付録 F

演習問題のヒントと解答

★【演習問題 1-1】のヒント . . . . （問題は p38、解答は p10w）

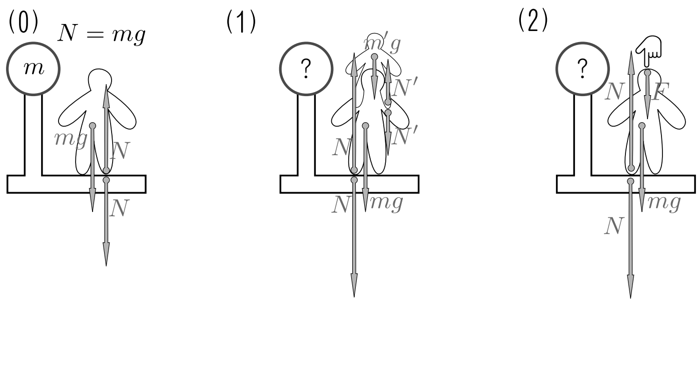
A さんが「手がちぎれそうだ！」と発言していることに注意しよう。つまり、犬と A さんの間の糸に働いている力を小さくするということをしてあげないと、A さんを助けたことにはならない。

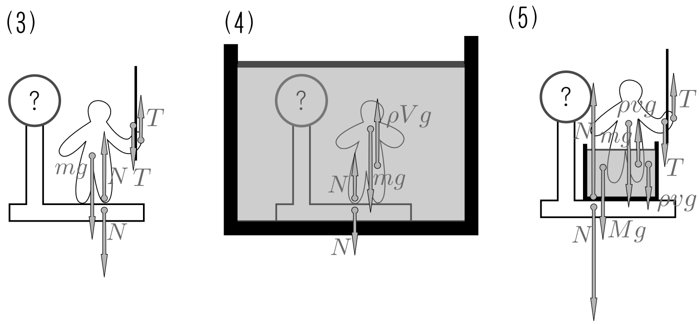
★【演習問題 1-2】のヒント . . . . （問題は p38、解答は p10w）

「両手で切るなら半分ずつ力を出せばよいから〜」と短絡的に考えてはいけない。ちゃんと絵を描こう。

★【演習問題 1-3】のヒント . . . . （問題は p38、解答は p10w）

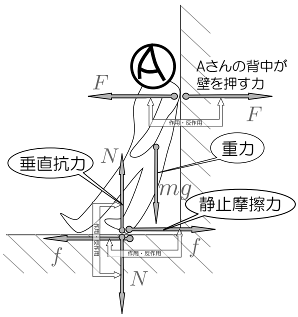
力の図は以下の通り。

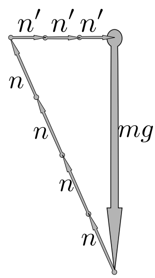




★【演習問題 2-1】のヒント .... (問題は p82、解答は p10w)

力の絵を描くと、下の左の図のようになる。





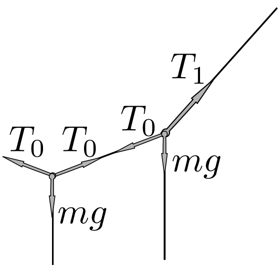
★【演習問題 2-2】のヒント .... (問題は p82、解答は p11w)

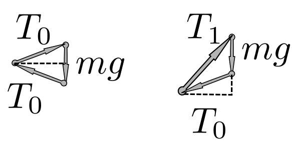
(1)　上の右の図のように、物体に働く力全てを足すと 0 になる、という図を書く。

(2)　右向きの力として $3n'$ にさらに F を加えてつりあいの式をつくる。n' は垂直抗力だから 0 以上でなくてはならない、という条件を置く。

★【演習問題 2-3】のヒント .... (問題は p82、解答は p11w)

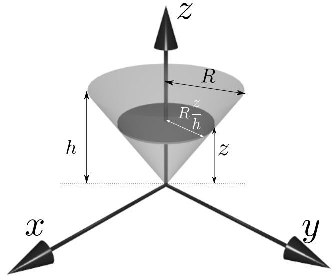
力の図は下のように描ける。左右対称な系なので、左半分は書いていない。





右につりあいのための条件（ベクトルが閉じること）を描いた。

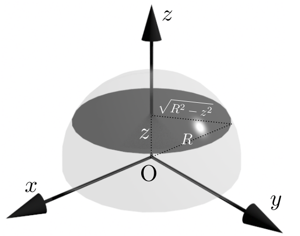
★【演習問題3-1】のヒント ……………………………… （問題は p114、解答は p11w）



右のように高さ h、底面の半径を R として、円錐の軸が z 軸に一致するようにしよう。ただし、右図のように逆さに立てた形で頂点を原点にする。

一般的計算としては(3.13)→ p103を使うのだが、図形に対称性がある場合はそれを使ってある程度計算を簡略化できる。円錐を高さ $\mathrm{d}z$ で半径が $R\dfrac{z}{h}$ の円柱を積み重ねたものと考えて、それぞれの円柱が質量 $\rho_{\mathbb{V}}\,\mathrm{d}z\,\pi\left(R\dfrac{z}{h}\right)^2$ を持っていると考えて積分する。

★【演習問題3-2】のヒント ……………………………… （問題は p114、解答は p11w）



右の図のように座標系を設定しよう。

3次元的な積分をしたくなるところだが、対称性を使うとある程度楽ができる。まず重心が図の z 軸上にあることは対称性からわかる。また、球を z 軸に平行な面でスライスして高さ $\mathrm{d}z$ の薄い円盤と考えると、この円盤の重心も z 軸にあり、その質量は $\rho_{\mathbb{V}}\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$ である。

★【演習問題3-3】のヒント ……………………………… （問題は p114、解答は p12w）

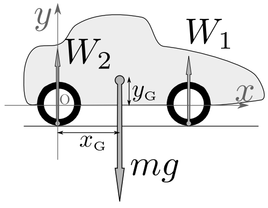
(1) α が θ より大きいことを言うには、壁との接触点を中心としたモーメントを考える。$\vec{F}_{壁}$ はこのモーメントに貢献しないから、重力と $\vec{F}_{床}$ のモーメントが消しあわななくてはいけないが？—β が $\dfrac{\pi}{2}+\theta$ より小さいことを言うには、逆に床との接触点を中心としたモーメントを考える。

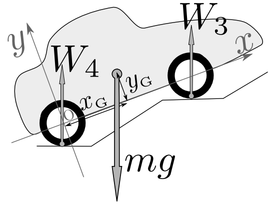
(2) 三つの力の作用線が1点で交わるのならば、その交点は重心の真上にあるはず。

(3) これは単純に図を描いて該当する部分を塗ってやればよい。

★【演習問題3-4】のヒント ……………………………… （問題は p114、解答は p12w）

下の図のように x 軸、y 軸を置いて、重心の座標を $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ とする。力と、力のモーメントのつりあいの式を作ってみよう。





