付録 D

章末演習問題のヒントと解答

ヒント

★【演習問題 2-1】のヒント .... (問題は p35、解答は p5w)

まず (1) から、$\boxed{\det \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top \det \mathbf{A}}$。

★【演習問題 2-2】のヒント .... (問題は p35、解答は p5w)

$\boxed{\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}}$ はつまり、$\boxed{\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}}$ だから、これを添字を使った表現で書くと、j, k 成分が $\boxed{\left(\mathbf{A}^\top\right)_j{}^i (\mathbf{A})^i{}_k = \delta_{jk}}$ であるが、$\boxed{\left(\mathbf{A}^\top\right)_j{}^i = (\mathbf{A})^i{}_j}$ を使うと $\boxed{(\mathbf{A})^i{}_j (\mathbf{A})^i{}_k = \delta_{jk}}$ となる。

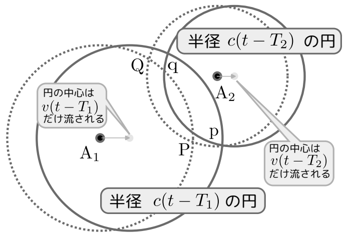
同様に $\boxed{(\mathbf{B})^i{}_j (\mathbf{B})^i{}_k = \delta_{jk}}$ も成り立つ。これらと、$\boxed{\left((\mathbf{AB})^\top\right)_i{}^m = (\mathbf{AB})^m{}_i}$ を使って $(\mathbf{AB})^\top \mathbf{AB}$ の成分を計算するとよい。

★【演習問題 3-1】のヒント .... (問題は p58、解答は p5w)

(1) についてはそのまま計算すればよい。(2) の流れている電流は、単位時間ごとに v の長さに入っていた電荷が通過すると考えればわかる。後は直線電流による磁場の公式 $\boxed{H = \dfrac{I}{2\pi r}}$ を使えばよい。

★【演習問題 3-2】のヒント .... (問題は p59、解答は p6w)

エーテルの風が吹いている場合、衛星から出た電波が $t - T_i$ の時間だけ移動する間に、波面を表す円全体が $v(t - T_i)$ だけ流される。よって、$(x_i - v(t - T_i), y_i)$ を中心とする円になると考えればよい。結果として、エーテルの風があることを知らない人は「自分は図の P または Q にいる」と判断するが、実際には図の p または q にいることになる。



よって成り立つ式は $\boxed{x_1 = -L, x_2 = L, y_1 = y_2}$ の場合、

$$c^2(t-T_1)^2 = (x+L-v(t-T_1))^2 + (y-y_1)^2 \tag{D.1}$$
$$c^2(t-T_2)^2 = (x-L-v(t-T_2))^2 + (y-y_1)^2 \tag{D.2}$$

である。

★【演習問題 4-1】のヒント .... (問題は p96、解答は p6w)

(1) 必要な速度については、寿命が $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ 倍に伸びると考えればよい。

(2) 「地上からの高度約 10 km=10^4 m」から「地上」までの距離は、μ 粒子から見るとどう見える？

★【演習問題 4-3】のヒント .... (問題は p97、解答は p8w)

二つの Lorentz 変換は行列で表現すると、

$$\begin{bmatrix} \gamma(\vec{v}_1) & -\dfrac{v_1}{c}\gamma(\vec{v}_1) & 0 & 0 \\ -\dfrac{v_1}{c}\gamma(\vec{v}_1) & \gamma(\vec{v}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma(\vec{v}_2) & 0 & 0 & -\dfrac{v_2}{c}\gamma(\vec{v}_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{v_2}{c}\gamma(\vec{v}_2) & 0 & 0 & \gamma(\vec{v}_2) \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

である。

★【演習問題 4-4】のヒント .... (問題は p97、解答は p9w)

行列式の値を変えない変形

(1) m 列目に定数を掛けて n 列目 $\left\{ \begin{array}{l} \text{から引く} \\ \text{に足す} \end{array} \right.$ (2) m 行目に定数を掛けて n 行目 $\left\{ \begin{array}{l} \text{から引く} \\ \text{に足す} \end{array} \right.$

を繰り返す。上の「定数」の分母が 0 にならないよう、場合分けが必要である。

★【演習問題 5-1】のヒント .... (問題は p112、解答は p11w)

角度範囲、$\widetilde{\theta}(\theta)$ から $\widetilde{\theta}(\theta+\mathrm{d}\theta)$ で ϕ から $\phi+\mathrm{d}\phi$ までの範囲に、$\sigma_{星}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 個の星があるということは、$\boxed{\widetilde{\sigma}_{星}\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}\ \mathrm{d}\phi = \sigma_{星}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}$ が成り立つから、$\boxed{\widetilde{\sigma}_{星} = \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}}\sigma_{星}}$ が言える。つまり我々は $\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}$ と $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ の比を知ればよい。

★【演習問題 5-2】のヒント .... (問題は p112、解答は p12w)

運動方向と光の進行方向の角度を θ とすると、非相対論的な場合は $\boxed{\nu = \nu_0\dfrac{1}{1-\beta\cos\theta}}$ 、相対論的な場合は $\boxed{\nu = \nu_0\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}}$ という式になる。最大値は $\boxed{\cos\theta = 1}$ 、最小値は $\boxed{\cos\theta = -1}$ に対応する。式からは β を消去すればよい。

