付録 D

章末演習問題のヒント

★【演習問題 1-1 】 .... (問題は p43、解答は p9w)

図からわかるように、

$$\vec{E} = \int_{x\tan\alpha}^{x\tan\beta} \frac{\rho \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(x\vec{\mathbf{e}}_x - z\vec{\mathbf{e}}_z\right) \tag{D.1}$$

という積分をやればよい。これも $z = x\tan\theta$ として、角度積分にすると楽になる。

角度が α と β の中間になることは、実際に計算しなくても、積分前の形を見て判断することができる。

★【演習問題 1-2 】 .... (問題は p43、解答は p10w)

1.5.3 節の結果は「単位面積あたり σ の電荷がある球殻」の場合の電場であるから、r を積分変数として、厚さ $\mathrm{d}r$ の球殻を考える。その球殻に単位体積あたり ρ の電荷があるということは、単位面積あたり $\rho\mathrm{d}r$ の電荷があるということ。r を 0 から球の半径まで積分すればよい。

→ p38

★【演習問題 1-3 】 .... (問題は p44、解答は p10w)

問題文の (2) にある、「電荷 1 しかなかった時の円 A を通る電気力線の本数」は、$\dfrac{q_1}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta_1)$ である。この式を使って「円をいかに動かしても電気力線の本数が一定である」という条件から、$q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$ の間にはどんな関係があるかを求めればよい。

★【演習問題 2-1 】 .... (問題は p75、解答は p11w)

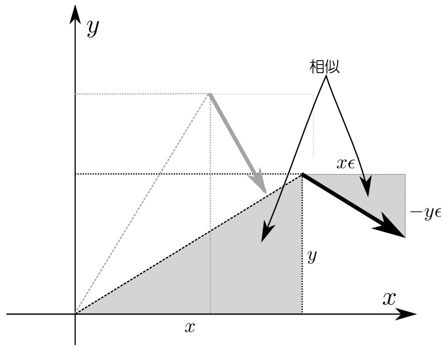
対称性から、電場は全て z 軸から離れる方向(ρ 方向)を向く。よって、底面の半径が ρ で、高さが Δz である仮想的な円柱を考えると、電気力線は円柱の天井と底面からは抜けず、側面のみを貫く。電場の強さ (対称性から r のみの関数となる) を $E(\rho)$ と置いて、ガウスの法則を使おう。

★【演習問題 2-2 】 .... (問題は p75、解答は p11w)

まずは div $\vec{E}$ を計算して電荷密度を出す。電荷密度が ∞ になることは許されない。

★【演習問題 2-3 】 . . . . (問題は p75、解答は p11w)

電気力線が $x\vec{\mathbf{e}}_x - y\vec{\mathbf{e}}_y$ と書けるということは、右の図のように電気力線の向きが表現できる、ということである（灰色で示した二つの三角形が相似になることに注意）。この線をどんどん延ばしていくとどんな線ができるかを考えてみるとよい。



方程式を作るには、電気力線の傾きが $\dfrac{-y}{x}$ と表現されるということだから、微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y}{x}$ を解く。

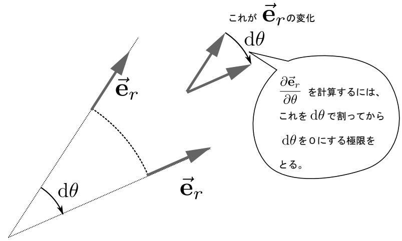
$-y\vec{\mathbf{e}}_x + x\vec{\mathbf{e}}_y$ も、同様に図を描いてみるとどんな線なのかが分かるが、それは静電場としては有り得ない物になるはずである。

★【演習問題 2-4 】 . . . . (問題は p75、解答は p12w)

直交座標では $\vec{E} = \left(\dfrac{\rho x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}, \dfrac{\rho y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}, 0\right)$ となる。

★【演習問題 2-5 】 . . . . (問題は p76、解答は p12w)

方法は二つある。



(1) 図を描いてベクトルがどう変化するかを考える。例えば $\vec{\mathbf{e}}_r$ を θ で微分する場合であれば、右の図のように、θ を $\mathrm{d}\theta$ 変化させた時、その場所の $\vec{\mathbf{e}}_r$ がどれだけ違う方向を向いているかを考え、$\mathrm{d}\theta \to 0$ の極限を考える。

(2) 極座標の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_\phi$ を定ベクトルである $\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$ を使って表現すると、(A.2) → p300 という式になる。これを微分する。$\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$ は微分する必要がない（微分しても 0）ということに注意。

★【演習問題 2-6 】 . . . . (問題は p76、解答は p14w)

これも図で考える方法と、基底ベクトルを $\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$ で表してから微分する方法がある。基底ベクトルに関する式は(A.3) → p300 から (A.5) までを見よ。

★【演習問題 3-1 】 . . . . (問題は p131、解答は p14w)

(a) 電場を求めるには $\vec{E} = -\mathrm{grad}\ V$ を使う。この場合 V は y, z によらないので、grad は x 微分だけを考えれば充分。

(b) 二つの方法とは、「ガウスの法則を使う」と「ポアッソン方程式を使う」。

★【演習問題 3-2 】 . . . . (問題は p131、解答は p14w)

rot $\vec{E} = 0$ になっているかどうかをチェックしよう。

★【演習問題 3-3 】 . . . . (問題は p131、解答は p15w)

対称性から明らかに電位は θ, z によらないから、この場合のポアッソン方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rV(r)\right)=-\frac{(\text{電荷密度})}{\varepsilon_0} \tag{D.2}$$

である。

★【演習問題 3-4 】 .... (問題は p131、解答は p16w)

極大値をとる場所があったとする。そこを取り囲むように閉曲面を設定すると ?? —電場はどうなるだろう？

★【演習問題 3-5 】 .... (問題は p132、解答は p17w)

球対称な問題だから、電位は $V(r)$ と r のみの関数になると考えていいし、電場は $\vec{E}=E(r)\vec{\mathbf{e}}_r$ と r 方向を向いて r のみの関数となる。

★【演習問題 3-6 】 .... (問題は p132、解答は p17w)

ラプラス方程式の解であることを示すのは、代入して素直に計算すればよい。後半の x 方向を向いた場合については、$x=r\sin\theta\cos\phi$ という式を使おう。

★【演習問題 3-7 】 .... (問題は p132、解答は p18w)

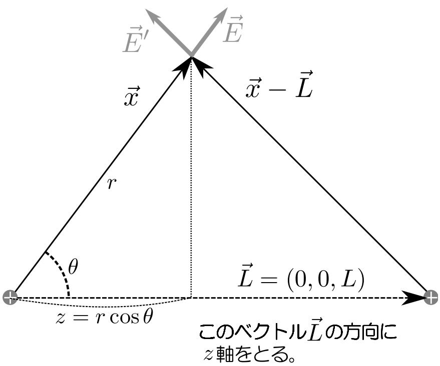
電場の合成の結果、今度は面に平行な成分が残るから、$2\times\dfrac{q\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\times\sin\theta$ となる（最後が $\cos\theta\to\sin\theta$ に変わる）。これを自乗して $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0$ をかけて面積分する。

★【演習問題 3-8 】 .... (問題は p132、解答は p19w)

計算すべき量は

$$\vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{E}'(\vec{x})=\frac{qq'}{(4\pi\varepsilon_0)^2|\vec{x}-\vec{x}_{q'}|^3|\vec{x}-\vec{x}_q|^3}(\vec{x}-\vec{x}_q)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_{q'}) \tag{D.3}$$

である。



電荷 q のいる位置を原点にすることにして、$\vec{x}_q=\vec{0},\vec{x}_{q'}=\vec{L}$ とおいて、

$$\vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{E}'(\vec{x})=\frac{qq'}{(4\pi\varepsilon_0)^2|\vec{x}|^3|\vec{x}-\vec{L}|^3}\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{L}) \tag{D.4}$$

となる。図のようにベクトルを設定する。$\vec{L}$ の向いている方向に z 軸を取ると、$\vec{L}$ と $\vec{x}$ の角度は極座標の θ となる。$\vec{x}$ の長さは極座標の r であるから $|\vec{x}|=r$ と書く。図で解るように、$\vec{x}$ と $\vec{L}$ の内積を取ると（$\vec{x}$ の $\vec{L}$ 方向への射影は z であるから）$\vec{x}\cdot\vec{L}=zL$ となる。

$$|\vec{x}-\vec{L}|^2=|\vec{x}|^2-2\vec{x}\cdot\vec{L}+|\vec{L}|^2=r^2-2zL+L^2 \tag{D.5}$$

と計算できる。これらの式を (D.4) に代入し、極座標で全空間積分する。

★【演習問題 4-1 】 .... (問題は p154、解答は p20w)

導体内は常に等電位になる。つまり、球殻表面は等電位。

★【演習問題 4-2 】 .... (問題は p154、解答は p20w)

電場の法線ベクトル方向の成分を $\vec{E}_\perp$、面と平行な成分を $\vec{E}_\parallel$ とする（電束密度も同様に $\vec{D}_\perp, \vec{D}_\parallel$ を定義する）。境界条件を考えると、$\vec{D}_\perp$ と $\vec{E}_\parallel$ が接続される。

★【演習問題 4-3 】 .... (問題は p154、解答は p20w)

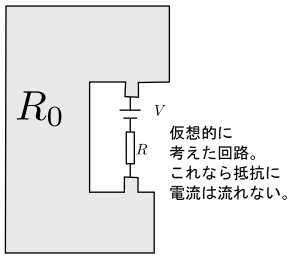
一様に帯電した球の作る電位は、

$$
\begin{aligned}
\text{球外部}: V &= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\text{球内部}: V &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho(x^2+y^2+z^2)}{6\varepsilon_0}
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

となる。分極 $\vec{P}$ を作るには、正に帯電した球と負に帯電した球を少しだけずらせて重ねるとよい。

★【演習問題 5-1 】 .... (問題は p172、解答は p21w)

抵抗 R をつなぐのではなく、起電力 V の電池と抵抗 R を直列にしてつないだと仮定しよう。この場合、元々あった AB 間の電位差をちょうど電池の起電力が打ち消すので、抵抗 R に電流は流れず、回路をつなぐ前と全く状況は同じである。こうしておいた後で、電池を取り去ると ??