★【演習問題4-1】のヒント ……………………………… （問題は p158、解答は p12w）

二つの物体の加速度が同じ（向きは逆）なのは、糸の長さが一定で決まっている以上、m が上昇した分、M が下がらなくてはいけないから。加速度の向きの（正と定義

された）方向の違いに注意せよ。例えば m に対する運動方程式において、T は正の向き、mg は負の向きである。

★【演習問題 4-2】のヒント .... （問題は p159、解答は p13w）

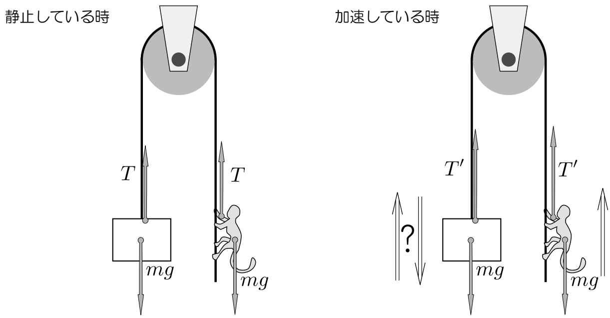
(1)　図を描いてつりあいの式を立てる。

(2)　糸の長さを考えよう。M に結び付けられた糸が ℓ だけ長くなったとしたら、m の上にある動滑車を吊るしている 2 本の糸はどれだけ短くなるか？

(3)　(2) の答と、加速度の向きに注意しながら運動方程式を立てる。

★【演習問題 4-3】のヒント .... （問題は p159、解答は p13w）

図は以下の通り。（猿が糸を引っ張る力が強くなることによって）糸の張力が mg より大きくなり、猿は上向きに加速する。その時、おもりの方に働く張力は連動する。



★【演習問題 4-4】のヒント .... （問題は p159、解答は p13w）

まず変数分離すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{K}-v^2}=\frac{K}{m}\,\mathrm{d}t$$

となる。$\dfrac{mg}{K}$ は速度の自乗と同じ次元を持っている量（後で意味がわかる）ので、V^2 という文字で置いて、

$$\frac{\mathrm{d}v}{V^2-v^2}=\frac{K}{m}\,\mathrm{d}t$$

としよう。

$$\frac{1}{V^2-v^2}=\frac{1}{(V+v)(V-v)}=\frac{1}{2V}\left(\frac{1}{V+v}+\frac{1}{V-v}\right)$$

のように因数分解した後分数を二つに分けると、積分ができる。

★【演習問題 5-1】のヒント .... （問題は p174、解答は p14w）

働く力は重力 $-mg\vec{\mathbf{e}}_z$ と垂直抗力 $N\vec{\mathbf{e}}_r$ である。この力はどちらも y 成分を持たないし、初速度も y 成分はないので、y 方向の運動は起こらない。よって、極座標では ϕ 方向の運動はないと考えられるので、3 次元の加速度の方程式で ϕ 方向を無視して式を作る。もしくは、最初から y 方向は考えないことにして $z=r\cos\theta, x=r\sin\theta$ という（通常とは直交座標との関係が少し違う）平面極座標を使って、運動方程式を立てれば

よい。どちらにしても、

$$m\left(\left(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2\right)\vec{\mathbf{e}}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{\mathbf{e}}_\theta\right)=-mg\vec{\mathbf{e}}_z+N\vec{\mathbf{e}}_r \tag{F.1}$$

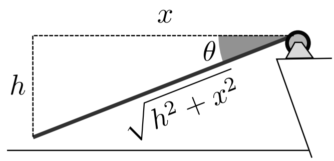
が運動方程式となる。球面に沿って動いているときは $r=R, \dot{r}=0, \ddot{r}=0$ である。

★【演習問題5-2】のヒント .... （問題は p174、解答は p15w）

(1) ボートが一定速度で動いているということは加速度が0であり、つりあいの式が成り立っている。

$$F\sin\theta+f \;=\; mg \tag{F.2}$$

$$F\cos\theta \;=\; kv \tag{F.3}$$



(2) 図で考えるという方法もあるし、右の図の距離 $\sqrt{x^2+h^2}$ を t で微分するという方法もある。

(3) 鉛直方向のつりあいの式が破れる。浮力 f が $f \geqq 0$ を満たさなくてはいけない。

★【演習問題6-1】のヒント .... （問題は p193、解答は p15w）

人間の重心はどんな運動をするだろう？？—そして、もし重心を持ちあげたいとしたらどうすればいいのだろう？

★【演習問題6-2】のヒント .... （問題は p193、解答は p15w）

最初の状態では半径 r_0 の水滴が速度 v_0 を持っている。今は半径 r の水滴が速度 v を持っているとして、運動量保存則を適用する。空気中の他の水滴は静止しているのだから運動量は0であり、計算に入ってこない。

★【演習問題6-3】のヒント .... （問題は p193、解答は p15w）

長さ L が空中にある場合を考えると、空中にある部分のひもに働く重力は $\rho_{\mathbb{L}}Lg$ であり、この部分が運動量 $\rho_{\mathbb{L}}Lv$ を持つ。微小時間 $\mathrm{d}t$ 後に、物体の速度は変わらないが、空中にある部分の長さが $L+v\,\mathrm{d}t$ になっている。ひものうち、まだ床と接している部分については垂直抗力と重力がつりあっていると考えて、考察から除外する。

★【演習問題6-4】のヒント .... （問題は p193、解答は p15w）

衝突面に平行な方向と垂直な方向に分けて考える。

平行な方向については、速度は変化しない。

垂直な方向に関しては、(6.19) → p183 の下に書いたように、二つの物体の速度が入れ替わる。

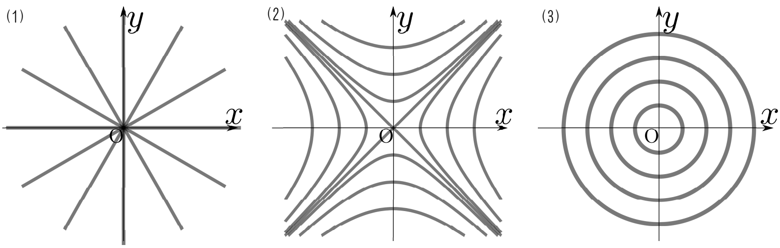
★【演習問題7-1】のヒント .... （問題は p229、解答は p15w）

【演習問題6-3】→ p15w の答から、力は $F=\rho_{\mathbb{L}}gL+\rho_{\mathbb{L}}v^2$ であった。L が0から L_1 まで変化したとして、これを積分すれば仕事がわかる。

一方、この時ひもの持っているエネルギーは $\dfrac{1}{2}\underbrace{\rho_{\mathbb{L}}L_1}_{m}v^2+\underbrace{\rho_{\mathbb{L}}L_1}_{m}g\underbrace{\dfrac{L_1}{2}}_{h}$ である。

★【演習問題7-2】のヒント .... （問題は p229、解答は p16w）

図は次の通りである。

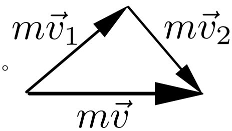


★【演習問題7-3】のヒント .... （問題は p229、解答は p16w）

噴射前のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$、噴射後のエネルギーは $\frac{1}{2}(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)^2+\frac{1}{2}(-\mathrm{d}m)(v-w)^2$ である。噴射後のエネルギーの方が、$-\epsilon\,\mathrm{d}m$ だけ大きい。このことから式を立てて、後は計算していく。途中で運動量保存から出た式(6.37) を使おう。
→ p191

★【演習問題7-4】のヒント .... （問題は p229、解答は p16w）

運動量のベクトル図というのは次の通り。



★【演習問題7-5】のヒント .... （問題は p229、解答は p16w）

最下点から π 回った場所で、十分な速度を持っていないと、糸がたるんでしまう。そのための条件は $T \geqq 0$ である。

★【演習問題8-1】のヒント .... （問題は p264、解答は p17w）

直方体については普通に積分すればよい。中空円筒は円筒座標を使って、ρ の積分は $\int_r^R \mathrm{d}\rho$ のように行う。

楕円体は、半径 R の球を考えて、x 方向に $\frac{a}{R}$ 倍、y 方向に $\frac{b}{R}$ 倍、z 方向に $\frac{c}{R}$ 倍したものと考えればよい。そう考えて $x=\frac{a}{R}r\sin\theta\cos\phi, y=\frac{b}{R}r\sin\theta\sin\phi, z=\frac{c}{R}r\cos\theta$ のような「定数倍された極座標系」を考えると、積分要素は通常の極座標の積分要素を $\frac{abc}{R^3}$ 倍すればよい。すなわち、$\frac{abc}{R^3}\int_0^R \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, r^2\sin\theta$ のような積分を行う。