★【演習問題 6-1】のヒント .... (問題は p136、解答は p12w)

【問い 6-5】の答え → p136 $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial(c\widetilde{t})} = \gamma\dfrac{\partial}{\partial(ct)} + \beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial\widetilde{x}} = \beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma\dfrac{\partial}{\partial x}}$ を使う。

★【演習問題 6-2】のヒント .... (問題は p136、解答は p12w)

どちらの座標系を使っても、基底を含めて書けばベクトルは同じなので、

$$ct\mathbf{E}_{ct} + x\mathbf{E}_x + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z = \gamma(c\widetilde{t} + \beta\widetilde{x})\mathbf{E}_{ct} + \gamma(\widetilde{x} + \beta c\widetilde{t})\mathbf{E}_x + \widetilde{y}\,\mathbf{E}_y + \widetilde{z}\,\mathbf{E}_z \tag{D.4}$$

である。右辺を $c\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ で整理する。$\mathbf{E}^{\mu}$ についても同様。

★【演習問題 7-1】のヒント .... （問題は p150、解答は p13w）

弟の座標系（地球静止系）を (ct, x)、行きの兄の座標系を $(ct_{\text{行}}, x_{\text{行}})$、帰りの兄の座標系を $(ct_{\text{帰}}, x_{\text{帰}})$ とする[†1]。

弟の時報が発せられる時空点の座標は、T を周期、n を整数として $\boxed{(ct, x) = (nT, 0)}$ である。これから x 軸正の向きに発せられる光の軌跡は (ct, x) 座標系では $\boxed{x = c(t - nT)}$ で表される。これらの軌跡を $(ct_{\text{行}}, x_{\text{行}})$ 座標系と $(ct_{\text{帰}}, x_{\text{帰}})$ 座標系で表せばよい。(4) では、兄の発する時報の軌跡を弟から見る。

★【演習問題 7-3】のヒント .... （問題は p150、解答は p15w）

A さんは円盤の静止系でみて速さ v で運動するが、円盤の A さんのいる部分は $r\omega$ の速さを持っているから、外部から見た A さんの速さは速度の合成則(5.5) → p99 を用いて、$\dfrac{v + r\omega}{1 + \frac{vr\omega}{c^2}}$ である。外部から見て円盤上を一周するのに T かかるとすると、外部から見て A さんの動く距離は $\dfrac{v + r\omega}{1 + \frac{vr\omega}{c^2}} T$ であり、これは $2\pi r + r\omega T$ に等しい[†2]。これから T がわかる。

A さんはこの間に時間方向に cT、空間方向に $\dfrac{v + r\omega}{1 + \frac{vr\omega}{c^2}} T$ 動いたことになるから、固有時間は $\dfrac{1}{c}\sqrt{(\text{時間方向の移動})^2 - (\text{空間方向の移動})^2}$ で計算できる。

★【演習問題 8-1】のヒント .... （問題は p185、解答は p15w）

光子の 4 元運動量を $p^{\mu}_{\text{光}}$、電子と陽電子の 4 元運動量をそれぞれ $p^{\mu}_{\mathrm{e}}, p^{\mu}_{\bar{\mathrm{e}}}$ とすると、

$$p^{\mu}_{\text{光}} = p^{\mu}_{\mathrm{e}} + p^{\mu}_{\bar{\mathrm{e}}} \tag{D.5}$$

が成り立つ。計算がやりやすい座標系として、重心系（トータル運動量が $\vec{0}$ になる座標系）を選ぶ。空間成分と時間成分の式を作ってみよう。

★【演習問題 8-2】のヒント .... （問題は p186、解答は p16w）

第 0 成分の保存則は

$$mc\gamma(v) = (m + \mathrm{d}m)c\gamma(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}M\, c\gamma(V) \tag{D.6}$$

第 1 成分の保存則は

$$mv\gamma(v) = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v)\gamma(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}M\, V\gamma(V) \tag{D.7}$$

である。$\mathrm{d}M$ はよくわからない量なのでこの式から消去すると後は $\mathrm{d}m$ と $\mathrm{d}v$ の関係式になって積分ができる。$\mathrm{d}m$, $\mathrm{d}v$ の 2 次のオーダーになる量は無視して計算しよう。

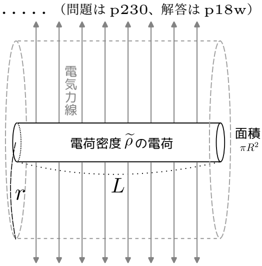
★【演習問題 8-3】のヒント .... （問題は p186、解答は p17w）

(D.6) で $\mathrm{d}m$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}M$ の関係が決まっており、【演習問題8-2】→ p186 の解答 → p16 で $\mathrm{d}m$ と $\mathrm{d}v$ の関係は出したので、それを使って $\mathrm{d}m$ と $\mathrm{d}M$ の式を出す。