★【演習問題 5-2 】 .... (問題は p172、解答は p21w)

定常電流が流れているということは、断面積が等しい 2 種類の金属で電流密度は等しい。一方、$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ という式があるから電場の強さは変化する。境界面を含むような閉曲面でガウスの法則を使うと境界面にある電荷がわかる。

★【演習問題 6-1 】 .... (問題は p182、解答は p22w)

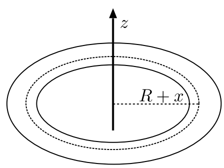
磁石もなんらかの「電流」によって作られるとして、磁石がある時にはそこにどのような電流があるのかを考える。その電流は問題の図に書き込まれている。

★【演習問題 7-1 】 .... (問題は p193、解答は p22w)

$\vec{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y$ を使う。$\cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ である。

★【演習問題 7-2 】 .... (問題は p193、解答は p22w)

図のように、z 軸から $R+x$ 離れた場所を考えよう。図の半径 $R+x$ の円を考えると、対称性から、この円の上では磁場の強さは一様である。また、磁束が外に漏れていないことから、磁場はこの円に沿った方向にしかできない。よってこの円に対してアンペールの法則を適用すると、磁場の強さを H とすると $2\pi(R+x)H$ が円の内部を通る電流になる。



★【演習問題 7-3 】 .... (問題は p193、解答は p22w)

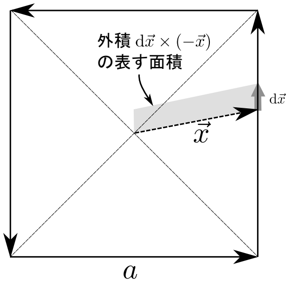
前半に関してはストークスの定理→ p304を素直に適用すればよい。後半については、電流がどの面で計算しても同じ、ということが数式でどのように表現されるかを考えればよい。

★【演習問題 8-1 】 .... (問題は p213、解答は p23w)

ビオ・サバールの法則を使って考えると、直線部分では電流 $I\mathrm{d}\vec{x}'$ の方向と、$\vec{x}-\vec{x}'$ が同

じ方向になる。よって外積が 0 になる。計算すべきは半円形の部分だけである。

★【演習問題 8-2 】 .... （問題は p213、解答は p23w）

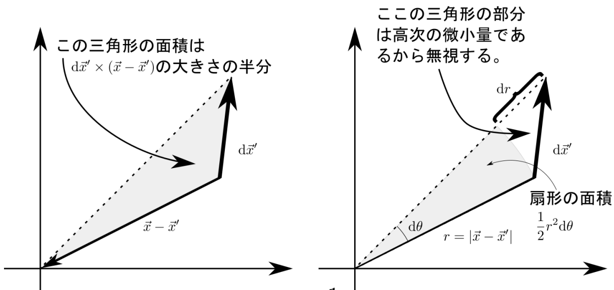


座標原点を正方形の中心に取ろう。微小な電流素片の位置ベクトルを $\vec{x}$、電流素片を $I\mathrm{d}\vec{x}$ とすると、ビオ・サバールの法則により、

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{正方形}}\frac{\mathrm{d}\vec{x}\times(-\vec{x})}{|\vec{x}|^3} \tag{D.7}$$

となる。外積を取った結果は、全て紙面裏から表へ向かう向きのベクトルになる。同じ方向のベクトルになるのだから、４つの辺の作る磁場はみな同じであり、一辺分を計算してから 4 倍すればよい。

★【演習問題 8-3 】 .... （問題は p213、解答は p23w）



$x=0, y=a$ を中心とした２次元極座標で考えると、$\mathrm{d}\vec{x}'\times(\vec{x}-\vec{x}')$ の大きさは右の図に描いた三角形の面積の２倍である。また、その三角形の面積は、さらに右の図に描いた扇形の面積 $\dfrac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$ と、ほぼ等しい（扇形と三角形の面積の差は、$\dfrac{1}{2}\mathrm{d}r\times r\mathrm{d}\theta$ 程度で、二次の微小量）。よって、$\mathrm{d}\vec{x}'\times(\vec{x}-\vec{x}')$ の大きさを $r^2\mathrm{d}\theta$ として考えてよい。

★【演習問題 8-4 】 .... （問題は p214、解答は p24w）

問題文の最後に書いたように、積分変数を $Z=z-z'$ とすると、

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0 nI}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Z\int\frac{R\mathrm{d}\phi\left(Z\vec{\mathbf{e}}_r-x\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_z+R\vec{\mathbf{e}}_z\right)}{(Z^2+R^2+x^2-2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.8}$$

という積分をすることになるが、分母は Z に関して偶関数だから、分子にある $Z\vec{\mathbf{e}}_r$ は積分すると消える。磁場は z 成分しかないことになり、

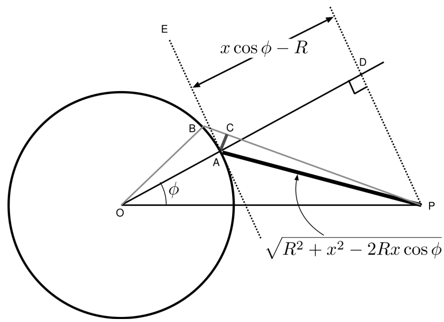
$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0 nI}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\frac{R\left(-x\cos\phi+R\right)\vec{\mathbf{e}}_z}{(Z^2+R^2+x^2-2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.9}$$

$Z=\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\phi}\tan\theta$ と変数変換して、$\mathrm{d}Z=\dfrac{\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\phi}}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$ を使うと、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}Z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{R\left(-x\cos\phi + R\right)\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(Z^2+R^2+x^2-2Rx\cos\phi\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \frac{\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\phi}}{\cos^2\theta} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{R\left(-x\cos\phi + R\right)\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(\left(R^2+x^2-2Rx\cos\phi\right)\underbrace{\left(1+\tan^2\theta\right)}_{=\frac{1}{\cos^2\theta}}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\ \cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{R\left(-x\cos\phi + R\right)\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(R^2+x^2-2Rx\cos\phi\right)}
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

のように計算が進む。θ 積分は容易である。

ϕ に関する積分は少々面倒に思えるが、この式の背後にある図形的意味を考えると、あっという間にできる。実はこの $\mathrm{d}\phi \dfrac{R\left(-x\cos\phi+R\right)\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(R^2+x^2-2Rx\cos\phi\right)}$ という量は「半径 R の円運動している車を、円の中心から x 離れたところで人がじっと注視している。車が $\mathrm{d}\phi$ だけ回る間に、この人はどれだけの角度目線を動かさなくてはいけないか」という問題の答なのである。



なぜそうなるのかは純粋に図形の問題なので、右の図を見て考えるとわかる。AB は車の移動で、長さ $R\mathrm{d}\phi$ である。この時 P 点にいる人の目線の動く角度は、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AP}}$ である。$\mathrm{AP} = \sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\phi}$ であり、$\mathrm{AD} = x\cos\phi - R$ である。後は、三角形 ABC と三角形 APD が（AB が微小であるという近似のもとに）相似であることを使うと、

$$
\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \times \frac{x\cos\phi - R}{\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\phi}} \tag{D.11}
$$

となるので、

$$
\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AP}} = R\mathrm{d}\phi \frac{x\cos\phi - R}{R^2+x^2-2Rx\cos\phi} \tag{D.12}
$$

となる。計算においては「弧」であって曲線であるところの AB は（角度 $\mathrm{d}\phi$ が微小なので）直線と考えた。この意味がわかれば、積分結果もわかってくる。

★【演習問題 9-1 】 .... （問題は p234、解答は p24w）

電場の力は x 方向、磁場の力は y 方向に垂直だから、電場を $(E,0,0)$、磁束密度を $(0,B,0)$ として、$q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ に素直に代入すればよい。力は y 方向には働かない。よって、v_y はずっと 0 のままであることはすぐわかる。運動方程式を解くには、v_x, v_z の式から、どちらか一方を消す。そのためには運動方程式の一方を時間微分してみるとよい。

★【演習問題 9-2 】 .... （問題は p234、解答は p26w）

たてた運動方程式は x, y が混ざった式になっているが、$x+\mathrm{i}y$ という組み合わせを作ることで一つの式にまとめられる。

★【演習問題 9-3 】 .... （問題は p235、解答は p27w）

(1) 図の円筒に関するガウスの法則を考えよう。底面と側面から磁束が入り、天井に抜ける。底面と天井に関しては磁束密度の z 成分だけを、側面に関しては磁束密度の z 軸と垂直な成分だけを考えればよい。

(2) 働く力は $qv_\perp B_\perp$ であり、向きは $-z$ 方向。これは $v_\parallel$ を減速する力。

(3) さらに $qv_\parallel B_\perp$ という力が働くが、これは $v_\perp$ を加速する力。

(4) 上で計算した $\Delta v_\perp, \Delta v_\parallel$ を微小量と考えて、$\frac{1}{2}m\left((v_\parallel+\Delta v_\parallel)^2+(v_\perp+\Delta v_\perp)^2\right)$ を計算する。

(5) エネルギーを保存しつつ、$v_\perp$ が大きくなっていけば、どこかで $v_\parallel$ が 0 になる。

★【演習問題 9-4 】 .... （問題は p236、解答は p27w）

第１の考え方では、磁位を $V_m=-\frac{1}{\mu_0}Bz$ と考えて、負の磁極の z 座標を z、正の磁極の z 座標が $z+L\cos\theta$ であると考えればよい。位置エネルギーは

$$mV_m(z+L\cos\theta)-mV_m(z) \tag{D.13}$$

と計算できる。

第２の考えでは、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ が存在していると考えて、その中で電流の持つ位置エネルギー $-\vec{I}\cdot\vec{A}$（これは単位長さあたり）を足していけばよい。電流回路は一辺 a の正方形としよう。

４辺に流れる電流はそれぞれ、

$$\begin{array}{ll}\vec{I}_1=(I,0,0): & (0,0,0)\to(a,0,0)\\ \vec{I}_2=(0,I\cos\theta,-I\sin\theta): & (a,0,0)\to(a,a\cos\theta,-a\sin\theta)\\ \vec{I}_3=(-I,0,0): & (a,a\cos\theta,-a\sin\theta)\to(0,a\cos\theta,-a\sin\theta)\\ \vec{I}_4=(0,-I\cos\theta,I\sin\theta): & (0,a\cos\theta,-a\sin\theta)\to(0,0,0)\end{array} \tag{D.14}$$

と流れる（磁位の方の計算とは、原点を変えている）。

z 軸方向強さ B の磁束密度 $\vec{B}=(0,0,B)$ を作るベクトルポテンシャルはいろいろな作り方がある。$\mathrm{rot}\ \vec{A}=\vec{B}$ となればいいので、$\vec{A}=(-By,0,0)$ や $\vec{A}=(0,Bx,0)$ などが考えられる（答はこれだけではない）。

★【演習問題 10-1 】 .... （問題は p255、解答は p28w）

$H=nI$ というソレノイドの式は使ってよい。$B=\mu H$ を使えば磁束密度がわかる。真空なら $B=\mu_0 H$ なのだから、その場合との差を考えれば、分子電流による効果がわかる。

★【演習問題 10-2 】 .... （問題は p255、解答は p28w）

(1) div が 0 になるのは $\vec{B}$ の方。rot が 0 になるのは $\vec{H}$ の方。線が途切れないことを表しているのはどっち？

(2) 接続条件から角度の式を作る。

(3) 光の場合全反射が起こったのは、屈折角の正弦 $\sin\theta_2$ が 1 を越えることができないからであった。今の場合は ??