★【演習問題8-2】のヒント .... （問題は p264、解答は p19w）

以下のように考えると間違いである。

「ターンテーブルと床の間に摩擦がないということは、人間とターンテーブルをまとめて一つの系として考えると、この系に働く外力は重力と床からの垂直抗力で、どちらも力のモーメントを作らないから、角運動量保存則からして、回転を起こすことはできないだろう。よって回れ右は不可能である」

角運動量保存則が禁止するのは、角運動量がない状態（最初はそうであった）が角運動量が0でない状態に変化することである。しかし、「回れ右して静止している状態」

は角運動量はやはり0であるから、角運動保存則からでは「回れ右はできない」と結論できない。

★【演習問題8-3】のヒント .... （問題はp264、解答はp19w）

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -k\vec{v} + f(r)\vec{\mathbf{e}}_r \tag{F.4}$$

である。両辺に左から $\vec{x}\times$ を掛けると、$\vec{x} \propto \vec{\mathbf{e}}_r$ なので、

$$\vec{x}\times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -k\vec{x}\times\vec{v} \tag{F.5}$$

となる。右辺は角運動量を使って表せる。

★【演習問題8-4】のヒント .... （問題はp264、解答はp19w）

力で比較すれば、垂直抗力が同じなら動摩擦力も同じであるから、力の面で優劣はない。しかし、回るということを考えると、力ではなく力のモーメントで比較したい。

★【演習問題8-5】のヒント .... （問題はp264、解答はp19w）

(1) 単純に角運動量の保存でよい。$I\omega$ と $I'\omega'$ の和が合体した後の角運動量。軸を一致させて合体しているから、合体後の慣性モーメントは $I+I'$ となる。

(2) 合体後の重心は二つの円盤の中心を $m:m'$ で内分した点に来る。よってこの点を中心とした角運動量が保存すると考えるとよい。この点を中心とした慣性モーメントは、$I + m\left(\frac{m}{m+m'}\ell\right)^2 + I' + m'\left(\frac{m'}{m+m'}\ell\right)^2$ となる。

★【演習問題9-1】のヒント .... （問題はp287、解答はp20w）

バネの長さは $x(t) - A\sin\omega t$ になるから、自然長からの伸びは $x(t) - A\sin\omega t - \ell$ である。これにバネ定数を掛けた力と、重力 mg がかかるとして運動方程式を立てる。

★【演習問題9-2】のヒント .... （問題はp287、解答はp21w）

特解を一つと、同次方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -kx(t) - K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

の解を求めればよい。特解は $x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ とおいて A を決める（複素数になる）。

★【演習問題10-1】のヒント .... （問題はp305、解答はp21w）

エネルギーが変化したということは、誰かが仕事をしたのである。等速運動だから、慣性力はないから、関係する力は、重力と垂直抗力しかない。

★【演習問題10-2】のヒント .... （問題はp305、解答はp21w）

北極で考えるので、コリオリ力については平面回転の式（(10.28)→ p298のうち、$2m\omega\vec{v}'\times\vec{\mathbf{e}}_z$ の方）を使えばよい。地球の自転の角速度は $\frac{2\pi}{24\times60\times60}$ と考えればよい。

★【演習問題11-1】のヒント .... （問題はp320、解答はp22w）

平衡点を表す式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r^2}\right) = 0 \tag{F.6}$$

に変わる。

★【演習問題11-2】のヒント .... （問題はp320、解答はp22w）

「マイナス質量だから重力も反重力になるから、落ちずに空中へ飛びあがる」と思った人は、間違いである。問題文にあるように、$ma=\frac{GMm}{r^2}$ の両辺のmが両方負にになる。

★【演習問題11-3】のヒント .... （問題はp320、解答はp22w）

働く力は図の通りであるが、質量が負のものは加速度が力と逆を向く。

運動量や運動エネルギーを考えるときは、式に入ってくるmも、負質量の物体の方は$-m$に置き換えなくてはいけない。

★【演習問題11-4】のヒント .... （問題はp320、解答はp22w）

つりあいの式

$$\frac{GM_1m}{(r_1)^3}\vec{r}_1+\frac{GM_2m}{(r_2)^3}\vec{r}_2+m\omega^2\vec{r}=0 \tag{F.7}$$

に、$-\vec{r}=\frac{M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}$ を使うと、

$$\left(\frac{GM_1m}{(r_1)^3}-\frac{M_1m}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_1+\left(\frac{GM_2m}{(r_2)^3}-\frac{M_2m}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_2=0 \tag{F.8}$$

という式が出るので、これを計算していく。$\vec{r}_1$と$\vec{r}_2$は違う方向を向いている（今はθが0でもπでもない）ので、ベクトルとして0になるためには各係数が0になる必要がある。

★【演習問題11-5】のヒント .... （問題はp321、解答はp23w）

まずαとϕの関係を整理しておく。x座標が $\frac{r_0\cos\phi}{1+\epsilon\cos\phi}=a\cos\alpha-a\epsilon$ を満たすことから

$$\begin{aligned}r_0\cos\phi=&\ (a\cos\alpha-a\epsilon)(1+\epsilon\cos\phi)\\ \underbrace{a(1-\epsilon^2)}_{r_0}\cos\phi-(a\cos\alpha-a\epsilon)\epsilon\cos\phi=&\ a\cos\alpha-a\epsilon\\ \cos\phi=&\ \frac{\cos\alpha-\epsilon}{1-\epsilon\cos\alpha}\end{aligned} \tag{F.9}$$

が導けるので、

$$1+\epsilon\cos\phi=\frac{1-\epsilon\cos\alpha+\epsilon\cos\alpha-\epsilon^2}{1-\epsilon\cos\alpha}=\frac{1-\epsilon^2}{1-\epsilon\cos\alpha} \tag{F.10}$$

と書きなおしておく。また、

$$\epsilon+\cos\phi=\frac{\epsilon-\epsilon^2\cos\alpha+\cos\alpha-\epsilon}{1-\epsilon\cos\alpha}=\frac{(1-\epsilon^2)\cos\alpha}{1-\epsilon\cos\alpha} \tag{F.11}$$

である。次に $\mathrm{d}\alpha$ と $\mathrm{d}\phi$ の関係を作るために、

$$
\begin{aligned}
b\sin\alpha &= \frac{r_0\sin\phi}{1+\epsilon\cos\phi} \quad \text{(微分)}\\
b\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha &= \frac{r_0\cos\phi}{1+\epsilon\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{r_0\epsilon\sin^2\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi \\
b\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha &= \frac{r_0(\epsilon+\cos\phi)}{(1+\epsilon\cos\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
\tag{F.12}
$$

という微分を行う。この式に、$\epsilon+\cos\phi = \dfrac{(1-\epsilon^2)\cos\alpha}{1-\epsilon\cos\alpha}$ を代入すれば、

$$
b\cancel{\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{(1-\epsilon^2)\cancel{\cos\alpha}}{1-\epsilon\cos\alpha}\times\frac{r_0}{(1+\epsilon\cos\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{F.13}
$$