[†1] この三つの座標系は原点が一致しているとして考えておこう。実は最終結果に原点は関係ない。

[†2] 円盤は回転しているので、A さんが円盤上で静止していたとしても、T だけ時間が立てば A さんは（外部から見て）$r\omega T$ だけ移動していることに注意。これに「一周」分の $2\pi r$ が足される。

★【演習問題 9-1】のヒント .... （問題は p230、解答は p18w）



(1)　導線の静止系では、トータルの 4 次元電流密度は $(0, j, 0, 0)$。これを Lorentz 変換する。

(2)　右の図のように仮想的円筒を考えて Gauss の法則を使う。電場は軸対称になって x 軸から離れる方向を向く。

(3)　(1) と同様。

(4)　$\boxed{H = \dfrac{I}{2\pi r}}$ で計算。

(5)　qE と qvB を素直に計算して比較。

★【演習問題 9-2】のヒント .... （問題は p230、解答は p18w）

電荷密度は $\rho\gamma$ 流れる電流は $\rho\gamma v$ になるので、電流が距離 r の位置に作る磁場は $\dfrac{\rho\gamma v}{2\pi r}$ となる。

★【演習問題 9-3】のヒント .... （問題は p230、解答は p19w）

$\{x^*\}$ 座標系では電場は $\vec{0}$、磁場は $\vec{B}$ である。ベクトルで表現された電磁場の Lorentz 変換の式 (9.101)を使って $\{x^*\}$ 座標系の電磁場を求める。$\{\widetilde{x}^*\}$ 座標系で静止している電子は $\{\widetilde{x}^*\}$ 座標系では速
→ p216
度 $-\vec{v}$ を持つから、電子に作用する力は $-e\left(\vec{\widetilde{E}} - \vec{v}\times\vec{\widetilde{B}}\right)$ である。

★【演習問題 10-1】のヒント .... （問題は p258、解答は p19w）

T^{zz} は

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_0}{2}\left(([\vec{E}]^x)^2 + ([\vec{E}]^y)^2 - ([\vec{E}]^z)^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(([\vec{B}]^x)^2 + ([\vec{B}]^y)^2 - ([\vec{B}]^z)^2\right)\\
=&\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0\widetilde{r}^6}\left(\widetilde{x}^2 + \gamma^2 y^2 - \gamma^2 z^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(B_{外} - \frac{Q\beta\gamma z}{4\pi\varepsilon_0 c\widetilde{r}^3}\right)^2 + \frac{Q^2 y^2}{16\pi^2\varepsilon_0\widetilde{r}^6}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

と計算できるが、$B_{外}$ の 1 次の項以外は、例によって $\boxed{z = L}$ の寄与と $\boxed{z = -L}$ の寄与が消し合う。

★【演習問題 10-2】のヒント .... （問題は p258、解答は p20w）

電場の方向を向いた単位ベクトル $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_E = \dfrac{\vec{E}}{|\vec{E}|}}$ と、それに垂直な二つの単位ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_{\perp 1}, \vec{\mathbf{e}}_{\perp 2}$ （$\boxed{\vec{\mathbf{e}}_{\perp i}\cdot\vec{E} = 0}$）を考え、$\boxed{\mathbf{R} = \begin{bmatrix} [\vec{\mathbf{e}}_E]^x & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 1}]^x & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 2}]^x \\ [\vec{\mathbf{e}}_E]^y & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 1}]^y & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 2}]^y \\ [\vec{\mathbf{e}}_E]^z & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 1}]^z & [\vec{\mathbf{e}}_{\perp 2}]^z \end{bmatrix}}$ で対角化する。

★【演習問題 11-1】のヒント .... （問題は p291、解答は p21w）

(11.6) を
→ p260

$$Q_{内}(\widetilde{r}) = \begin{cases} Q\,(定数) & \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 \geq R^2 \\ Q\dfrac{\widetilde{r}^3}{R^3} & \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 < R^2 \end{cases} \tag{D.9}$$

という関数に置き換える。よって球内部 $\boxed{\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 < R^2}$ の積分を行う必要がある。運動量 $\times c$ の積分に関しては

$$\frac{\beta\gamma^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-\gamma^2(x-\beta ct)^2}}\mathrm{d}\rho\,\rho^3\,\frac{\left(Q\frac{\tilde{r}^3}{R^3}\right)^2}{(\gamma^2(x-\beta ct)^2+\rho^2)^3} \tag{D.10}$$

が球内部の積分だからこれを足す。

★【演習問題 11-2】のヒント .... （問題は p291、解答は p21w）

(11.85)の最後の式の分母分子を $V^0_{\text{源}}(\{x^*\})$ で割ると、
→ p287

$$A^\mu(\{x^*\}) = \underset{+\text{時}A^\mu}{-}\frac{\mu_0 Qc}{4\pi}\frac{(V^\mu_{\text{源}}(\{x^*\})/V^0_{\text{源}}(\{x^*\}))}{\ell_\nu(\{x^*\})(V^\nu_{\text{源}}(\{x^*\})/V^0_{\text{源}}(\{x^*\}))} \tag{D.11}$$

となる。この $(V^\mu_{\text{源}}(\{x^*\})/V^0_{\text{源}}(\{x^*\}))$ は $\vec{\beta}_{\text{源}}(\{x^*\})$ で表せる。