★【演習問題 10-3 】 .... （問題は p255、解答は p29w）

$\vec{B}$ の境界に垂直な成分 $B\cos\theta$ と、$\vec{H}$ の境界に平行な成分 $H\sin\theta$ が接続される。間隙の中では透磁率が μ_0。

★【演習問題 11-1 】 .... （問題は p276、解答は p30w）

(1) 単純な磁場中の円運動である。

(2) $B(r,t)$ は定数ではないから、
積分が必要。微小面積 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ をつらぬく磁束が $B(r,t)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

(3) 磁場による力と電場による力がある。$V=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ による電位差が発生し、これが円運動を加速する力になる。

(4) 等速円運動の運動方程式が成立し続けるようにする。

★【演習問題 11-2 】 .... （問題は p277、解答は p31w）

抵抗、コンデンサ、コイルでの電圧降下はそれぞれ $IR, \dfrac{Q}{C}, L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$。さらに、$I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ という関係がある。

★【演習問題 12-1 】 .... （問題は p295、解答は p32w）

ビオ・サバールの法則を使って求めるのは単純で、積分範囲が $(-\infty,\infty)$ だったものを $(-\infty,0)$ にすればよい。答は単純に $\dfrac{I}{2\pi r}$ の半分 $\dfrac{I}{4\pi r}$ となる。変位電流を取り入れたアンペールの法則では、$\vec{j}\to\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ と置き換えて考える。

★【演習問題 12-2 】 .... （問題は p296、解答は p32w）

アンペールの法則が $\mathrm{rot}\ \vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ と修正されていることを考えよう。

付録 E

章末演習問題の解答

★【演習問題 1-1 】 .... （問題は p43、ヒントは p1w）

(1)　長さ dz の部分は電荷 $\rho\mathrm{d}z$ を持つ。電荷から点 P へ向かうベクトルは $x\vec{\mathbf{e}}_x - z\vec{\mathbf{e}}_z$ なので、

$$\vec{E}_{\text{微小部分}} = \frac{\rho\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0|x\vec{\mathbf{e}}_x - z\vec{\mathbf{e}}_z|^3}\left(x\vec{\mathbf{e}}_x - z\vec{\mathbf{e}}_z\right) \tag{E.1}$$

となる。

(2)　$z = x\tan\theta$ とおくと、$\mathrm{d}z = \dfrac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$ と置くことができて、$x^2 + z^2 = \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}$ も使って、

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{微小部分}} &= \underbrace{\frac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta}_{=\mathrm{d}z}\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\vec{\mathbf{e}}_x - \underbrace{x\tan\theta}_{=z}\vec{\mathbf{e}}_z\right)\\ &= \frac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{x^3}x\left(\vec{\mathbf{e}}_x - \underbrace{\tan\theta}_{=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\vec{\mathbf{e}}_z\right)\\ &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}\theta\left(\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_x - \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z\right)\end{aligned} \tag{E.2}$$

この後角度積分を α から β まで行うが、係数 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 x}$ の部分は変化しない。よってこの積分は $\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_x - \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z$ という長さ 1 で、x 軸と角度 θ をなす方向のベクトルを、角度を α から β まで変化させながら足していけ、という計算であるから、答えは中間の角度になるのは当然である。

(3)　上の式をそのまま積分するのも一つの手である。

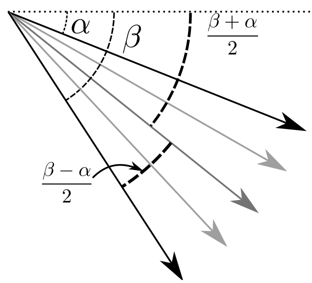
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\left(\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_x - \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z\right)\\ &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_z\right]_\alpha^\beta\\ &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 x}\left((\sin\beta - \sin\alpha)\vec{\mathbf{e}}_x + (\cos\beta - \cos\alpha)\vec{\mathbf{e}}_z\right)\end{aligned} \tag{E.3}$$

ここで三角関数の差と積の公式より、$\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ と $\cos\beta - \cos\alpha = -2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を使うと、

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\vec{\mathbf{e}}_x - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\vec{\mathbf{e}}_z\right) \tag{E.4}$$

という答になる。

もう一つの考え方として、(2) で角度 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を向くことは解ったのだから、その方向への射影のみを考えるという方法がある。その射影の大きさは、$\theta - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \theta'$ とおくと、$\cos\theta'$ と表すことができ、これを $-\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ から $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ まで積分すればよいから、



$$\int_{-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \mathrm{d}\theta' \cos\theta' = [\sin\theta']_{-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \tag{E.5}$$

となる。こう考えても上と同じ答が出る。

★【演習問題 1-2 】 .... （問題は p43、ヒントは p1w）

1.5.3 節では定数であった r を、変数だと考えて 0 から球の半径まで積分すればよい。単位体積あたりの電荷密度 ρ と単位面積あたりの電荷密度 σ の関係は、$\sigma = \rho\mathrm{d}r$ と考える（面積に、球殻の厚さ $\mathrm{d}r$ をかけると、球殻の体積になるということ）。
→ p38

球の半径を R_0 とすれば、

$$\int_0^{R_0} \frac{r^2\rho\mathrm{d}r}{\varepsilon_0 z^2} \tag{E.6}$$

という積分を行えばよい。結果は

$$\frac{(R_0)^3\rho}{3\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \tag{E.7}$$

となる（$Q = \dfrac{4\pi(R_0)^3}{3}\rho$ に注意）。

★【演習問題 1-3 】 .... （問題は p44、ヒントは p1w）

ヒントにも書いた通り、円 A の中を通る電気力線のうち、q_1 から来るものは $\dfrac{q_1}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta_1)$ 本であり、同様に q_2 から来るものは $\dfrac{q_2}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta_2)$ である。この和が一定、すなわち

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta_1) + \frac{q_2}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta_2) = \text{一定} \tag{E.8}$$

ということは、元々一定である $\dfrac{q_1}{2\varepsilon_0} + \dfrac{q_2}{2\varepsilon_0}$ を除いた部分も一定。ゆえに、

$$-\frac{q_1}{2\varepsilon_0}\cos\theta_1 - \frac{q_2}{2\varepsilon_0}\cos\theta_2 = \text{一定} \qquad \text{ゆえに、} q_1\cos\theta_1 + q_2\cos\theta_2 = \text{一定} \tag{E.9}$$

となる。

★【演習問題 2-1 】 .... （問題は p75、ヒントは p1w）

ヒントに示した仮想的円柱の側面積は $2\pi\rho\Delta z$ であるから、電場の強さを $E(\rho)$ とすれば、$2\pi\rho\Delta z E(\rho)$ が円柱側面から出てくる電気力線の本数である。

$\rho < \rho_1$ **の時**　仮想的円柱内に電荷はないから $E(\rho) = 0$。
$\rho_1 < \rho < \rho_2$ **の時**　仮想的円柱内にある電荷は $D \times \pi(\rho^2 - (\rho_1)^2)\Delta z$ であるから、$E(\rho) = \dfrac{D(\rho^2 - (\rho_1)^2)}{2\varepsilon_0\rho}$。
$\rho_2 < \rho$ **の時**　仮想的円柱内にある電荷は $D \times \pi((\rho_2)^2 - (\rho_1)^2)\Delta z$ であるから、$E(\rho) = \dfrac{D((\rho_2)^2 - (\rho_1)^2)}{2\varepsilon_0\rho}$。

★【演習問題 2-2 】 .... （問題は p75、ヒントは p1w）

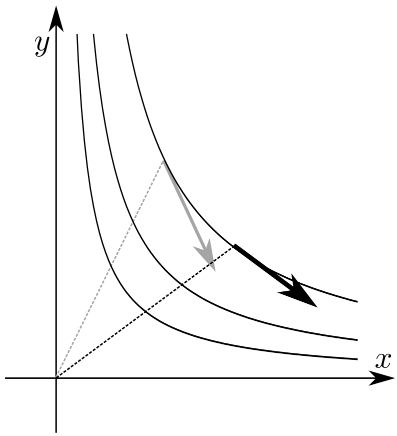
電場が r にしかよらないから、$\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 E_r\right)$ と考えることができて、

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(kr^{n+2}\right) = (n+2)\frac{1}{r^2}kr^{n+1} = (n+2)kr^{n-1} \tag{E.10}$$

となる。よって、$n < 1$ だと原点で発散してしまう。$n = -2$ の時は $\mathrm{div}\ \vec{E} = 0$ となるが、これは点電荷がある場合に対応していて、原点で発散するのは同じである。

★【演習問題 2-3 】 .... （問題は p75、ヒントは p2w）

(1) 右の図のようになる。

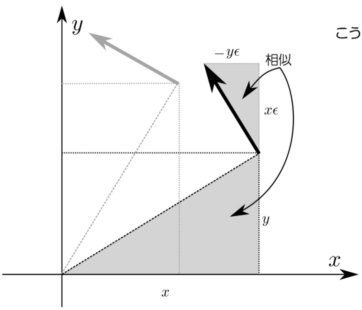


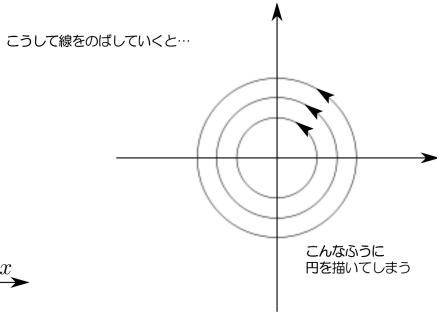
(2) ヒントにあるように、微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y}{x}$ を解くと、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \log y &= -\log x + C \\ y &= \frac{C'}{x} \end{aligned} \tag{E.11}$$