という式が出る。解くべき微分方程式は $\dfrac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\phi = \dfrac{L}{2\mu}\,\mathrm{d}t$ だから、この形になるように両辺に $\dfrac{r_0(1-\epsilon\cos\alpha)}{2(1-\epsilon^2)}$ を掛けて、

$$
\frac{br_0(1-\epsilon\cos\alpha)}{2(1-\epsilon^2)}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{(r_0)^2}{(1+\epsilon\cos\phi)^2}}_{r^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{F.14}
$$

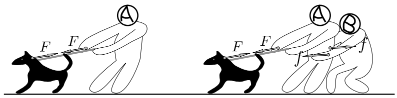
がわかる。

★【演習問題 11-6】のヒント .... （問題は p321、解答は p23w）

　二つの考え方がヒントになる。一つは「相対運動だから換算質量を使わなくては！」ということ。もう一つは「万有引力は地球も引っぱるのでは？」ということ（もちろんこの二つは同じことを言っている）。

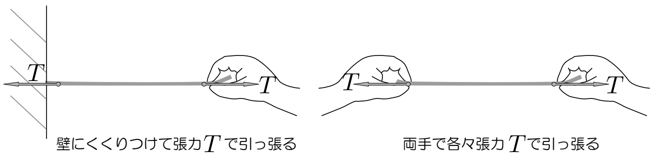
以下は解答編

★【演習問題 1-1】の解答 .... （問題は p38、ヒントは p1w）



図に左右方向の力を書き込んでみると右のようになる。B さんがいようといまいと、A さんの手にかかる力（これは犬を引っ張る力と同じ大きさになる）は変化していない。よって「手がちぎれそうだ」という A さんの問題については、B さんは何ら寄与していない。助けたいならば、一緒に糸を持ってあげないとダメである。逆に、もし A さんが「足がすべりそうだ！」と叫んでいたら、B さんはその問題を軽くすることに貢献している。

★【演習問題 1-2】の解答 .... （問題は p38、ヒントは p1w）



図を描いてみるとわかるように、壁にくくりつけた場合も両手で持った場合も、糸の立場で見れば「両端を T で引っ張られている」という状況は全く変わらない。よってどちらも、同じ力で糸が切れる。

★【演習問題 1-3】の解答 .... （問題は p38、ヒントは p1w）

(1) 上にいる人（子供）についてのつりあいの式が $m'g = N'$、下の人についてのつりあいの式が $N = mg + N'$。よって、$N = (m + m')g$ なので、秤の読みは $m + m'$。肩車している人の分も体重として計測される、という当然の結果。

(2) つりあいの式は $N = mg + F$ なので、秤の読みは $m + \dfrac{F}{g}$。押された分重くなる。

(3) つりあいの式は $N + T = mg$ なので、秤の読みは $m - \dfrac{T}{g}$。ひもを引っ張った分引っ張られて、その分軽くなる。

(4) つりあいの式は $N + \rho V g = mg$ なので、秤の読みは $m - \rho V$。ただし、もし $\rho V > m$ ならそもそも浮いてしまって、秤と人が接触すらしないから、その時は読みは 0。

(5) 人のつりあいの式は $T + \rho v g = mg$。水と水槽のつりあいの式は $Mg + \rho v g = N$（人に働く浮力の反作用が水に働いていることを忘れてはいけない）。よって $N = Mg + mg - T$ となり、秤のよみは $M + m - \dfrac{T}{g}$ である。

★【演習問題 2-1】の解答 .... （問題は p82、ヒントは p2w）

A さんが静止しているということは、壁が背中を押す力 F と、床からの静止摩擦力 f

がつりあっているということである。ということは、壁と床（この二つは一体となっている）に働く水平方向の力である右向きのFと左向きのfもつりあってしまい、壁＋床は静止を続ける。

★【演習問題 2-2】の解答 .... （問題は p82、ヒントは p2w）

(1) ヒントに書いた図より、$3n' = mg\tan\theta, 4n = \dfrac{mg}{\cos\theta}$となり、$n' = \dfrac{mg\tan\theta}{3}, n = \dfrac{mg}{4\cos\theta}$と求められる。

(2) 水平のつりあいの式が$3n' + F = mg\tan\theta$と変わるので、$n' = \dfrac{mg\tan\theta - F}{3}$となる。これが0以上であるためには$F \leqq mg\tan\theta$でなくてはならない。これはあたかも、静止摩擦係数が$\tan\theta$になっているかのように思える。

★【演習問題 2-3】の解答 .... （問題は p82、ヒントは p2w）

ヒントの図を見ると、T_0の鉛直成分は$\dfrac{1}{2}mg$でなくてはいけないこと、T_1の鉛直成分はT_0の鉛直成分よりmg大きくなくてはいけないことが見て取れる。よってT_1の鉛直成分はT_0の鉛直成分の3倍となる。相似より、$y_1 : y_2 = T_0$の鉛直成分 : T_1の鉛直成分 だから、$y_1 : y_2 = 1 : 3$である。

左右に重りを増やしていくと、張力の鉛直成分がmgずつ増えていくと考えればよいから、

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : \cdots = 1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$$

となるだろうと予想される。

★【演習問題 3-1】の解答 .... （問題は p114、ヒントは p3w）

ヒントに書いた積分の結果は

$$z_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\int_0^h \rho_{\mathbb{V}}\,\mathrm{d}z\,\pi\left(R\frac{z}{h}\right)^2 z = \frac{1}{M}\rho_{\mathbb{V}}\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \underbrace{\int_0^h \mathrm{d}z\,z^3}_{\frac{h^4}{4}} = \frac{\rho_{\mathbb{V}}\pi R^2 h^2}{4M} \tag{F.15}$$

となる。質量Mが$\dfrac{\rho_{\mathbb{V}}\pi R^2 h}{3}$であることを考えると、この量は$\dfrac{3}{4}h$である。三角形では高さを2:1に内分した点にあったが、円錐では高さを3:1に内分した点になる。予想はあたったであろうか？—三角形に比べて円錐は「底面部分がより**重い**」と気づいていれば正しい予想ができたはず。

★【演習問題 3-2】の解答 .... （問題は p114、ヒントは p3w）

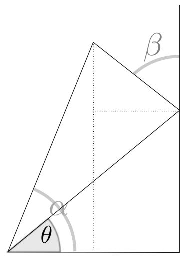
ヒントに書いた通り、微小円盤の質量が$\rho_{\mathbb{V}}\pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$であるから、これに$z$をかけて積分する。

$$\int_0^R \rho_{\mathbb{V}}\pi(R^2 - z^2)z\,\mathrm{d}z = \rho_{\mathbb{V}}\pi\int_0^R (R^2 z - z^3)\,\mathrm{d}z = \rho_{\mathbb{V}}\pi\left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho_{\mathbb{V}}\pi R^4}{4} \tag{F.16}$$

これを半球の全質量$M = \rho_{\mathbb{V}}\dfrac{2\pi R^3}{3}$で割ると、重心の$z$座標は$\dfrac{3R}{8}$となる。

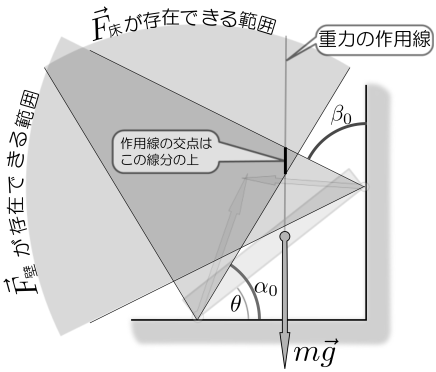
★【演習問題3-3】の解答 .... （問題はp114、ヒントはp3w）

(1) 壁との接触点を中心とした力のモーメントを考えると、$\vec{F}_{壁}$ は貢献しない（距離が0だから）。重力は反時計回りのモーメント。これを打ち消すべく $\vec{F}_{床}$ が時計回りのモーメントを作るためには、$\alpha > \theta$。床との接触点を中心とした力のモーメントを考えると、今度は重力が時計回りのモーメントを作るから、これを打ち消すべく、$\vec{F}_{壁}$ が反時計回りのモーメントを作らなくてはいけない。ゆえに $\beta < \dfrac{\pi}{2} + \theta$。