★【演習問題 A-1】のヒント .... （問題は p298、解答は p22w）

エーテルの風が吹いていない場合でも、$\dfrac{L_{\text{東西}}}{c}-\dfrac{L_{\text{南北}}}{c}$ という時間差がある。

解答

★【演習問題 2-1】の解答 .... （問題は p35、ヒントは p1w）

ヒントより、$\boxed{\det\mathbf{A}^\top\mathbf{A}=\det\mathbf{A}^\top\det\mathbf{A}}$ でかつ (2) から $\boxed{\det\mathbf{A}=\det(\mathbf{A}^\top)}$ なので、

$$\det\underbrace{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}=(\det\mathbf{A})^2 \tag{D.12}$$

より、$\boxed{(\det\mathbf{A})^2=1}$ なので $\boxed{\det\mathbf{A}=\pm 1}$ となる。

★【演習問題 2-2】の解答 .... （問題は p35、ヒントは p1w）

$(\mathbf{AB})^\top\mathbf{AB}$ の i,j 成分を添字で表現すると、

$$\begin{aligned}\left((\mathbf{AB})^\top\right)^m{}_i(\mathbf{AB})^m{}_j&=(\mathbf{AB})^m{}_i(\mathbf{AB})^m{}_j=(\mathbf{A})^m{}_k\underbrace{(\mathbf{B})^k{}_i(\mathbf{A})^m{}_n}_{\text{順番入れ替え}}(\mathbf{B})^n{}_j\\&=\underbrace{(\mathbf{A})^m{}_k(\mathbf{A})^m{}_n}_{\delta_{kn}}(\mathbf{B})^k{}_i(\mathbf{B})^n{}_j=(\mathbf{B})^k{}_i(\mathbf{B})^k{}_j=\delta_{ij}\end{aligned} \tag{D.13}$$

となり、単位行列 $\mathbf{I}$ の成分となる。

★【演習問題 3-1】の解答 .... （問題は p58、ヒントは p1w）

(1) (3.21)と(3.22)に $\boxed{\vec{E}_{\text{M}}=\dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{\mathbf{e}}_r,\vec{B}_{\text{M}}=\vec{0}}$ を代入する。今の場合 $\boxed{\vec{v}=v\vec{\mathbf{e}}_z}$ なので、
→ p53 → p53

$$\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{\mathbf{e}}_r=\vec{E}+v\vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{B} \tag{D.14}$$

$$\vec{0}=\vec{B}-\frac{1}{c^2}v\vec{\mathbf{e}}_z\times\vec{E} \tag{D.15}$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\vec{0} =& \vec{B} - \frac{1}{c^2} v \vec{\mathbf{e}}_z \times \overbrace{\left(\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{\mathbf{e}}_r - v \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{B} \right)}^{\vec{E}} \quad (\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_r = \vec{\mathbf{e}}_\phi) \\
\vec{0} =& \vec{B} - \frac{1}{c^2} v \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{\mathbf{e}}_\phi + \underbrace{\frac{v^2}{c^2} \vec{\mathbf{e}}_z \times \left(\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{B} \right)}_{\frac{v^2}{c^2}\text{のオーダーなので無視}} \\
\vec{B} =& \frac{\rho v}{2\pi \underbrace{c^2 \varepsilon_0}_{1/\mu_0} r} \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mu_0 \rho v}{2\pi r} \vec{\mathbf{e}}_\phi
\end{aligned}
\tag{D.16}
$$

(2)　ヒントより、流れる電流は $\boxed{I = \rho v}$ であり、磁場は $\boxed{H = \frac{\rho v}{2\pi r}}$ の大きさで、ϕ 方向を向く。

よって磁束密度は $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho v}{2\pi r} \vec{\mathbf{e}}_\phi}$ となって一致する。

★【演習問題 3-2】の解答 .... （問題は p59、ヒントは p1w）

(D.1) −(D.2) を計算すると
→ p2w　→ p2w

$$
c^2 (T_2 - T_1)(2t - T_1 - T_2) = (2L - v(T_2 - T_1))(2x - v(2t - T_1 - T_2))
$$

$$
\frac{c^2 (T_2 - T_1)\left(t - \frac{T_1 + T_2}{2} \right)}{2L - v(T_2 - T_1)} + v \left(t - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) = x \tag{D.17}
$$

となって x が求められる。$\boxed{x_{\text{無風}} = \frac{c^2 (T_2 - T_1)\left(t - \frac{T_1 + T_2}{2} \right)}{2L}}$ を代入すると、

$$
x_{\text{無風}} \times \frac{2L}{2L - v(T_2 - T_1)} + v \left(t - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) = x \tag{D.18}
$$

である。$\boxed{T_1 = T_2}$ の場合のずれは、

$$
30\text{km/s} \times 0.01\text{s} = 0.3\text{km} = 300\text{m} \tag{D.19}
$$

と見積もれる。

★【演習問題 4-1】の解答 .... （問題は p96、ヒントは p2w）

(1)　$\boxed{\frac{10^4\text{m}}{3.0 \times 10^8\text{m/s} \times \beta} = 2 \times 10^{-6}\text{s} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$ を解いて、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1 - \beta^2} =& \frac{2 \times 10^{-6}\text{s} \times 3 \times 10^8\text{m/s} \times \beta}{10^4\text{m}} = 6 \times 10^{-2} \times \beta \\
1 - \beta^2 =& 36 \times 10^{-4} \beta^2 \\
\beta^2 =& \frac{1}{1 + 36 \times 10^{-4}}
\end{aligned}
$$

