.163})$$

となり、0 である。 $\{P_j, P_k\}$ に関しては全く同様に 0 となる。最後に、

$$\begin{aligned}\{Q_j, P_k\}_{(q,p)} &= \{q_j, p_k\} + \epsilon \left(\{q_j, \{p_k, \mathcal{G}\}\} + \{\{q_j, \mathcal{G}\}, p_k\} \right) \\ &= \underbrace{\{q_j, p_k\}}_{\delta_{jk}} - \epsilon \left(\underbrace{\left\{ \mathcal{G}, \{q_j, p_k\} \right\}}_{\delta_{jk}} \right) = \delta_{jk}\end{aligned}\quad (\text{E.164})$$

δ_{jk} は定数であるから、何とポアッソン括弧を取っても 0 であることに注意しよう。

★【演習問題 11-1】の解答 (問題は p296)

単振動であるから解は $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ となるが、 $t = 0$ で $x(0) = 0$ より $B = 0$ が決まり、 $t = t_1$ で $x(t_1) = x_1$ により

$$x_1 = A \sin \omega t_1 \quad (\text{E.165})$$

となるので、 $x(t) = x_1 \frac{\sin \omega t}{\sin \omega t_1}$ となる。作用にこれを代入すると、

$$\begin{aligned}& \int_0^{t_1} dt \left(\frac{m}{2} \left(x_1 \omega \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t_1} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} \left(x_1 \frac{\sin \omega t}{\sin \omega t_1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{(x_1)^2 m \omega^2}{2 \sin^2 \omega t_1} \int_0^{t_1} dt (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \\ &= \frac{(x_1)^2 m \omega^2}{2 \sin^2 \omega t_1} \int_0^{t_1} dt \cos 2\omega t = \frac{(x_1)^2 m \omega}{4 \sin^2 \omega t_1} \sin 2\omega t_1 = \frac{(x_1)^2 m \omega}{2} \cot \omega t_1\end{aligned}\quad (\text{E.166})$$

となる。ハミルトン・ヤコビ方程式を確認する。

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_1} = x_1 m \omega \cot \omega t_1 \quad (\text{E.167})$$

より、

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1)^2 = \frac{m(x_1)^2 \omega^2}{2} (\cot^2 \omega t_1 + 1) = \frac{m(x_1)^2 \omega^2}{2 \sin^2 \omega t_1} \quad (\text{E.168})$$

一方、

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t_1} = -\frac{(x_1)^2 m \omega^2}{2} \times \frac{1}{\sin^2 \omega t_1} \quad (\text{E.169})$$

であるから、ハミルトン・ヤコビ方程式は成り立っている。

★【演習問題 11-2】の解答 (問題は p297、ヒントは p8w)

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{(A_x)^2}} dx = A_x \left(\frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\Theta \right) + C \quad (\text{E.170})$$

となる。これを公式として積分することで、

$$W = \pm \frac{2E_x}{\omega} \left(\frac{\Theta_x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\Theta_x \right) \pm \frac{2E_y}{\omega} \left(\frac{\Theta_y}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\Theta_y \right) + C \quad (\text{E.171})$$

と、 W が求められる (積分定数は一つにまとめた)。

これが極座標のハミルトン・ヤコビ方程式を満たしていることを示したいので、 $\frac{\partial \Theta_x}{\partial r}$ などを計算する。

$x = r \cos \theta = A_x \sin \Theta_x$ という式を、 r, θ で微分することで

$$\cos \theta = \frac{\partial \Theta_x}{\partial r} A_x \cos \Theta_x, \quad -r \sin \theta = \frac{\partial \Theta_x}{\partial \theta} A_x \cos \Theta_x \quad (\text{E.172})$$

がわかる。同様に $y = r \sin \theta = A_y \sin \Theta_y$ を微分することで

$$\sin \theta = \frac{\partial \Theta_y}{\partial r} A_y \cos \Theta_y, \quad r \cos \theta = \frac{\partial \Theta_y}{\partial \theta} A_y \cos \Theta_y \quad (\text{E.173})$$