(2) 右図を見て考えよう。$\tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\beta} = 2\tan\theta$ となっている。

(3) 次の図の通り。



★【演習問題3-4】の解答 .... （問題はp114、ヒントはp3w）

水平の時の力のつりあいの式は $mg = W_1 + W_2$。モーメントのつりあいの式は $x_{\rm G} mg = LW_1$。

斜めの時の力のつりあいの式は $mg = W_3 + W_4$。モーメントのつりあいの式は $(x_{\rm G}\cos\theta - y_{\rm G}\sin\theta)mg = L\cos\theta W_3$。この四つの式から $x_{\rm G}$ と $y_{\rm G}$ を求める。答は

$$x_{\rm G} = \frac{L}{mg}W_1,\quad y_{\rm G} = \frac{L}{mg}\cot\theta(W_1 - W_3)$$

となる。

★【演習問題4-1】の解答 .... （問題はp158、ヒントはp3w）

運動方程式は

$$ma = T - mg \tag{F.17}$$

$$Ma = Mg - T \tag{F.18}$$

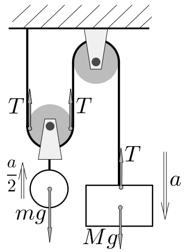
の二つ。辺々加えることで、

$$(M+m)a = (M-m)g \tag{F.19}$$

となるので、$a = \dfrac{M-m}{M+m}g$ である。

★【演習問題 4-2】の解答 .... （問題は p159、ヒントは p4w）

図は右のように描ける。



(1) つりあいの式は $T = Mg$ と $2T = mg$ なので、$2M = m$ という関係がある。

(2) M が糸を ℓ 引いたとすると、m は糸に $\dfrac{\ell}{2}$ しか引かれない。よって、加速度も半分になり、$\dfrac{a}{2}$ となる。

(3) 運動方程式は $Ma = Mg - T$ と $m\dfrac{a}{2} = 2T - mg$ である。これから T を消去すると、$\left(M + \dfrac{m}{4}\right)a = \left(M - \dfrac{m}{2}\right)g$。よって $a = \dfrac{M - \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{4}}g = \dfrac{4M-2m}{4M+m}g$ となる。

★【演習問題 4-3】の解答 .... （問題は p159、ヒントは p4w）

ヒントに書いたとおり、糸の張力が大きくなるのだからおもりも上向きに加速を開始する。つまり答は (B) である。

★【演習問題 4-4】の解答 .... （問題は p159、ヒントは p4w）

ヒントの続きから計算しよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{2V}\left(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v}\right) &= \frac{K}{m}\,\mathrm{d}t && \text{（積分して）}\\
\frac{1}{2V}\left(-\log|V-v| + \log|V+v|\right) &= \frac{K}{m}t + C && \text{（整理して）}\\
\log\left|\frac{V-v}{V+v}\right| &= -\frac{2KV}{m}t + C' && \text{（両辺を exp の肩に）}\\
\left|\frac{V-v}{V+v}\right| &= C''\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}
\end{aligned}
\tag{F.20}
$$

$t=0$ で $v=v_0$ なので、

$$\left|\frac{V-v}{V+v}\right| = \left|\frac{V-v_0}{V+v_0}\right|\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t} \tag{F.21}$$

のように積分定数を定める。これで、時刻 $t=\infty$ において $v=V$ となることがわかったので、V は終端速度であったことになる。絶対値が面倒に見えるが、この式の両辺は（$V=v_0$ の場合を除いて）どちらもけっして 0 にはならないし、$t=\infty$ を除いて ∞ にもならない（$V=v_0$ の時は両辺とも 0 のまま変化なし）。ということは $V-v$ の符号

は変わることがない。つまり $V-v$ の符号と $V-v_0$ の符号は同じであるから、絶対値は外してよい。

後は v を求めるだけ。

$$
\begin{aligned}
V-v =& \ (V+v)\frac{V-v_0}{V+v_0}\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t} \\
v\left(-1-\frac{V-v_0}{V+v_0}\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}\right) =& \ V\left(-1+\frac{V-v_0}{V+v_0}\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}\right) \\
v =& \ V\frac{1-\frac{V-v_0}{V+v_0}\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}}{1+\frac{V-v_0}{V+v_0}\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}} = V\frac{V+v_0-(V-v_0)\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}}{V+v_0+(V-v_0)\mathrm{e}^{-\frac{2KV}{m}t}}
\end{aligned}
\tag{F.22}
$$

★【演習問題 5-1】の解答 .... （問題は p174、ヒントは p4w）

$$
m\left(-R(\dot\theta)^2\vec{\mathbf{e}}_r+R\ddot\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta\right)=-mg\vec{\mathbf{e}}_z+N\vec{\mathbf{e}}_r \tag{F.23}
$$

を解く。r 成分を取り出すために両辺を $\vec{\mathbf{e}}_r$ と内積を取ると、$\vec{\mathbf{e}}_r\cdot\vec{\mathbf{e}}_z=\cos\theta$ なので、

$$
-mR(\dot\theta)^2=-mg\cos\theta+N \tag{F.24}
$$

となる。θ 成分の方は $\vec{\mathbf{e}}_\theta\cdot\vec{\mathbf{e}}_z=-\sin\theta$ なので、

$$
mR\ddot\theta=mg\sin\theta \tag{F.25}
$$

であるから、まず両辺に $\dot\theta$ をかけて積分して、

$$
\frac{1}{2}mR\left(\dot\theta\right)^2=-mg\cos\theta+C \tag{F.26}
$$

$\theta=0$ において $R\dot\theta=v_0$ なので、

$$
\frac{1}{2R}m\left(v_0\right)^2=-mg+C \tag{F.27}
$$

より、$C=\dfrac{1}{2R}m\left(v_0\right)^2+mg$ として、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mR\left(\dot\theta\right)^2 =& \ mg(1-\cos\theta)+\frac{1}{2R}m(v_0)^2 \\
\left(\dot\theta\right)^2 =& \ \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)+\frac{1}{R^2}(v_0)^2
\end{aligned}
\tag{F.28}
$$

これを r 成分の方の式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
-mR\left(\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)+\frac{1}{R^2}(v_0)^2\right) =& \ -mg\cos\theta+N \\
-mR\left(\frac{g}{R}(2-3\cos\theta)+\frac{1}{R^2}(v_0)^2\right) =& \ N
\end{aligned}
\tag{F.29}
$$

球面から離れるのは $N=0$ の時だから、$\cos\theta=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3gR}(v_0)^2$ の時。

★【演習問題5-2】の解答 ………………………………… (問題は p174、ヒントは p5w)

(1) ヒントのつりあいの式より、$F=\dfrac{kv}{\cos\theta}$ で、角度 θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で増えていく間は $\cos\theta$ は減っていくので、力 F は増えていく。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+h^2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cos\theta$ である。

(3) $F=\dfrac{kv}{\cos\theta}$ を鉛直方向のつりあいの式に代入すると、

$$kv\tan\theta+f=mg \quad \text{より} \quad f=mg-kv\tan\theta \tag{F.30}$$

である。$\tan\theta$ はどんどん大きくなっていくから、$mg<kv\tan\theta$ となると、f が負にならないとつりあいが保てない。浮力が負になることはないから、ここでボートが空中に持ち上げられてしまう。