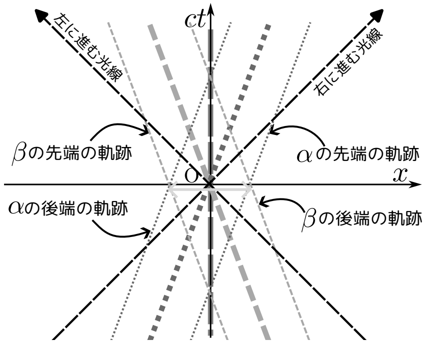
$$\beta = \sqrt{\frac{10000}{10036}} \simeq 0.998 \tag{D.20}$$

となる。光速の 99.8%ぐらいの速度で走る必要がある。

(2) 地球の方が動いていることで Lorentz 短縮されるため、「地上からの高度約 10 km=10^4 m」から「地上」までの距離は、μ 粒子から見ると $\boxed{10^4\ \mathrm{m} \times \sqrt{1-\beta^2} = 10^4\ \mathrm{m} \times 6 \times 10^{-2} \times \beta = 6 \times 10^2\ \mathrm{m} \times \beta}$ になり、μ 粒子から見て「地上」がやってくるまでの時間は $\boxed{\dfrac{6 \times 10^2\ \mathrm{m} \times \beta}{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \times \beta} = 2 \times 10^{-6}\mathrm{s}}$ となって寿命と同じ長さとなる。

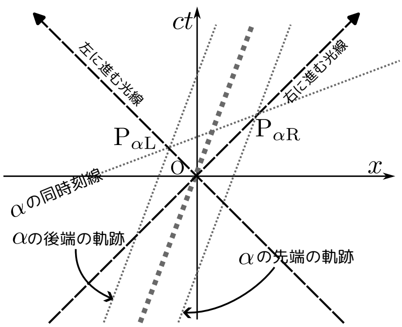
★【演習問題 4-2】の解答 .... (問題は p96)

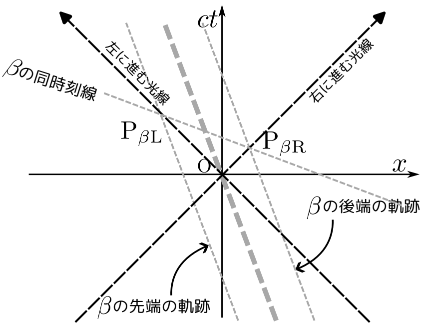
まず、電車 α, β の先端・後端の運動を描き込むとグラフは右のようになる。図に描いた$\longleftrightarrow$は、O さんが観測する電車（α でも β でも）の長さであり、Lorentz 短縮により $2L\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ になっている。グラフには、原点の時空点から左に進む光線と右に進む光線も描き込まれている。それぞれの光の世界線が α, β の先端・後端の世界線と交わる点を求める。

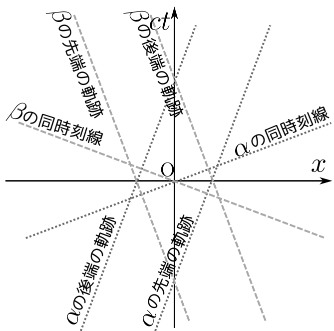


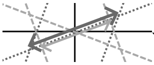
左に進む光線が $\begin{cases} \alpha \text{ の後端と交わる時空点を } P_{\alpha \mathrm{L}} \\ \beta \text{ の先端と交わる時空点を } P_{\beta \mathrm{L}} \end{cases}$

右に進む光線が $\begin{cases} \alpha \text{ の先端と交わる時空点を } P_{\alpha \mathrm{R}} \\ \beta \text{ の後端と交わる時空点を } P_{\beta \mathrm{R}} \end{cases}$ とする。電車 α の静止系では $P_{\alpha \mathrm{L}}$ と $P_{\alpha \mathrm{R}}$ が同時刻の点であることを考えると、α にとっての同時刻線をグラフに描き込むことができる（β に関しても同様)。書き終わった結果が次のグラフである。



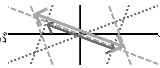


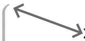


こうして求めた同時刻線を、どちらも原点 O を通るように平行移動して描いたのが右のグラフである。A さんはこの「α の同時刻線」を基準に二つの電車の長さを測定する。その部分を拡大図で描くとであり、この図の

 が「A さんから見た電車 α の長さ」
 が「A さんから見た電車 β の長さ」

である。A さんは自分が乗っている電車 α の方が長いと感じる。

同様に、B さんが「β の同時刻線」で二つの電車の長さを測定する様子がであり、この図の

 が「B さんから見た電車 α の長さ」
 が「B さんから見た電車 β の長さ」

である。B さんは自分が乗っている電車 β の方が長いと感じる。A さんと B さんは互いに対等であり、自分の電車の方が長く、相手の電車の方が短いと感じるということが、この図解からわかる。