つまり、$xy =$ (一定)（双曲線）である。

(3) $-y\vec{\mathbf{e}}_x + x\vec{\mathbf{e}}_y$ の図を描いてみると、下の図のようになる。静電場の電気力線が一周してしまうことは有り得ない（くわしくは、3.3.2 節を見よ）。
→ p92





★【演習問題 2-4 】 .... （問題は p75、ヒントは p2w）

直交座標では、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}\right)\\
&= \underbrace{\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}}_{\text{分子を微分した項}}\underbrace{-\frac{2\rho x^2}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}}_{\text{分母を微分した項}}+\underbrace{\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}}_{\text{分子を微分した項}}\underbrace{-\frac{2\rho y^2}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}}_{\text{分母を微分した項}}\\
&= 2\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}\underbrace{-\frac{2\rho x^2}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}-\frac{2\rho y^2}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}}_{\text{まとめて}\frac{2\rho(x^2+y^2)}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}}=0
\end{aligned}
\tag{E.12}
$$

のように相殺することが解る。

円筒座標では、

$$
\mathrm{div}\ \vec{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(r\times\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}\right)}_{\text{定数になる}}=0 \tag{E.13}
$$

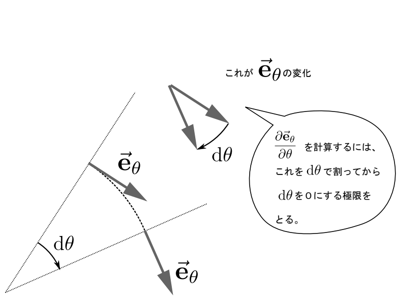
となる。

★【演習問題 2-5 】 .... （問題は p76、ヒントは p2w）

まず、図で解く方向について解説しよう。

$\dfrac{\partial\vec{\mathbf{e}}_r}{\partial\theta}$ については、ヒント→ p2に書いた図の通りに考えると、$\mathrm{d}\theta\to 0$ の極限では考えているベクトルが θ 方向を向き、長さが 1 になる。すなわち、$\dfrac{\partial\vec{\mathbf{e}}_r}{\partial\theta}=\vec{\mathbf{e}}_\theta$ である。

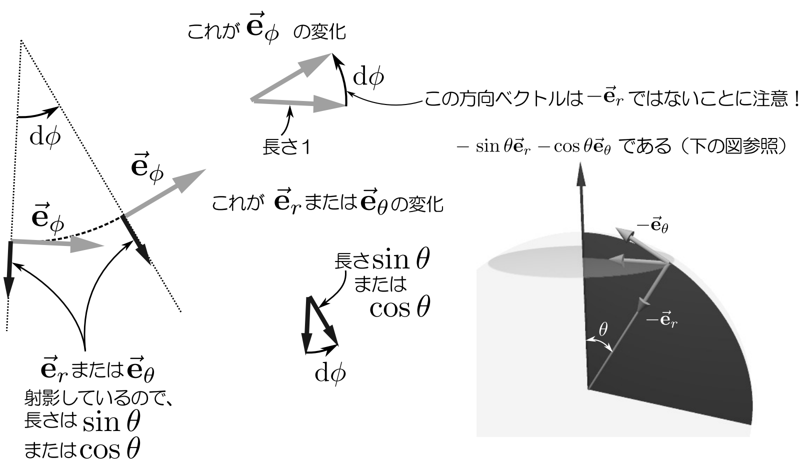
次に $\dfrac{\partial\vec{\mathbf{e}}_\theta}{\partial\theta}$ を考えると、右の図のように極限をとる計算をすれば、$\dfrac{\partial\vec{\mathbf{e}}_\theta}{\partial\theta}=-\vec{\mathbf{e}}_r$ がわかる。



$\dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta}$ については、ϕ 方向は変化しない
（図を書いてもわかるし、直感的には「南（θ 方向）」に移動しても「東（ϕ 方向）」は変わらない、ということ。

$\dfrac{\partial}{\partial r}$ の微分に対してはどの基底ベクトルも変化しないことはすぐわかる。

$\dfrac{\partial}{\partial \phi}$ については、まず真上（z 軸の正方向）から見下ろした図を書いてみる。$\vec{\mathbf{e}}_\phi$ については長さが変わらないが、$\vec{\mathbf{e}}_r$ は長さ $\sin\theta$ のベクトルに、$\vec{\mathbf{e}}_\theta$ は長さ $\cos\theta$ のベクトルに射影される。なぜ射影したものを考えるかというと、ϕ を回転させても、z 軸に平行な成分はまったく影響を受けないからである。



射影されたものを z 軸周りに回転した場合の変化を考えると、$\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta$ の変化は $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ の方向を向く。変化の大きさに $\cos\theta, \sin\theta$ がかかっていることを計算にいれれば、

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \sin\theta \vec{\mathbf{e}}_\phi, \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta \vec{\mathbf{e}}_\phi \tag{E.14}$$

がわかる。最後に $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ の変化は上の図の通り、図を見ると $-\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_r - \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta$ という方向を向き、長さは 1 になるので、

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_r - \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta \tag{E.15}$$

と求められる。

次に、数式で計算する。まず

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_z \\ \vec{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z \\ \vec{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \tag{E.16}$$

を微分する。r はどこにもないので、$\dfrac{\partial}{\partial r}$ の結果は全て 0 である。θ 微分の結果は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_r &= \cos\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x+\cos\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y-\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z=\vec{\mathbf{e}}_\theta\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta &= -\sin\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x-\sin\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y-\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_z=-\vec{\mathbf{e}}_r\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_\phi &= 0、
\end{aligned}
\tag{E.17}
$$

ϕ 微分の結果は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_r &= -\sin\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x+\sin\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y=\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_\phi\\
\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_\theta &= -\cos\theta\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x+\cos\theta\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y=\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_\phi\\
\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_\phi &= -\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x-\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y=-\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_r-\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta
\end{aligned}
\tag{E.18}
$$

となり、求めたかった公式が出る。

★【演習問題 2-6 】.. (問題は p76、ヒントは p2w)

(A.3) から (A.5) までを微分する方法で考える。見て分かる通り、これらの式はすべて → p300 r,z によらないから、ϕ 微分以外は 0 である。

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_\rho = -\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x+\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y=\vec{\mathbf{e}}_\phi \tag{E.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_\phi = -\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_x-\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_y=-\vec{\mathbf{e}}_\rho \tag{E.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{\mathbf{e}}_z = 0 \tag{E.21}$$

★【演習問題 3-1 】.. (問題は p131、ヒントは p2w)

(a)$\vec{E}=-\mathrm{grad}\ V$ より、$E_x=-\dfrac{\partial V}{\partial x}=-2kx$

(b) ガウスの法則を使う。電場は全て x 方向を向くので、立方体のうち x 軸と垂直な面以外の面からは電気力線の出入りはない。また、$x=0$ の面では電場が 0 だからここでも電気力線の出入りはない。出入りがあるのは唯一、$x=a$ の面に $-2ka\times a^2$ 出て行く（あるいは $2ka^3$ 入ってくる）だけである。よって内部にある電荷は $-2ka^3\varepsilon_0$ となる。

もう一つの方法はポアッソン方程式 $\triangle V=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ から電荷密度を求めてしまうことで、$\triangle V=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(kx^2)=2k$ である。よって電荷密度 ρ は $-2k\varepsilon_0$ である。電荷密度が定数となったので、体積 a^3 をかけて、$-2ka^3\varepsilon_0$ が内部にある電荷である。

★【演習問題 3-2 】.. (問題は p131、ヒントは p2w)

rot $\vec{E}$ をチェックすると、

(a)0 (b)0 (c)$\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=2k$ となり、0 ではない。(d)0

となる。よって (c) のような静電場は存在できない。

次に電位と電荷密度を求めよう。V は微分してマイナス符号をつけたら $\vec{E}$ が出るようなものを探す。ρ は div E を求めて ε_0 倍する。

(a)$V=-\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}ky^2, \rho=2k\varepsilon_0$

(b)$V=-kxy, \rho=0$

(d)$V=-k\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right), \rho=4kx\varepsilon_0$

とすればよい。よくある間違いは、例えば (b) で、「ky を x で積分して kxy、kx を y で積分して kxy、この二つを足して $2kxy$ でマイナス符号つけて $-2kxy$！」とやってしまうこと。「微分の反対は積分だ」と考えてこうやってしまうことがあるが、これでは微分しても正しい答になってない。

★【演習問題 3-3 】.. （問題は p131、ヒントは p2w）

電荷密度が ρ の場所でポアッソン方程式を解くと、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(r をかけてから積分して、)}\\
r\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} &= -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0}+C_1 && \text{(r で割って)}\\
\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} &= -\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}+\frac{C_1}{r} && \text{(積分して)}\\
V(r) &= -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}+C_1\log r+C_2
\end{aligned} \tag{E.22}$$

$r<r_1$ では電荷密度は 0 である。また、この範囲は原点を含むから、$\log r$ の前の係数は 0 でなくてはならない。よって $r<r_1$ では $V(r)=C_2$ である。この定数を 0 としよう。よって、$r<r_1$ では $V(r)=0$、$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=0$ である。

$r_1\le r<r_2$ では電荷密度が 0 ではないので、$V(r)=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}+C_1\log r+C_2, \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=-\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}+\frac{C_1}{r}$ である。この二つの量は $r=r_1$ において 0 にならなくてはいけないから、

$$\frac{\mathrm{d}V(r_1)}{\mathrm{d}r}=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r_1+\frac{C_1}{r_1}=0 \tag{E.23}$$

より、

$$C_1=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2 \tag{E.24}$$

と決まる。よって、

$$V(r_1)=-\frac{\rho(r_1)^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\log r_1+C_2=0 \tag{E.25}$$

から C_2 が求められる。結果は

$$V(r)=\frac{\rho\left((r_1)^2-r^2\right)}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\log\left(\frac{r}{r_1}\right) \tag{E.26}$$

である。

よって、$r_1\le r<r_2$ での電位とその微分は

$$V(r)=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left((r_1)^2-r^2\right)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\log\left(\frac{r}{r_1}\right) \tag{E.27}$$

および、

$$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\frac{1}{r}=\frac{\rho\left((r_1)^2-r^2\right)}{2\varepsilon_0 r} \tag{E.28}$$