★【演習問題6-1】の解答 ………………………………… (問題は p193、ヒントは p5w)

人間が足を上下する時に働く胴体から足に働く力は人間にとって内力であり、その反作用（足から胴体に働く力）も考えると、けっして人間の重心を加速できない。よって人間の重心は（じたばたしたところで関係なく）落下していく。落下しないようにするには「外力」を出すしかなく、水面を蹴る力をよほど強くして、足が水を押す力の反作用（水が足を押す力）で落ちないようにするしかない。

★【演習問題6-2】の解答 ………………………………… (問題は p193、ヒントは p5w)

運動量保存則より、水の密度を D とすると、

$$D\frac{4\pi(r_0)^3}{3}v_0=D\frac{4\pi r^3}{3}v \tag{F.31}$$

という式が成り立つので、$v=v_0\times\dfrac{(r_0)^3}{r^3}$ となる。

★【演習問題6-3】の解答 ………………………………… (問題は p193、ヒントは p5w)

（力積）＝（運動量の変化）と考えると、手の力を F として、

$$(F-\rho_{\mathbb{L}}gL)\,\mathrm{d}t=\rho_{\mathbb{L}}(L+v\,\mathrm{d}t)v-\rho_{\mathbb{L}}Lv \tag{F.32}$$

より、力は $F=\rho_{\mathbb{L}}gL+\rho_{\mathbb{L}}v^2$ となる。

★【演習問題6-4】の解答 ………………………………… (問題は p193、ヒントは p5w)

衝突面に垂直な方向に関しては、ぶつかってきた方が静止（この成分の速度が0）になり、ぶつかられた方がその速度を持って運動する。

衝突面に平行な方向の速度は変化しないから、ぶつかってきた方の物体は、衝突面に平行な方向に同じ速度で運動続ける。

つまり、ぶつかってきた方は衝突面に平行に、ぶつかられた方は衝突面に垂直に運動するので、二つの速度は垂直である。

★【演習問題7-1】の解答 ………………………………… (問題は p229、ヒントは p5w)

仕事は $\displaystyle\int_0^{L_1}(\rho_{\mathbb{L}}gL+\rho_{\mathbb{L}}v^2)\,\mathrm{d}L=\left[\rho_{\mathbb{L}}g\frac{L^2}{2}+\rho_{\mathbb{L}}Lv\right]_0^{L_1}=\rho_{\mathbb{L}}\left(\frac{g(L_1)^2}{2}+v^2L_1\right)$ とな

る。重心の高さhが$\dfrac{L_1}{2}$であること、この時の物体の空中にある部分の質量が$m=\rho_{\mathbb{L}}L_1$であることを使うと、この仕事は$mgh+mv^2$となる。

仕事よりも得られたエネルギーの方が小さいので、エネルギーが$\dfrac{1}{2}mv^2$だけ損をしたことになる。これはこのひもが鎖だと思って、「速さvで上昇する鎖」と「床で静止している鎖」が完全非弾性衝突したことによってエネルギーが失われたと考えるとわかる。

★【演習問題 7-2】の解答 .... （問題は p229、ヒントは p5w）

図はヒントに書いた。(1) と (2) は保存力だが (3) は保存力ではない。rot $\vec{F}$が0ではない。図で見ても、ぐるぐる回ることでいくらでも正の仕事をしてもらえるようになっている。

★【演習問題 7-3】の解答 .... （問題は p229、ヒントは p6w）

エネルギーの式は

$$\frac{1}{2}mv^2-\epsilon\,\mathrm{d}m=\frac{1}{2}(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)^2+\frac{1}{2}(-\mathrm{d}m)(v-w)^2 \tag{F.33}$$

となる。これを簡単にしていくと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2-\epsilon\,\mathrm{d}m &=\frac{1}{2}m(v^2+2v\,\mathrm{d}v)+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v^2+\frac{1}{2}(-\mathrm{d}m)(v^2-2vw+w^2)\\ -\epsilon\,\mathrm{d}m &=mv\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}m\,vw-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,w^2\end{aligned} \tag{F.34}$$

となるが、運動量保存から出る式(6.37)→ p191が$m\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}m\,w=0$であったから、

$$-\epsilon\,\mathrm{d}m=-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,w^2 \tag{F.35}$$

となり、$\epsilon=\dfrac{1}{2}w^2$とわかる。6.5 節の最後で→ p192、「ロケットの性能は噴射速度wをいかに速くできるかに大きく依存する」と書いたが、噴射速度はエネルギー保存則が決めている。エネルギーには必ずなんらかの損失があるので、実際の速度はここで示したwより遅くなる。

★【演習問題 7-4】の解答 .... （問題は p229、ヒントは p6w）

エネルギー保存則$\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m(v_1)^2+\dfrac{1}{2}m(v_2)^2$が満たされていれば、ヒントに書いた図の三角形は三平方の定理を満たし$((mv)^2=(mv_1)^2+(mv_2)^2)$、直角三角形である。

★【演習問題 7-5】の解答 .... （問題は p229、ヒントは p6w）

最下点からの高さℓのところから運動を開始したとすると、最下点からπ回った時の速度をvとした時、

$$mg\ell=2mgr+\frac{1}{2}mv^2\quad より、\quad v^2=g\,(2\ell-4r) \tag{F.36}$$

が成立する。一方、その場所での運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = T + mg \tag{F.37}$$

で、$T \geqq 0$ でなくてはならない。

$$T = m\frac{v^2}{r} - mg = \frac{mg(2\ell - 4r)}{r} - mg = \frac{mg(2\ell - 5r)}{r} \tag{F.38}$$

なので、最下点から、$\frac{5}{2}r$ より高いところでなくてはいけない。

★【演習問題8-1】の解答 .... (問題は p264、ヒントは p6w)

直方体 I_{xx} の計算を示す。I_{yy}, I_{zz} は $(x,y,z)(a,b,c)$ を取り替えるだけである。

$$\begin{aligned}
I_{xx} =& \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x}_{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \mathrm{d}z\, \rho_{\mathbb{V}}(y^2+z^2) = \rho_{\mathbb{V}} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \mathrm{d}z\, (y^2+z^2) \\
=& \rho_{\mathbb{V}} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \left[y^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho_{\mathbb{V}} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \left(y^2 c + \frac{c^3}{12}\right) \\
=& \rho_{\mathbb{V}} a \left[\frac{y^3 c}{3} + y\frac{c^3}{12}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho_{\mathbb{V}} a \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{bc^3}{12}\right) = \frac{\rho_{\mathbb{V}} abc}{12}(b^2+c^2)
\end{aligned} \tag{F.39}$$

$\rho_{\mathbb{V}} abc = M$ として、$I_{xx} = \frac{M(b^2+c^2)}{12}$ を得る。

なお、$I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{zx} = I_{xz}$ については、積分式を書いてみれば奇関数の積分となっているので 0 であることがすぐにわかる。これは他の形に対しても同様なので省略する。