★【演習問題 4-3】の解答 .... （問題は p97、ヒントは p2w）

ヒントの二つの行列を掛算すると

$$
\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_1) & -\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & 0 & 0 \\
-\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & \gamma(\vec v_1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_2) & 0 & 0 & -\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) & 0 & 0 & \gamma(\vec v_2)
\end{bmatrix}
$$
$$
=\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & -\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & 0 & -\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) \\
-\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & \gamma(\vec v_1) & 0 & \frac{v_1 v_2}{c^2}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) & 0 & 0 & \gamma(\vec v_2)
\end{bmatrix} \tag{D.21}
$$

逆にしたものは、

$$
\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_2) & 0 & 0 & -\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) & 0 & 0 & \gamma(\vec v_2)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_1) & -\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & 0 & 0 \\
-\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & \gamma(\vec v_1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$
$$
=\begin{bmatrix}
\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & -\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & 0 & -\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_2) \\
-\frac{v_1}{c}\gamma(\vec v_1) & \gamma(\vec v_1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{v_2}{c}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & \frac{v_1 v_2}{c^2}\gamma(\vec v_1)\gamma(\vec v_2) & 0 & \gamma(\vec v_2)
\end{bmatrix} \tag{D.22}
$$

であり、結果は一致しない。Galilei 変換なら一致する。また、この変換は「ある $\vec\beta$ による Lorentz ブースト」にはなっていないことにも注意（座標軸の回転を含んでいるので）。

★【演習問題 4-4】の解答 .... （問題は p97、ヒントは p2w）

まず(4.33)の行列式を考える。
→ p91

(1)　1 行目に $[\vec{\beta}]^x$ を掛けて 2 行目に足す。
(2)　1 行目に $[\vec{\beta}]^y$ を掛けて 3 行目に足す。
(3)　1 行目に $[\vec{\beta}]^z$ を掛けて 4 行目に足す。

を行うと、

$$\begin{bmatrix} \gamma & -[\vec{\beta}]^x\gamma & -[\vec{\beta}]^y\gamma & -[\vec{\beta}]^z\gamma \\ 0 & 1+\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^x & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^y & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^z \\ 0 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^x & 1+\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^y & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^z \\ 0 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^x & \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^y & 1+\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^z \end{bmatrix} \tag{D.23}$$

となる。続けて

(1)　1 列目に $[\vec{\beta}]^x$ を掛けて 2 列目に足す。
(2)　1 列目に $[\vec{\beta}]^y$ を掛けて 3 列目に足す。
(3)　1 列目に $[\vec{\beta}]^z$ を掛けて 4 列目に足す。

を行うと 1 行目の 2 列目以降が 0 になり、

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Gamma[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^x & \Gamma[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^y & \Gamma[\vec{\beta}]^x[\vec{\beta}]^z \\ 0 & \Gamma[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^x & 1+\Gamma[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^y & \Gamma[\vec{\beta}]^y[\vec{\beta}]^z \\ 0 & \Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^x & \Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^y & 1+\Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^z \end{bmatrix} \tag{D.24}$$

となる。ただし、省スペースのため、$\boxed{\Gamma=\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma}$ という記号を使った。

$[\vec{\beta}]^z$ が 0 でない場合、

(1)　4 行目に $\dfrac{[\vec{\beta}]^x}{[\vec{\beta}]^z}$ を掛けて 2 行目から引く。
(2)　4 行目に $\dfrac{[\vec{\beta}]^y}{[\vec{\beta}]^z}$ を掛けて 3 行目から引く。

を行うことで、

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{[\vec{\beta}]^x}{[\vec{\beta}]^z} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{[\vec{\beta}]^y}{[\vec{\beta}]^z} \\ 0 & \Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^x & \Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^y & 1+\Gamma[\vec{\beta}]^z[\vec{\beta}]^z \end{bmatrix} \tag{D.25}$$

になる。さらに

(1)　2 列目に $\dfrac{[\vec{\beta}]^x}{[\vec{\beta}]^z}$ を掛けて 4 列目に足す。
(2)　3 列目に $\dfrac{[\vec{\beta}]^y}{[\vec{\beta}]^z}$ を掛けて 4 列目に足す。

を行えば、

$$
\begin{bmatrix}
\gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^x & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^y & 1+\Gamma\underbrace{\left(\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x+\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y+\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^z\right)}_{\beta^2}
\end{bmatrix}
\tag{D.26}
$$

となる。

$$
1+\overbrace{\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}-\gamma\right)}^{\Gamma}\beta^2 = 1+\gamma-1-\gamma\beta^2=\gamma(1-\beta^2)=\frac{1}{\gamma}
\tag{D.27}
$$

なので行列は

$$
\begin{bmatrix}
\gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^x & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^y & \dfrac{1}{\gamma}
\end{bmatrix}
\tag{D.28}
$$

となり、後は対角成分の積で行列式が求められ、結果は1である。

$\left[\vec{\beta}\right]^z$ が0であった場合は行列式を求めるべき行列は

$$
\begin{bmatrix}
\gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1+\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^y & 0 \\
0 & \Gamma\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^x & 1+\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{D.29}
$$