となる。

最後に $r_2\le r$ を考えると、この範囲では電荷はないので、$V(r)=C_1\log r+C_2,\ \dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=\dfrac{C_1}{r}$ である。この二つが、$r=r_2$ において $r_1<r<r_2$ での $V(r),\ \dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$ と一致しなくてはいけない。$r=r_2$ での式を書くと、

$$\frac{C_1}{r_2}=\frac{\rho\left((r_1)^2-(r_2)^2\right)}{2\varepsilon_0 r_2} \tag{E.29}$$

および、

$$C_1\log r_2+C_2=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left((r_1)^2-(r_2)^2\right)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{E.30}$$

から C_1,C_2 を求める。(E.29) から

$$C_1=\frac{\rho\left((r_1)^2-(r_2)^2\right)}{2\varepsilon_0} \tag{E.31}$$

であり、

$$C_2=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left((r_1)^2-(r_2)^2\right)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_1)^2\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)-\frac{\rho\left((r_1)^2-(r_2)^2\right)}{2\varepsilon_0}\log r_2 \tag{E.32}$$

となる。

ここで求めた $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ にマイナス符号をつけると電場であるが、その答はもちろん、演習問題 2-1 と一致する。

★【演習問題 3-4 】 .... （問題は p131、ヒントは p3w）

背理法で証明する。電位が極大値をとる場所があったとすると、その場所を取り囲むように小さな閉曲面を取れば、その閉曲面から出ると必ず電位が下がるようにできる。ということは、閉曲面の全ての点で電場が外を向いていることになる。ガウスの定理からすればこの閉曲面には電荷がなくてはいけないが、これは矛盾である。極小値がないことは、この逆を言えばよい。

★【演習問題 3-5 】 .... (問題は p132、ヒントは p3w)

(a) ヒントにあるように電場を $\vec{E}=E(r)\vec{\mathbf{e}}_r$ と置くと、ガウスの法則により、$r<R_0$ と $r>R_1$ の領域では $E(r)=0$ である。それ以外 $(R_0<r<R_1)$ では、半径 r の球の内部には電荷 $-Q$ があるから、$\vec{E}=-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$ となる。電位はこれの積分であるから、$V(r)=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ とおける。ただし、$r<R_0$ と $r>R_1$ では一定となってしまう。すなわち、

$$V(r)=\begin{cases}-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} & r<R_0\\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & R_0<r<R_1\\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & R_1<r\end{cases} \tag{E.33}$$

となる。

(b) $\dfrac{1}{2}qV$ の式に代入する。電荷 $-Q$ があるのが $r=R_0$、電荷 Q があるのが $r=R_1$ だから

$$U=\frac{1}{2}Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}-\frac{1}{2}Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right) \tag{E.34}$$

(c) 電場の式をエネルギーの式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{d}r r^2\underbrace{\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta}_{=2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi}_{=2\pi}\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2\\ =&\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{d}r\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\left[-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{R_0}^{R_1}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right]\end{aligned} \tag{E.35}$$

もちろん結果はどちらも同じである。

★【演習問題 3-6 】 .... (問題は p132、ヒントは p3w)

$V=\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ は ϕ によらないから、ラプラシアンの ϕ 微分の部分を除いたものをかけると、

$$\begin{aligned}&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)}_{=-2\cos\theta/r^3}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)}_{=-\sin\theta/r^2}\right)\right)\\ =&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{2\cos\theta}{r}\right)}_{=-2\cos\theta/r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)}_{=2\sin\theta\cos\theta/r^2}\right)\\ =&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\theta}{r^4}-\frac{2\cos\theta}{r^4}\right)=0\end{aligned} \tag{E.36}$$

x 軸方向に向けた場合、$z=r\cos\theta$ が $x=r\sin\theta\cos\phi$ に変わるので、$V=\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ は $V=\dfrac{p\sin\theta\cos\phi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ に変わる。今度は3つの微分を全部やる必要があって、

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}\right)\right)\right.\\
&\left.\quad+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}\right)\right)\\
=&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-2}\right)}_{-2r^{-3}}\right)+\frac{\cos\phi}{r^4\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta}_{=\cos\theta}\right)\right.\\
&\left.\quad+\frac{1}{r^4\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\cos\phi}_{=-\cos\phi}\right)\\
=&\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^{-1}\right)}_{=2r^{-2}}+\frac{\cos\phi}{r^4\sin\theta}\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)-\frac{\cos\phi}{r^4\sin\theta}\right)\\
=&\frac{p\cos\phi}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left(2\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\underbrace{\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}_{1-2\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)=0
\end{aligned}
\tag{E.37}
$$

のようにやはり 0 であることがわかる。y 方向を向いた場合は $\cos\phi\to\sin\phi$ と変わるだけなので、やはり同様に 0 になることがすぐわかる。

★【演習問題 3-7 】 .... (問題は p132、ヒントは p3w)

積分されるものは、

$$
\underbrace{\frac{q^2\cos^4\theta\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 L^4}}_{=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}\times\underbrace{2\pi L^2\tan\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}}_{\text{面積要素}}
\tag{E.38}
$$

である。以下これを計算していくと、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q^2\cos^4\theta\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 L^4}\times 2\pi L^2\tan\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\times\underbrace{\tan\theta}_{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
\tag{E.39}
$$

$\sin\theta=t$ とおくと、$\cos\theta\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}t$ である。また、θ が $0\to\dfrac{\pi}{2}$ と変化する間に t は $0\to 1$ と変化するので、

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^1 t^3\mathrm{d}t=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}
\tag{E.40}
$$

となるので、求める力は $\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2}$ である。これは距離 $2L$ 離れた電荷 q を持つ二つの電荷の間の反発力（公式どうりにかくと、$\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L)^2}$）に等しい。

★【演習問題 3-8 】 .... （問題は p132、ヒントは p3w）

ヒントの式 (D.4) に $|\vec{x}| = r, |\vec{x}-\vec{L}| = \sqrt{r^2-2zL+L^2}, \vec{x}\cdot\vec{L} = zL$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}' &= \frac{\varepsilon_0 qq'}{(4\pi\varepsilon_0)^2|\vec{x}|^3|\vec{x}-\vec{L}|^3}\underbrace{\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{L})}_{=|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{L}} \\
&= \frac{qq'}{(4\pi)^2\varepsilon_0 r^3(r^2-2zL+L^2)^{\frac{3}{2}}}(r^2-zL)
\end{aligned} \tag{E.41}
$$

となるので、この式を全空間で積分すればよい。極座標での積分は $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi r^2\sin\theta$ をかけてやればよい。$z = r\cos\theta$ とおいて、

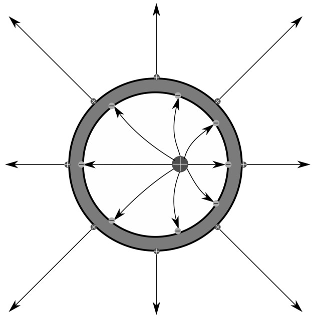
$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi}_{=2\pi}\, r^2\sin\theta\frac{qq'}{16\pi^2\varepsilon_0 r^3(r^2-2rL\cos\theta+L^2)^{\frac{3}{2}}}(r^2-rL\cos\theta) \\
=&\int_0^\infty \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0(r^2-2rL\cos\theta+L^2)^{\frac{3}{2}}}(r-L\cos\theta)
\end{aligned} \tag{E.42}
$$

ここで、$\dfrac{r-L\cos\theta}{(r^2-2rL\cos\theta+L^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(-\dfrac{1}{(r^2-2rL\cos\theta+L^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$ であることを使って r 積分を行い、

$$
\left[-\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\frac{qq'\sin\theta}{8\pi\varepsilon_0(r^2-2rL\cos\theta+L^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\infty = \underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta}_{=2}\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0 L} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 L} \tag{E.43}
$$

となる。これが静電場の相互作用のエネルギーの公式 $\dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}$ そのものである。

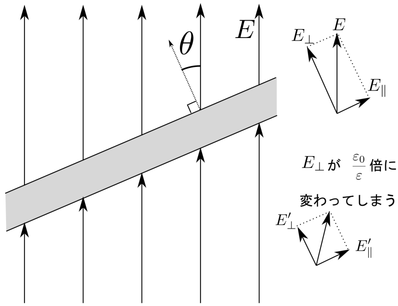
★【演習問題 4-1 】 .... （問題は p154、ヒントは p3w）



導体の球殻の部分（図の灰色部分）はすべて等電位になり、電場も 0 になる。球殻の内側の境界（裏面）からの電気力線は球殻の外側の境界（表面）には出て行かないので、裏面にどのような電荷が分布しているかという情報は表面には伝わらない。そのため、表面には球対称に電荷が分布することになる。

球外部の電場を作っているのは表面の電荷分布だけなので、外部に作る電場も球対称となり、球対称で真空中の電場が満たすべき div $\vec{E}=0$ を満たすのは点電荷による電場 $\vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$ しかないから、やはり外部では点電荷と同じ電場になる。

★【演習問題 4-2 】 .... （問題は p154、ヒントは p4w）



板の内部の電場や電束密度には ′ をつけて示そう。境界条件から

$$D_\perp = D'_\perp, E_\parallel = E'_\parallel \tag{E.44}$$

という式と、誘電率に関する式

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 E_\perp = D_\perp, \varepsilon_0 E_\parallel = D_\parallel,\\ \varepsilon E'_\perp = D'_\perp, \varepsilon E'_\parallel = D'_\parallel\end{aligned} \tag{E.45}$$

があるので、これから

$$E'_\perp = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_\perp, E'_\parallel = E_\parallel$$

となって板内部の電場が求められる。

電束密度の方は、$D'_\perp = D_\perp, D'_\parallel = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}D_\parallel$ である。

電場が等しくなれるのは、$E_\perp = 0$ の時、すなわち電場と板が平行である時。

電束密度が等しくなれるのは、$D_\parallel = 0$ の時、すなわち電束密度と板が垂直である時。

★【演習問題 4-3 】 .... （問題は p154、ヒントは p4w）

電荷密度 $-\rho$ で原点を中心とした球の作る電位と、電荷密度 $+\rho$ で原点より z 方向に d だけ平行移動した点を中心とした球の作る電位を重ね合わせる。

$$\begin{aligned}\text{球外部}:V &= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \text{球内部}:V &= -\frac{\rho(x^2+y^2+(z-d)^2)}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho(x^2+y^2+z^2)}{6\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{E.46}$$