がわかる。これを使って W の微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \pm \frac{2E_x}{\omega} \underbrace{\frac{\cos \theta}{A_x \cos \Theta_x}}_{\frac{\partial \Theta_x}{\partial r}} \left(\frac{1 + \cos 2\Theta_x}{2} \right) \pm \frac{2E_y}{\omega} \underbrace{\frac{\sin \theta}{A_y \cos \Theta_y}}_{\frac{\partial \Theta_y}{\partial r}} \left(\frac{1 + \cos 2\Theta_y}{2} \right) \\ &= \pm \frac{2E_x}{A_x \omega} \cos \theta \cos \Theta_x \pm \frac{2E_y}{A_y \omega} \sin \theta \cos \Theta_y \end{aligned} \quad (\text{E.174})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \pm \frac{2E_x}{\omega} \underbrace{\frac{-r \sin \theta}{A_x \cos \Theta_x}}_{\frac{\partial \Theta_x}{\partial \theta}} \left(\frac{1 + \cos 2\Theta_x}{2} \right) \pm \frac{2E_y}{\omega} \underbrace{\frac{r \cos \theta}{A_y \cos \Theta_y}}_{\frac{\partial \Theta_y}{\partial \theta}} \left(\frac{1 + \cos 2\Theta_y}{2} \right) \\ &= r \left(\mp \frac{2E_x}{A_x \omega} \sin \theta \cos \Theta_x \pm \frac{2E_y}{A_y \omega} \cos \theta \cos \Theta_y \right) \end{aligned} \quad (\text{E.175})$$

ここで、 $2E_x = k(A_x)^2, 2E_y = k(A_y)^2$ を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \pm \frac{kA_x}{\omega} \cos \theta \cos \Theta_x \pm \frac{kA_y}{\omega} \sin \theta \cos \Theta_y \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= r \left(\mp \frac{kA_x}{\omega} \sin \theta \cos \Theta_x \pm \frac{kA_y}{\omega} \cos \theta \cos \Theta_y \right) \end{aligned} \quad (\text{E.176})$$

となり、これから

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 &= \frac{(kA_x \cos \Theta_x)^2}{\omega^2} + \frac{(kA_y \cos \Theta_y)^2}{\omega^2} \\
&= \frac{k^2(A_x)^2}{\omega^2} - \frac{\overbrace{(k^2 A_x \sin \Theta_x)^2}^x}{\omega^2} + \frac{k^2(A_y)^2}{\omega^2} - \frac{\overbrace{(k^2 A_y \sin \Theta_y)^2}^y}{\omega^2} \\
&= \frac{k^2(A_x)^2}{\omega^2} + \frac{k^2(A_y)^2}{\omega^2} - \frac{\overbrace{k^2(x^2 + y^2)}^{r^2}}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{E.177}$$

となり、両辺を $2m$ で割って、 $m\omega^2 = k$ を使うと、

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \underbrace{\frac{k}{2}(A_x)^2}_{E_x} + \underbrace{\frac{k}{2}(A_y)^2}_{E_y} - \frac{k}{2}r^2 \tag{E.178}$$

となって、確かに直交座標の解は極座標のハミルトン・ヤコビ方程式の解になっている。

★【演習問題 11-3】の解答…………… (問題は p297、ヒントは p8w)

ヒントに書いた速度変化 $v \rightarrow v - \frac{uv\Delta t}{L}$ が起こる間に壁と壁の距離は $L \rightarrow L + u\Delta t$ と変化する。位相空間の面積は

$$mvL \rightarrow m \left(v - \frac{uv\Delta t}{L} \right) (L + u\Delta t) = \frac{mv}{L} (L - u\Delta t)(L + u\Delta t) = mvL + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \tag{E.179}$$

となり、時間変化しないことがわかる。