になる。真ん中の 2×2 部分の行列式が

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x\right)\left(1+\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y\right)-\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^y\times\Gamma\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^x \\
=&1+\Gamma\underbrace{\left(\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x+\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y\right)}_{\beta^2}
\end{aligned}
\tag{D.30}
$$

となり、後は (D.27) と同じ計算で $\dfrac{1}{\gamma}$ なので、やはり行列式は1である。

次に3次元部分。

$\left[\vec{\beta}\right]^z$ が0でない場合、

(1)　3列目に $\dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^x}{\left[\vec{\beta}\right]^z}$ を掛けて1列目から引く。

(2)　3列目に $\dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^y}{\left[\vec{\beta}\right]^z}$ を掛けて2列目から引く。

を行うことで、

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^z \\
0 & 1 & \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^z \\
-\dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^x}{\left[\vec{\beta}\right]^z} & -\dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^y}{\left[\vec{\beta}\right]^z} & 1+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^z
\end{bmatrix}
$$

になる。

次に $\boxed{\begin{array}{l} (3)\quad 1\text{行目に}\ \dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^x}{\left[\vec{\beta}\right]^z}\ \text{を掛けて}3\text{行目に足す。} \\ (4)\quad 2\text{行目に}\ \dfrac{\left[\vec{\beta}\right]^y}{\left[\vec{\beta}\right]^z}\ \text{を掛けて}3\text{行目に足す。} \end{array}}$ を行うことで、

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^z \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^z \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\Big(\underbrace{\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x+\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y+\left[\vec{\beta}\right]^z\left[\vec{\beta}\right]^z}_{\beta^2}\Big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}}$$

となり、行列式は γ となる。

$\boxed{\left[\vec{\beta}\right]^z=0}$ のときは最初の式が

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x & \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^y & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^x & 1+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

になる。後は左上の 2×2 部分の行列式を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y\right)-\frac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^y\times\frac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^x \\ =&1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\Big(\underbrace{\left[\vec{\beta}\right]^x\left[\vec{\beta}\right]^x+\left[\vec{\beta}\right]^y\left[\vec{\beta}\right]^y}_{\beta^2}\Big)=1+\gamma-1=\gamma \end{aligned} \tag{D.31}$$

となるので、やはり行列式は γ である。

★【演習問題 5-1】の解答 .... （問題は p112、ヒントは p2w）

$\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}$ と $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ の比を計算するために、光行差の公式から $\cos\widetilde{\theta}$（これを微分すれば $-\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}$ が出てくる）の式を作る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\widetilde{\theta}} =&1+\tan^2\widetilde{\theta}=1+\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(\beta+\cos\theta)^2}=\frac{(\beta+\cos\theta)^2+(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(\beta+\cos\theta)^2} \\ =&\frac{\beta^2\cos^2\theta+2\beta\cos\theta+1}{(\beta+\cos\theta)^2}=\left(\frac{\beta\cos\theta+1}{\beta+\cos\theta}\right)^2 \\ \cos\widetilde{\theta}=&\pm\frac{\beta+\cos\theta}{\beta\cos\theta+1} \end{aligned} \tag{D.32}$$

真ん前からと真後ろから来た光は角度変化を起こさないから、$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\theta=0}\text{で}\boxed{\widetilde{\theta}=0} \\ \boxed{\theta=\pi}\text{で}\boxed{\widetilde{\theta}=\pi}\end{array}\right.$ （つまり、$\boxed{\cos\theta=\pm1}$ で $\boxed{\cos\widetilde{\theta}=\pm1\text{（複号同順）}}$）がわかるので、(D.32) の複号は $+$ を選ぶ。

これで両辺が $\cos\widetilde{\theta}$ と $\cos\theta$ の式になったので、(D.32) を微分すれば $\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}$ と $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ の比がわかる。実行すると

$$-\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta}\ =\frac{-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\beta\cos\theta+1}-\frac{-\beta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ (\beta+\cos\theta)}{(\beta\cos\theta+1)^2}$$

$$\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\left(\frac{\beta\cos\theta+1-\beta\left(\beta+\cos\theta\right)}{\left(\beta\cos\theta+1\right)^2}\right)$$

$$\sin\widetilde{\theta}\,\mathrm{d}\widetilde{\theta} = \frac{1-\beta^2}{(\beta\cos\theta+1)^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{D.33}$$

となる。よって、

$$\widetilde{\sigma}_{星} = \frac{(\beta\cos\theta+1)^2}{1-\beta^2}\sigma_{星} \tag{D.34}$$

となる。進行方向である $\boxed{\theta=0}$ 付近では $\boxed{\widetilde{\sigma}_{星} = \frac{(\beta+1)^2}{1-\beta^2}\sigma_{星} = \frac{\beta+1}{1-\beta}\sigma_{星}}$ となって星の見かけの密度が濃くなる。

★【演習問題 5-2】の解答 .... （問題は p112、ヒントは p2w）

相対論的でない場合、$\boxed{\nu_{大} = \nu_0\frac{c}{c-v},\quad \nu_{小} = \nu_0\frac{c}{c+v}}$ より、

$$\overbrace{\frac{\nu_0 c}{\nu_{大}}}^{c-v} + \overbrace{\frac{\nu_0 c}{\nu_{小}}}^{c+v} = 2c \quad となって、\quad \nu_0 = \frac{2\nu_{大}\nu_{小}}{\nu_{大}+\nu_{小}} \tag{D.35}$$