中空円筒

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \rho_{\mathbb{V}} \int_r^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z\, \rho((\underbrace{\rho\sin\phi}_{y})^2 + z^2) \\
&= \rho_{\mathbb{V}} \int_r^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left[z\rho^3 \sin^2\phi + \frac{z^3\rho}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
&= \rho_{\mathbb{V}} \int_r^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left(h\rho^3 \sin^2\phi + \frac{h^3}{12}\rho \right) \\
&= \rho_{\mathbb{V}} \int_r^R \mathrm{d}\rho \left(\pi h\rho^3 + \frac{\pi h^3}{6}\rho \right) \\
&= \pi\rho_{\mathbb{V}} \left[\frac{h\rho^4}{4} + \frac{h^3}{12}\rho^2 \right]_r^R \\
&= \pi\rho_{\mathbb{V}} \left(\frac{h}{4}(R^4 - r^4) + \frac{h^3}{12}(R^2 - r^2) \right) = \underbrace{\pi\rho_{\mathbb{V}}(R^2 - r^2)h}_{M} \left(\frac{1}{4}(R^2 + r^2) + \frac{h^2}{12} \right)
\end{aligned}
\tag{F.40}
$$

I_{yy} は $\sin^2\theta \to \cos^2\theta$ と変わるだけで同じ。

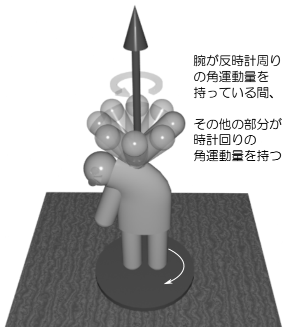
$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho_{\mathbb{V}} \int_r^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z\, \rho(\underbrace{x^2 + y^2}_{\rho^2}) \\
&= \rho_{\mathbb{V}} \underbrace{\int_r^R \mathrm{d}\rho\, \rho^3}_{\frac{R^4 - r^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z}_{h} \\
&= \frac{\pi\rho_{\mathbb{V}}}{2}(R^4 - r^4)h = \frac{1}{2} \underbrace{\pi\rho_{\mathbb{V}}(R^2 - r^2)h}_{M}(R^2 + r^2)
\end{aligned}
\tag{F.41}
$$

楕円体

$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{abc}{R^3} \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\theta((\underbrace{\frac{a}{R} r\sin\theta\cos\phi}_{x})^2 + (\underbrace{\frac{b}{R} r\sin\theta\sin\phi}_{y})^2) \\
&= \frac{abc}{R^5} \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r^4 \sin^3\theta (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi) \\
&= \frac{abc}{R^5} \underbrace{\int_0^R \mathrm{d}r\, r^4}_{\frac{R^5}{5}} \underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin^3\theta}_{\frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)}_{\pi(a^2 + b^2)} \\
&= \frac{\frac{4}{3}\pi abc}{5}(a^2 + b^2) = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)
\end{aligned}
\tag{F.42}
$$

I_{xx}, I_{yy} に関しては a, b, c の立場を入れ替えて、$I_{xx} = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), I_{yy} = \frac{M}{5}(a^2 + c^2)$ となる。

★【演習問題8-2】の解答 ……………………………… （問題は p264、ヒントは p6w）



いろいろな方法があるが、一番単純なのは、背中を曲げて手を水平にして（ヘリコプターのロータのように）ぐるぐる回せばよい（体が逆方向に回る）。こうすると、つねに角運動量が0の状態を保ったまま、自分の位置を変えることができる。腕が角運動量を持っている間、腕以外の部分がちょうど打ち消すだけの角運動量を持つからである（腕を止めると身体も止まる）。ここではターンテーブルの質量が0であるとして考えたのでできなかったが、足でターンテーブルを蹴って回し、自分がその反動で逆向きに回る、という方法もある。ターンテーブルの慣性モーメントが自分の10分の1であったなら、ターテーブルが1800度回った時には自分は180度回っている。他にも、(1) まず右手を上に上げる (2) その手を自分の真右にくるまで90度回す (3) その手を水平に90度回して自分の前にもってくる。(4) 右手を縮める（最初に戻る）という操作を繰り返してもよい。(3) だけが z 軸回りの角運動量を伴う。

★【演習問題8-3】の解答 ……………………………… （問題は p264、ヒントは p7w）

ヒントから

$$\underbrace{\vec{x}\times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}} = -\frac{k}{m}\underbrace{\vec{x}\times m\vec{v}}_{\vec{L}} \tag{F.43}$$

と書ける。$\vec{L}$ の時間変化が $\vec{L}$ に比例するので、$\vec{L}$ の向きは変わらない。ということは運動は常に $\vec{L}$ に垂直な平面上で起こる。

また、(F.43) を解いて、

$$\vec{L} = \vec{L}_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{F.44}$$

とわかる。

★【演習問題8-4】の解答 ……………………………… （問題は p264、ヒントは p7w）

力が同じであっても、回転の中心軸からの距離が長くなればモーメントは増える。先端を尖らせることは、軸の中心から接している面までの距離をできる限り短く（理想的には0に）したいからである。

★【演習問題8-5】の解答 ……………………………… （問題は p264、ヒントは p7w）

(1) 最終的な角速度を ω_1 とすると、$I\omega + I'\omega' = (I+I')\omega_1$ より、$\omega_1 = \dfrac{I\omega + I'\omega'}{I+I'}$。

(2) 最終的な角速度を ω_2 とすると、

$$I\omega + I'\omega' = \left(I + m\left(\frac{m'}{m+m'}\ell\right)^2 + I' + m'\left(\frac{m}{m+m'}\ell\right)^2\right)\omega_2$$

より、

$$\omega_2 = \frac{I\omega + I'\omega'}{I + I' + \frac{mm'}{m+m'}\ell^2}$$

である（ここでも換算質量が現れる）。

★【演習問題9-1】の解答 （問題は p287、ヒントは p7w）

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -k(x(t) - A\sin\omega t - \ell) + mg \tag{F.45}$$

である。特解として、$x(t) = C\sin\omega t + \ell + \dfrac{mg}{k}$ という形を仮定すると、

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(C\sin\omega t + \cancel{\ell + \frac{mg}{k}}\right) &= -k(C\sin\omega t + \cancel{\ell + \frac{mg}{k}} - A\sin\omega t - \cancel{\ell}) + \cancel{mg} \\
-mC\omega^2\cancel{\sin\omega t} &= -k(C-A)\cancel{\sin\omega t} \\
(k - m\omega^2)C &= kA
\end{aligned} \tag{F.46}$$

と計算して $C = \dfrac{kA}{k - m\omega^2}$ と求められる。こうして求めた特解に同次方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = -ky(t) \tag{F.47}$$

の一般解 $y(t) = D\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \alpha\right)$ を足したもの

$$x(t) = \frac{kA}{k - m\omega^2}\sin\omega t + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) + \ell + \frac{mg}{k}$$

が運動方程式の解である。

境界条件は $t = 0$ において速度 0 で、つりあいの位置にいたことである。つりあいの位置は $A\sin\omega t$ がない場合に加速度が 0 になるところだから、$x = \ell + \dfrac{mg}{k}$ である。速度を求めると

$$v(t) = \frac{kA\omega}{k - m\omega^2}\cos\omega t + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \tag{F.48}$$

なので、初期条件は、

$$\ell + \frac{mg}{k} = D\sin\alpha + \ell + \frac{mg}{k} \tag{F.49}$$

$$0 = \frac{kA\omega}{k - m\omega^2} + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\alpha \tag{F.50}$$

である。$D \neq 0$ だから $\sin\alpha = 0$ となり、$\cos\alpha = \pm 1$ である。一方初速度の式から $D\cos\alpha = -\dfrac{kA\omega}{k - m\omega^2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ とわかるので、

$$x(t) = \frac{kA}{k - m\omega^2}\sin\omega t - \frac{kA\omega}{k - m\omega^2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \ell + \frac{mg}{k}$$

とわかる。

★【演習問題9-2】の解答 ………………………………… （問題は p287、ヒントは p7w）

特解を求めるために、運動方程式に $x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ を代入してみる。