という形になる。ここで $\rho d = |\vec{P}|$ として、$d\to 0$ の極限を取れば分極が一様に存在している場合の電場が出せる。

$$
\begin{aligned}
&\text{球外部：} V = \frac{|\vec{P}|R^3}{3\varepsilon_0} \times \underbrace{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}_{\to -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)} \\
&\text{球内部：} V = -\frac{|\vec{P}|}{6\varepsilon_0} \times \underbrace{\frac{1}{d}\left((x^2+y^2+(z-d)^2) - (x^2+y^2+z^2)\right)}_{\to -\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)}
\end{aligned}
\tag{E.47}
$$

となる。$d \to 0$ の極限では式内に示したように差が微分に置き換えられることを使って、

$$
\begin{aligned}
&\text{球外部：} V = -\frac{|\vec{P}|R^3}{3\varepsilon_0} \times \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{|\vec{P}|R^3 z}{3\varepsilon_0\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{P}|R^3\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} \\
&\text{球内部：} V = \frac{|\vec{P}|}{6\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = \frac{|\vec{P}|z}{3\varepsilon_0}
\end{aligned}
\tag{E.48}
$$

となる。電場は $-\mathrm{grad}\ V$ となるが、外部については極座標で計算した方が、内部についでは直交座標で計算した方が簡単で、

$$
\begin{aligned}
\text{球外部：}\vec{E} &= -\vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r}\frac{|\vec{P}|R^3\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} - \vec{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{|\vec{P}|R^3\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{|\vec{P}|R^3}{3\varepsilon_0}\left(2\vec{\mathbf{e}}_r\frac{\cos\theta}{r^3} + \vec{\mathbf{e}}_\theta\frac{\sin\theta}{r^3}\right) \\
\text{球内部：}\vec{E} &= -\vec{\mathbf{e}}_z\frac{|\vec{P}|}{3\varepsilon_0}
\end{aligned}
\tag{E.49}
$$

となる。$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ であり、$\vec{P}$ は外部では 0、内部では $|\vec{P}|\vec{\mathbf{e}}_z$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\text{球外部：}\vec{D} &= \frac{|\vec{P}|R^3}{3}\left(2\vec{\mathbf{e}}_r\frac{\cos\theta}{r^3} + \vec{\mathbf{e}}_\theta\frac{\sin\theta}{r^3}\right) \\
\text{球内部：}\vec{D} &= -\vec{\mathbf{e}}_z\frac{|\vec{P}|}{3} + \vec{\mathbf{e}}_z|\vec{P}| = \frac{2}{3}|\vec{P}|\vec{\mathbf{e}}_z
\end{aligned}
\tag{E.50}
$$

となる。

結果、球内部では電場は分極および電束密度とは逆を向く。

★【演習問題 5-1 】 .... （問題は p172、ヒントは p4w）

ヒントにある回路では追加した抵抗 R には電流が流れない。それは電池も同時に追加したからである。重ね合わせの原理があるので、抵抗 R を流れる電流（実際には 0）の中には、回路の他の部分の電池がなく、この電池だけがある場合に流れる電流 $\dfrac{V}{R+R_0}$ が含まれていることになる。仮想的に追加した電池を消去すれば、それだけの電流がそこにあることになる。

★【演習問題 5-2 】 .... （問題は p172、ヒントは p4w）

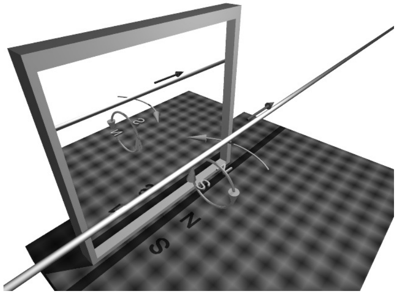
ヒントにあるように電流密度は等しいので、$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ となる。境界面を含むような底面 S の角柱を考えてガウスの法則を使うと、

$$
E_1 S - E_2 S = jS\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}
\tag{E.51}
$$

である。よって、溜まる電荷は $Q=\varepsilon_0 jS\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}\right)$、単位面積あたり $\varepsilon_0 j\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}\right)$ となる。

★【演習問題 6-1 】.. （問題は p182、ヒントは p4w）

図のように円状に回る電流があればそこに N 極、S 極が存在する。鏡に映すと、電流の回る方向も鏡像となり、逆方向を向くから、電流の作る磁場も逆を向く。この結果、実は鏡に映した N 極は S 極になるのである !!（右図をよく見ると、鏡の中では極が反転している）



以上のように、磁場の源が電流であるということを考えれば、磁極が鏡の中では反転することを理解することができ、物理法則の左右対称性は保たれる。

★【演習問題 7-1 】.. （問題は p193、ヒントは p4w）

$\vec{H}=\frac{I}{2\pi r}(-\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_x+\cos\phi\vec{\mathbf{e}}_y)$ より、x 成分は $-\frac{I}{2\pi r}\sin\phi$、$y$ 成分は $\frac{I}{2\pi r}\cos\phi$、z 成分は 0。さらに、$r=\sqrt{x^2+y^2},\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sin\phi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を使うと、

$$\vec{H}=\left(\frac{-Iy}{2\pi(x^2+y^2)},\frac{Ix}{2\pi(x^2+y^2)}\right) \tag{E.52}$$

となる。rot　は z 成分だけが問題となる（x,y 成分が 0 なのはすぐにわかる）。

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\right)_z &= \frac{\partial}{\partial x}\biggl(\underbrace{\frac{Ix}{2\pi(x^2+y^2)}}_{H_y}\biggr)-\frac{\partial}{\partial y}\biggl(\underbrace{\frac{-Iy}{2\pi(x^2+y^2)}}_{H_x}\biggr)\\ &= \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)}-\frac{2Ix^2}{2\pi(x^2+y^2)^2}+\frac{I}{2\pi(x^2+y^2)}-\frac{2Iy^2}{2\pi(x^2+y^2)^2}\\ &= 0\end{aligned} \tag{E.53}$$

となって、rot　の全成分が 0 になる（ただし、分母が 0 になる z 軸上を除く）。

★【演習問題 7-2 】.. （問題は p193、ヒントは p4w）

z 軸を中心とした半径 $R+x$ の円を描くと、この円の中を貫く電流は、NI である（1 本の電流 I が N 回貫いている）。よって、アンペールの法則を適用すると

$$2\pi(R+x)H=NI \quad \text{より} \quad H=\frac{NI}{2\pi(R+x)} \tag{E.54}$$

となる。もちろんこれはドーナツ型コイルの内側だけで成立する式である（外に出るような円を描くと、中を貫く電流も 0 となる）。

★【演習問題 7-3 】.. （問題は p193、ヒントは p4w）

$$\text{ストークスの定理から}\int_{\partial S}\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{H}=\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{H} \tag{E.55}$$

→ p304

となるので、rot $\vec{H}=\vec{j}$ を代入すれば $\displaystyle\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{j}$ となる。これは電流密度に対応する flux である。今は定常的電流を考えているので、div $\vec{j}=0$ である。これは任意の閉曲面 ∂V に対して $\displaystyle\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{j}=0$ であることを意味する。

★【演習問題 8-1 】 .... （問題は p213、ヒントは p4w）

直線部分は、電流の方向と電流から中心部へ向かうベクトルが平行なので、外積を取ると 0 になる。よってビオ・サバールの法則を使って計算する時、結果には効かない。そこで以下では半円部だけを計算することにする。

$$\vec{B}=\mu_0 I\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta\times(-r\vec{\mathbf{e}}_r)}{4\pi r^2} \tag{E.56}$$

となるが、$\vec{\mathbf{e}}_\theta\times\vec{\mathbf{e}}_r=-\vec{\mathbf{e}}_z$ として積分の外に出せるので、

$$\vec{B}=\mu_0 I\vec{\mathbf{e}}_z\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4\pi r}=\frac{\mu_0 I}{4r}\vec{\mathbf{e}}_z \tag{E.57}$$

★【演習問題 8-2 】 .... （問題は p213、ヒントは p5w）

どの微小部分の作る磁場も、全部紙面裏から表へ向くので、積分はスカラー量の積分と同様に行ってよい。一辺分を計算して 4 倍することにして、

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{正方形}}\frac{\mathrm{d}\vec{x}\times(-\vec{x})}{|\vec{x}|^3}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{\text{一辺}}\frac{\mathrm{d}\vec{x}\times(-\vec{x})}{|\vec{x}|^3} \tag{E.58}$$

外積の結果は $\dfrac{a}{2}\mathrm{d}x$ になるから、

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{\frac{a}{2}\mathrm{d}x}{\left(\frac{a^2}{4}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathbf{e}}_z \tag{E.59}$$

例によって $x=\dfrac{a}{2}\tan\theta$ とおいて、$\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\to\frac{a}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ と置き換えて、

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{a^2}{4}\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cos\theta}_{=[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\vec{\mathbf{e}}_z \tag{E.60}$$

★【演習問題 8-3 】 .... （問題は p213、ヒントは p5w）

この導線の全ての微小部分が作る磁場は紙面垂直に裏から表へ向かう方向を向く。同じ方向を向いているので、磁束密度はベクトルではあるがスカラー同様に積分ができて、

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2\mathrm{d}\theta}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{r}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta(1+\cos\theta)}{2a} \tag{E.61}$$

となる。積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta(1+\cos\theta) = [\theta - \sin\theta]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \tag{E.62}$$

であるから、

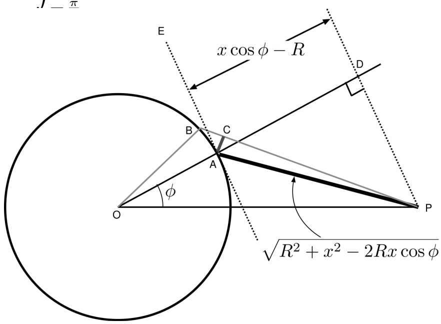
$$B = \frac{\mu_0 I}{4a} \tag{E.63}$$

★【演習問題 8-4 】 .... （問題は p214、ヒントは p5w）

ヒントで途中まで計算したが、結局積分すべき量は、

$$\frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \;\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{R\,(-x\cos\phi + R)\,\vec{\mathbf{e}}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)} \tag{E.64}$$

であった。このうち、θ に関する積分の答は $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \;\cos\theta = 2$ である。



ϕ 積分に関してはヒントにも書いたように、$\mathrm{d}\phi \dfrac{R\,(-x\cos\phi + R)\,\vec{\mathbf{e}}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)}$ という量が「半径 R の円運動している車を、円の中心から x 離れたところで人がじっと注視している。車が $\mathrm{d}\phi$ だけ回る間に、この人はどれだけの角度目線を動かさなくてはいけないか」という問題の答であることを使う。

こう考えると、$x > R$ であれば、0 から 2π まで積分すれば 0 になるのはすぐにわかる。なぜなら、外から見れば車はあっちいったりこっちいったりを繰り返しているので、一周分で目の動く角度を積分すれば 0 となる。

一方、$x < R$ であれば、車が一周する間にこの人の目線も一周するから、積分結果は 2π である。

結局、内側では $\dfrac{\mu_0 n I}{4\pi} \times 2 \times 2\pi = \mu_0 n I$ という答が出る。これはアンペールの法則を使って出した式と全く同じである（アンペールの法則を使った方が簡単であることは言うまでもない）。

★【演習問題 9-1 】 .... （問題は p234、ヒントは p6w）

(1)

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = qE - qv_z B \tag{E.65}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{E.66}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = qv_x B \tag{E.67}$$

となる。

(2)　(E.65) をもう一度微分すれば、

$$m\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -q\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}B \tag{E.68}$$

となるので、これから $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{m}{qB}\dfrac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2}$ として (E.67) に代入する。すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \tag{E.69}$$

という式を作ることができる。これは単振動の運動方程式と同じなので、$\dfrac{qB}{m} = \omega$ とおいて、

$$v_x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{E.70}$$

が一般解となる。$t = 0$ では、$v_z = 0$ であるから、(E.65) より $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{qE}{m}$ である。この二つの初期条件から、

$$v_x = \frac{qE}{m\omega}\sin\omega t = \frac{E}{B}\sin\omega t \tag{E.71}$$

と求められる。

(3)　(E.67) に (E.70) を代入して、

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= qB\frac{qE}{m\omega}\sin\omega t \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{qE}{m}\sin\omega t \end{aligned} \tag{E.72}$$

となって、これを積分して、

$$v_z = -\frac{E}{B}\cos\omega t + C(\text{積分定数}) \tag{E.73}$$

という答えが出る。$t = 0$ で $v_z = 0$ であることから積分定数も求められて、

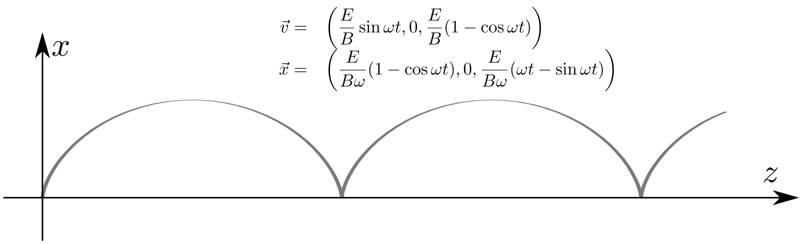
$$v_z = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t) \tag{E.74}$$

となる。

(4)　$\vec{v} = (0, 0, \dfrac{E}{B})$ で表される並進運動と、

$$\vec{v} = \left(\frac{E}{B}\sin\omega t, 0, -\frac{E}{B}\cos\omega t\right) \tag{E.75}$$

で表される円運動を合成した運動になる (サイクロイド運動)。よって速度と位置座標は



のようになる。

★【演習問題 9-2 】 . . . . （問題は p234、ヒントは p6w）

(1)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 x + q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}B, m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 y - q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}B, m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 z \tag{E.76}$$

(2)

$$m\frac{\mathrm{d}^2(x+\mathrm{i}y)}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2(x+\mathrm{i}y) + q\frac{\mathrm{d}(y-\mathrm{i}x)}{\mathrm{d}t}B, \tag{E.77}$$

となるが、$x+\mathrm{i}y = X$ とおけば、

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 X - \mathrm{i}q\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}B, \tag{E.78}$$

とまとめられる。

(3)　$X = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ とおけば、

$$-m\Omega^2 X = -m\omega^2 X + \Omega qBX \tag{E.79}$$

となるので、$m\Omega^2 + qB\Omega - m\omega^2 = 0$ という 2 次方程式を解けば Ω が求められる。

$$\Omega = \frac{-qB \pm \sqrt{(qB)^2 + 4m^2\omega^2}}{2m} \tag{E.80}$$

(4)

答は

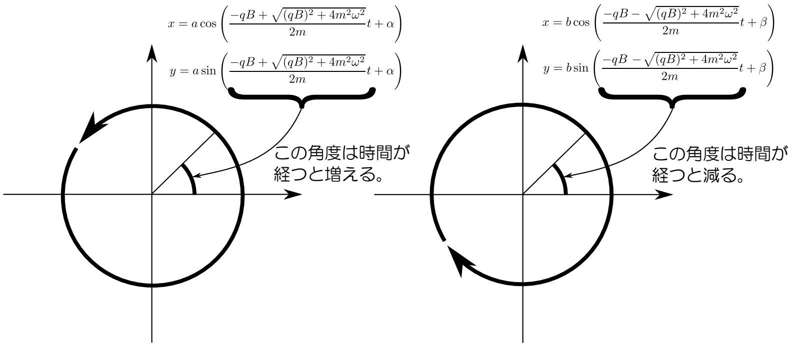
$$X = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-qB+\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2}}{2m}t} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-qB-\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2 m}}{2}t} \tag{E.81}$$

となる（A, B は未定の複素定数)。これは X という複素数であるが、X の実数部が x、虚数部が y であるから、

$$x = a\cos\left(\frac{-qB+\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2}}{2m}t+\alpha\right), y = a\sin\left(\frac{-qB+\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2}}{2m}t+\alpha\right) \tag{E.82}$$

および、

$$x = b\cos\left(\frac{-qB-\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2}}{2m}t+\beta\right), y = b\sin\left(\frac{-qB-\sqrt{(qB)^2+4m^2\omega^2}}{2m}t+\beta\right) \tag{E.83}$$



が解である（a, b, α, β は実定数）。
これは図のような円運動である。
Ω の符号から、それぞれ逆向きの円運動であることがわかる。この二つの重ね合わせの運動が起こりえる。

★【演習問題 9-3 】 .... （問題は p235、ヒントは p7w）

(1) ガウスの法則を式にすると、

$$\pi r^2 B_0 + 2\pi r \Delta z B_\perp = \pi r^2 (B_0 + \Delta B) \tag{E.84}$$

となるので、$B_\perp = \dfrac{r}{2\Delta z}\Delta B$ である。

(2) z 方向に働く力は、$qv_\perp B_\perp$ である。これは $v_\parallel$ と逆向きだから、$\Delta v_\parallel = -\dfrac{qv_\perp B_\perp}{m}\Delta t$ である。

(3) 加速する方向に $qv_\parallel B_\perp$ の力が働くのだから、$\Delta v_\perp = \dfrac{qv_\parallel B\perp}{m}\Delta t$ となる。

(4)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m\left((v_\parallel + \Delta v_\parallel)^2 + (v_\perp + \Delta v_\perp)^2\right)\\
=\ &\frac{1}{2}m\left((v_\parallel)^2 + (v_\perp)^2\right) + m\left(v_\parallel \underbrace{\Delta v_\parallel}_{=-\frac{qv_\perp B_\perp}{m}\Delta t} + v_\perp \underbrace{\Delta v_\perp}_{=\frac{qv_\parallel B\perp}{m}\Delta t}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}m\left((v_\parallel)^2 + (v_\perp)^2\right) + m\left(-\frac{qv_\parallel v_\perp B_\perp}{m}\Delta t + \frac{qv_\perp v_\parallel B\perp}{m}\Delta t\right)\\
=\ &\frac{1}{2}m\left((v_\parallel)^2 + (v_\perp)^2\right)
\end{aligned} \tag{E.85}$$

(5) エネルギーが保存することがわかったから、この後 $v_\perp$ が増加して $v_\parallel$ が減少していくと、どこかで $v_\parallel = 0$ となる。その後は $v_\parallel$ が負になっていくので、荷電粒子は螺旋運動をしながら磁場に跳ね返されることになる。

★【演習問題 9-4 】 .... （問題は p236、ヒントは p7w）

計算方法はヒントに書いた通りである。磁位で考えると、

$$mV_m(z+L\cos\theta)-mV_m(z)=-\frac{mB}{\mu_0}(z+L\cos\theta)+\frac{mB}{\mu_0}z=-\frac{mB}{\mu_0}L\cos\theta \quad \text{(E.86)}$$

となる。$\dfrac{m}{\mu_0}L$ が磁気モーメント $\vec{\mu}$ の大きさであり、θ は磁気モーメントと磁束密度のなす角度なのだから、この式は $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ ということになる。

エネルギー $-\vec{I}\cdot\vec{A}$ を計算するには電流とベクトルポテンシャルとの内積を取るわけだが、ベクトルポテンシャルの表現は一意ではないので、計算が楽になるように選ぶ。$\vec{B}=(0,0,B)$ となるように、$\vec{A}=(-By,0,0)$ と選ぶと、($\vec{I}_2,\vec{I}_4$ はこの $\vec{A}$ と直交するので)計算すべきは $-\vec{I}_1\cdot\vec{A}$ と $-\vec{I}_3\cdot\vec{A}$ である。

ところが $\vec{I}_1$ は $y=0$ の場所にいるので、この場所では $\vec{A}=0$ であり、$-\vec{I}_1\cdot\vec{A}=0$ である。最後に残った $-\vec{I}_3\cdot\vec{A}$ を計算すると、I_3 のいる場所では $y=a\cos\theta$ なので、

$$-\vec{I}_3\cdot\vec{A}=-(-I,0,0)\cdot(-Ba\cos\theta,0,0)=-BIa\cos\theta \quad \text{(E.87)}$$

となる。これは単位長さあたりだから、一辺の長さ a をかけると、エネルギーは $-BIa^2\cos\theta$ である。磁気モーメント $\vec{\mu}$ の大きさが Ia^2 であることを考えると、このエネルギーは $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ となる。

★【演習問題 10-1 】 .... (問題は p255、ヒントは p7w)

$H=nI$ であるから、$B=\mu nI$ ということになる。B のうち、$\mu_0 nI$ が導線を流れる電流が作っている磁束密度であると考えれば、$(\mu-\mu_0)nI$ は分子電流である。これも表面を流れていると考えればよいから、導線を流れる電流 I に比べて、$\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu_0}I$ という電流が流れていると考えればよい。単位長さあたりに直せば、$\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu_0}nI$ である。