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} &= -kA\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + F\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ -m\omega^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} &= -kA\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega KA\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + F\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ -m\omega^2 A - F &= -kA - \mathrm{i}\omega KA \\ \frac{F}{k - m\omega^2 + \mathrm{i}\omega K} &= A \end{aligned} \tag{F.51}$$

これで特解は求められた。一般解は9.4 節→ p277の解を使えばよい。よってこの問題の解は

$$\begin{aligned} x(t) = &\begin{cases} C_1\mathrm{e}^{-\left(\frac{K-\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}\right)t} + C_2\mathrm{e}^{-\left(\frac{K+\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}\right)t} & K^2-4mk<0\text{ の時} \\ (C_3t+C_4)\mathrm{e}^{-\frac{K}{2m}t} & K^2-4mk=0\text{ の時} \\ C_5\mathrm{e}^{-\left(\frac{K-\sqrt{K^2-4mk}}{2m}\right)t} + C_6\mathrm{e}^{-\left(\frac{K+\sqrt{K^2-4mk}}{2m}\right)t} & K^2-4mk>0\text{ の時} \end{cases} \\ &+\frac{F}{k-m\omega^2+\mathrm{i}\omega K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{F.52}$$

となる。この式は $k = m\omega^2$ であっても（分母が0になったりせず）成り立つ式になっている。

★【演習問題10-1】の解答 ………………………………… （問題は p305、ヒントは p7w）

重力の仕事はすでに mgh として計算済み。問題は垂直抗力がこの場合には仕事をする、ということである。一般に垂直抗力が仕事をしないことが多いのは、運動方向と垂直に働いているから。しかしいまの場合、斜面そのものが動いているので、垂直抗力は仕事をする。その仕事を計算してみると、

$$W = \vec{N}\cdot\vec{V}t = NVt\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = NVt\sin\theta \tag{F.53}$$

である。一方、$N = mg\cos\theta$ であるから、この仕事は $mgVt\cos\theta\sin\theta$ と書くことができる。ところが $g\sin\theta\times t = v$ なので、

$$W = mvV\cos\theta = m\vec{v}\cdot\vec{V} \tag{F.54}$$

となる。つまり見落としていた斜面のする仕事こそ、$m\vec{v}\cdot\vec{V}$ というエネルギー差の理由である。

★【演習問題10-2】の解答 ………………………………… （問題は p305、ヒントは p7w）

水の移動速度は0.5m/sである。地球の角速度を代入すると北極におけるコリオリ力の大きさは

$$2m\times 0.5\times\frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.27\times 10^{-5}m \tag{F.55}$$

となる。これによる加速度は $7.27\times 10^{-5}\mathrm{m/s^2}$ だから、落ちるまでの１秒の間にたって $3.64\times 10^{-5}\mathrm{m}$ しか進路は変わらない。こんな小さな値が渦の理由とは考えられない。

なお、台風の渦などについては、空間的スケールも時間的スケールも全く違う。だからコリオリ力の影響は大きい。

★【演習問題 11-1】の解答 (問題は p320、ヒントは p7w)

二つの式がどちらも $\dfrac{定数}{r^2}$ の形をしているので、一つにまとまって

$$\left(\frac{L^2}{2\mu}-GMm\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\right)=0 \tag{F.56}$$

となってしまう。この答えは $r=\infty$ しかない。平衡点があるのは、遠心力の位置エネルギーと万有引力の位置エネルギーが、違う形の関数になっていることが重要であった。

★【演習問題 11-2】の解答 (問題は p320、ヒントは p8w)

運動方程式は $ma=\dfrac{GMm}{r^2}$ となるが、両辺の m は消えてしまって、$a=\dfrac{GM}{r^2}$ となる。つまり、マイナス質量の物体も、やはり落ちる。なぜならマイナス質量の物体は上向きの力を受けると下向きに加速するからである。

★【演習問題 11-3】の解答 (問題は p320、ヒントは p8w)

力の向きは逆（作用・反作用の法則）だが、加速度は同じ向きになってしまい、一方方向に加速していく。

同じ加速度で運動するので、最初二物体とも静止していた（運動量もエネルギーも 0 だった）とすると、時間経過して速度 $\vec{v}$ を持った後も、

$$\begin{aligned}\text{運動量：}\ & m\vec{v}+(-m)\vec{v}=0\\ \text{運動エネルギー：}\ & \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2+\frac{1}{2}(-m)|\vec{v}|^2=0\end{aligned} \tag{F.57}$$

であり、保存している。

★【演習問題 11-4】の解答 (問題は p320、ヒントは p8w)

ヒントの次から計算を続けると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{GM_1m}{(r_1)^3}-\frac{M_1m}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_1+\left(\frac{GM_2m}{(r_2)^3}-\frac{M_2m}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_2&=0\\ M_1\left(\frac{G}{(r_1)^3}-\frac{1}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_1+M_2\left(\frac{G}{(r_2)^3}-\frac{1}{M_1+M_2}\omega^2\right)\vec{r}_2&=0\end{aligned} \tag{F.58}$$

となる。これがベクトルの式として 0 になるためには括弧内がともに 0 にならなくてはいけないので、

$$\frac{G}{(r_1)^3}=\frac{G}{(r_2)^3}=\frac{\omega^2}{M_1+M_2} \tag{F.59}$$

が成り立てばよい。よって $r_1=r_2=\left(\dfrac{G(M_1+M_2)}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ という位置になる。ところが $\omega=\sqrt{\dfrac{G(M_1+M_2)}{R^3}}$ であったから、

$$r_1=r_2=R \tag{F.60}$$

でなくてはいけない。つまり地球･月･人工衛星が正三角形をなす位置である（$\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$）。

★【演習問題 11-5】の解答 .... （問題は p321、ヒントは p8w）

(11.16)の左辺の $\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\phi = \frac{(r_0)^2}{2(1+\epsilon\cos\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi$ にヒントの(F.14)を代入して、
→ p312 → p9w

$$\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\phi = \frac{br_0(1-\epsilon\cos\alpha)}{2(1-\epsilon^2)}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{L}{2\mu}\,\mathrm{d}t \tag{F.61}$$

と直せて、$a = \frac{r_0}{1-\epsilon^2}$ なので、微分方程式は

$$ab(1-\epsilon\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{L}{\mu}\,\mathrm{d}t \tag{F.62}$$

に変わる。積分して、

$$ab(\alpha-\epsilon\sin\alpha) = \frac{L}{\mu}t + C \tag{F.63}$$

すなわち、$\alpha-\epsilon\sin\alpha = \frac{L}{\mu ab}t + C$ が導ける。

★【演習問題 11-6】の解答 .... （問題は p321、ヒントは p9w）

地球と物体の相対的運動を考えているのだら、運動方程式は

$$\frac{GMm_\mathrm{A}}{r^2} = \frac{Mm_\mathrm{A}}{M+m_\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} \tag{F.64}$$

$$\frac{GMm_\mathrm{B}}{r^2} = \frac{Mm_\mathrm{B}}{M+m_\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} \tag{F.65}$$

でなくてはならない。よって加速度は

$$\frac{G(M+m_\mathrm{A})}{r^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} \tag{F.66}$$

$$\frac{G(M+m_\mathrm{B})}{r^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} \tag{F.67}$$

と、二つの場合で違ってくる。ただしこの差は（$M+m_\mathrm{A}$ と $M+m_\mathrm{B}$ の差だから）非常に小さく、通常は無視できる。

相対運動を使わずに考えれば「この間に（少しだけ）地球も加速する」と考えればよい。地球が物体の方に加速して「物体を迎えに行く」のだが、物体の質量の違いにより、その加速度に差が生じるのである。