★【演習問題 10-2 】 .... (問題は p255、ヒントは p7w)

(1) div $\vec{B}=0$ から、切れることなくつながるのは $\vec{B}$、よって磁束線がつながる(磁力線はつながらない)。

(2) 面に垂直な成分について

$$B_1\cos\theta_1=B_2\cos\theta_2 \quad \text{すなわち、} \quad \mu_1H_1\cos\theta_1=\mu_2H_2\cos\theta_2 \quad \text{(E.88)}$$

が、面に平行な成分について、

$$H_1\sin\theta_1=H_2\sin\theta_2 \quad \text{(E.89)}$$

が成立する。(E.88) を (E.89) で辺々割って、

$$\frac{\mu_1\cos\theta_1}{\sin\theta_1}=\frac{\mu_2\cos\theta_2}{\sin\theta_2} \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \quad \text{(E.90)}$$

(3) 屈折角は $\tan\theta_2=\dfrac{\mu_2\tan\theta_1}{\mu_1}$ から決まる。光の場合、$\sin\theta_2=\dfrac{n_1\sin\theta_1}{n_2}$ という式だったので、右辺が 1 より大きくなると解がなくなった。tan にはそのような制限はない(θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化する間に、$\tan\theta$ は 0 から ∞ まで変化する)ので、全反射のような現象は起きない。

★【演習問題 10-3 】 .... （問題は p255、ヒントは p8w）

間隙内で磁束密度が B' となり、境界法線との角度が θ' になるとしよう。

接続条件は右の図に書き込んだ通りである。H の方の接続条件は

$$\frac{B'}{\mu_0}\sin\theta' = \frac{B}{\mu}\sin\theta \tag{E.91}$$

と書き直すことができる。(平行成分)^2 + (垂直成分)^2 という式を作ると、

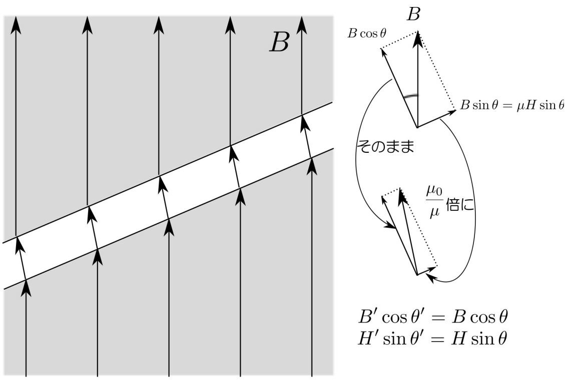
$$(B')^2 = (B\cos\theta)^2 + \left(\frac{\mu_0}{\mu}B\sin\theta\right)^2 \tag{E.92}$$

となり、$B' = \sqrt{(B\cos\theta)^2 + \left(\frac{\mu_0}{\mu}B\sin\theta\right)^2}$ と求められる。$\frac{(平行成分)}{(垂直成分)}$ と計算すれば、

$$\tan\theta' = \frac{\mu_0}{\mu}\tan\theta \tag{E.93}$$

となる。

角度 θ が 0 の時、$B' = B$（磁束密度が同じ）となる。$\theta = \frac{\pi}{2}$ の時は、$\frac{B}{\mu} = \frac{B'}{\mu_0}$（磁場の値が同じ）になる。物質中の磁束密度を測定したい時、$\vec{B}$ と垂直な間隙を作って測定してもいいのはこの接続条件のおかげである。



★【演習問題 11-1 】 （問題は p276、ヒントは p8w）

(1) 時刻 0 における円運動の運動方程式は

$$\frac{mv^2}{r} = qvB(r,0) \tag{E.94}$$

なので、$v = \dfrac{qB(r,0)r}{m}$ である。

(2) 微小磁束 $B(r,t)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ を積分する。θ 積分はすぐに終わって

$$\Phi(t) = 2\pi\int_0^r \mathrm{d}r\ rB(r,t) \tag{E.95}$$

となる。$B(r,t)$ の形は与えられていないのでこれ以上は計算できない。

(3) 磁場による力が $qvB(r,t)$ で、速度と垂直な方向。一方、電磁誘導により、

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = 2\pi\int \mathrm{d}r\ r\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \tag{E.96}$$

を満たす電場が発生する（左辺の積分は回路に沿っての線積分）。対称性から電場は回路上で一定なので、その強さを E とすれば、$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = 2\pi rE$ である。よって、

$$E = \frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\ r\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \tag{E.97}$$

電場による力はこれに q をかければいいので、

$$\frac{q}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\ r\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \tag{E.98}$$

という力が粒子の運動方向へと作用する。これは粒子を加速することになる。

(4) 粒子の円の接線方向への加速度は（前問の答より）

$$\frac{q}{mr}\int_0^r \mathrm{d}r\ r\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} = \frac{q}{2\pi mr}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{E.99}$$

である。一方、半径 r が変化せずに運動しているとするならば、(1) の答の $v = \dfrac{qB(r,t)r}{m}$ より、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{qr}{m}\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \tag{E.100}$$

が成り立つ。この二つから、

$$\begin{aligned}\frac{q}{2\pi mr}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{qr}{m}\frac{\partial B(r,t)}{\partial t}\\ \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\pi r^2\frac{\partial B(r,t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{E.101}$$

という関係が必要である。なお、もし $B(r,t)$ が r によらないとすれば、$\Phi(t)=2\pi r^2 B(r,t)$ である。よって、$B(r,t)$ は r によって変化している状況でないとこのようなことは起こせない。

★【演習問題 11-2 】......................................（問題は p277、ヒントは p8w）

(1) $E-IR-\dfrac{Q}{C}-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$ で、$I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ であるから、$E-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R-\dfrac{Q}{C}-L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=0$ という式ができる。

(2) $EI-I^2R-\dfrac{IQ}{C}-LI\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$ となる。第 1 項の EI は電池が供給する電力。第 2 項の I^2R は抵抗で発生するジュール熱。第 3 項は $\dfrac{IQ}{C}=\dfrac{1}{C}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{Q^2}{2C}\right)$ と書けるから、コンデンサが蓄えているエネルギーの時間変化。最後の $LI\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}LI^2\right)$ は、コイルが蓄えているエネルギーの時間変化である。

(3) $E-\dfrac{Q}{C}-L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=0$ という式になるが、これは、$Q(t)=CE+q(t)$ と書き直すことで、$-\dfrac{q}{C}-L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}=0$ となり、単振動の運動方程式 $-kx=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ と同じ式になる。対応はばね定数 k にあたるのが $\dfrac{1}{C}$、質量 m にあたるのが L である。単振動の場合の解は $x=A\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\alpha)$ であるから、同様に、$q=A\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}+\alpha\right)$ が解となる。

初期値として、$Q=0(q=-CE), I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$ を取ったとすると、$q=-CE\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$、すなわち $Q=CE\left(1-\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ である。電流は $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{CE}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$ となる。直流電源であるにもかかわらず、電流は交流のような振動を続ける（現実的な場合は抵抗があるので、電流は 0 に収束していく)。電荷の方は 0 から $2CE$ までの間で振動する（抵抗がある場合なら、中間の値である CE に落ち着く)。
この時、コンデンサーのエネルギーは

$$\frac{Q^2}{2C}=\frac{CE^2}{2}\left(1-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)^2=\frac{CE^2}{2}\left(1-2\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+\cos^2\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{E.102}$$

コイルのエネルギーは

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{LC^2E^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)^2=\frac{CE^2}{2}\sin^2\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{E.103}$$

であり、この二つの和を取ると、

$$\begin{aligned}&\frac{CE^2}{2}\left(1-2\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+\cos^2\frac{t}{\sqrt{LC}}+\sin^2\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\\ =\ &CE^2\left(1-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)=QE\end{aligned} \tag{E.104}$$

となる。これは電池がした仕事に一致する。エネルギーはちゃんと保存している。

5.8 節の最後で、電池とコンデンサのみの回路ではエネルギーが保存しないように見える、→ p172という話をしたが、現実に抵抗のない回路があったとしても、自己インダクタンスがない回路はありえない。よってそのような理想的な回路は今考えようたような電池＋コンデンサ＋コイルの回路と考えるべきなのである。

5.8 節の最後ではコンデンサに電荷 CE が溜まった時、電池のした仕事 CE^2 に対しコン→ p172デンサに蓄えられたエネルギーは $\frac{1}{2}CE^2$ であり、一見電池のした仕事に比べてエネルギーが足りないように思えた。しかし、今の計算からわかるように、この時はまだ電流が流れている（電荷はいったん $2CE$ まで溜まる）。よってこの時はコイルもエネルギー $\frac{1}{2}LI^2$（計算するとちゃんと $\frac{1}{2}CE^2$ になる）を持つのである。

★【演習問題 12-1 】 .... （問題は p295、ヒントは p8w）

ヒントに書いた通り、ビオ・サバールの法則から求めた磁場は $\vec{H}=\frac{I}{4\pi r}\vec{\mathbf{e}}_\phi$ である。変位電流を取り入れたアンペールの法則で計算しよう。$z=0$ の面上に、半径 r の円を置いてそこをつらぬく電流（変位電流を含む）を考える。流れてきた電流は $z=0$ で止まるから、その場所に電荷 Q がたまり、$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I$ という関係を持っている。今考えている円を通り抜ける電束は、電荷 Q の出す電束のうち半分であるから、$\frac{Q}{2}$ である。これを時間微分すると、$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ の変位電流がこの円を通り抜けることになるから、アンペールの法則の周回積分の結果は

$$2\pi r H=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{I}{2} \tag{E.105}$$

となり、$H=\frac{I}{4\pi r}$ という同じ答が出る。

★【演習問題 12-2 】 .... （問題は p296、ヒントは p8w）

原点にある電荷を Q とすると、$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$ である。外向きの全電流を I とすると、距離 r のところの電流密度は球の表面積で割って $\vec{j}=\frac{I}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$ である（向きは外、つまり $\vec{\mathbf{e}}_r$ 方向を向いている）。よって、

$$\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{I}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{e}}_r+\frac{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{e}}_r=\frac{I+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{e}}_r \tag{E.106}$$

となる。Q が減少する分、外に向かって電流が流れ出すということを考えると、$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-I$ である（符号に注意。I を外向きに定義している）であるから、$\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ ということになる。

つまり $\mathrm{rot}\,\vec{H}=0$ であるから、磁場 $\vec{H}$ がいたるところで 0 であって、なんら矛盾はない。