相対論的な場合、$\boxed{\nu_{大} = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},\quad \nu_{小} = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$ より、

$$\nu_{大}\nu_{小} = (\nu_0)^2 \quad となって、\quad \nu_0 = \sqrt{\nu_{大}\nu_{小}} \tag{D.36}$$

となる。実際に測定することでどちらが正しいかを確認できるが、結果は相対論を支持する。

★【演習問題 6-1】の解答 .... （問題は p136、ヒントは p2w）

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial}{\partial(c\widetilde{t})}\right)^2 + \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\right)^2}^{\triangle} \\
&= -\left(\gamma\frac{\partial}{\partial(ct)} + \beta\gamma\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\beta\gamma\frac{\partial}{\partial(ct)} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \\
&= -\underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1}\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}\right)^2 + \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2
\end{aligned} \tag{D.37}$$

★【演習問題 6-2】の解答 .... （問題は p136、ヒントは p2w）

ヒントより、

$$ct\mathbf{E}_{ct} + x\mathbf{E}_x + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z = c\widetilde{t}\underbrace{\gamma\left(\mathbf{E}_{ct}+\beta\mathbf{E}_x\right)}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{c\widetilde{t}}} + \widetilde{x}\underbrace{\gamma\left(\mathbf{E}_x+\beta\mathbf{E}_{ct}\right)}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{x}}} + \widetilde{y}\underbrace{\mathbf{E}_y}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{y}}} + \widetilde{z}\underbrace{\mathbf{E}_z}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{z}}} \tag{D.38}$$

より、

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{c\widetilde{t}} = \gamma\left(\mathbf{E}_{ct}+\beta\mathbf{E}_x\right),\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{x}} = \gamma\left(\mathbf{E}_x+\beta\mathbf{E}_{ct}\right),\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{y}} = \mathbf{E}_y,\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{z}} = \mathbf{E}_z \tag{D.39}$$

となる（共変ベクトルの変換である）。同様の計算により、

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{c\tilde{t}}=\gamma\left(\mathbf{E}^{ct}-\beta\mathbf{E}^{x}\right),\ \widetilde{\mathbf{E}}^{\tilde{x}}=\gamma\left(\mathbf{E}^{x}-\beta\mathbf{E}^{ct}\right),\ \widetilde{\mathbf{E}}^{\tilde{y}}=\mathbf{E}^{y},\ \widetilde{\mathbf{E}}^{\tilde{z}}=\mathbf{E}^{z} \tag{D.40}$$

となる（反変ベクトルの変換）。

内積を計算すると

$$\overbrace{\gamma\left(\mathbf{E}^{ct}-\beta\mathbf{E}^{x}\right)}^{\widetilde{\mathbf{E}}^{c\tilde{t}}}\cdot\overbrace{\gamma\left(\mathbf{E}_{x}+\beta\mathbf{E}_{ct}\right)}^{\widetilde{\mathbf{E}}_{\tilde{x}}}=\gamma^2\left(\beta\underbrace{\mathbf{E}^{ct}\cdot\mathbf{E}_{ct}}_{1}-\beta\underbrace{\mathbf{E}^{x}\cdot\mathbf{E}_{x}}_{1}\right)=0 \tag{D.41}$$

となる。

★【演習問題 7-1】の解答 .... （問題は p150、ヒントは p3w）

(1) ヒントより、$\boxed{x=c(t-nT)}$ を Lorentz 変換する。

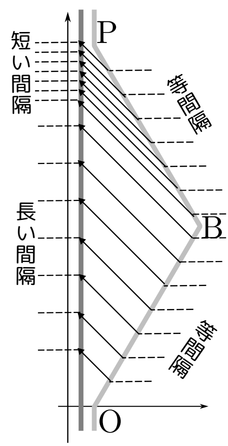
$$\begin{aligned}\overbrace{\gamma\left(x_{行}+\beta ct_{行}\right)}^{x}=&\overbrace{\gamma\left(ct_{行}+\beta x_{行}\right)}^{ct}-ncT\\ \gamma(1-\beta)x_{行}=&\gamma(1-\beta)ct_{行}-ncT\\ x_{行}=&c\left(t_{行}-n\frac{T}{\gamma(1-\beta)}\right)\end{aligned} \tag{D.42}$$

となる。つまり行きの兄には $\boxed{\dfrac{T}{\gamma(1-\beta)}=T\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}}$ ごとに時報がやってくる。帰りについては、座標系の運動速度が逆向きになって同じ計算を繰り返すので、$T\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ ごとに時報がやってくる。行きの兄は弟の時間が $\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ 倍と（長く）感じ、帰りの兄は弟の時間が $\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ 倍と（短く）感じる。

(2) 兄は「行き」と「帰り」をそれぞれ時間 $\dfrac{L}{v}\sqrt{1-\beta^2}$ ずつ体験する。よって受け取る時報の数は

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{L}{v}\sqrt{1-\beta^2}}{T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}+\frac{\frac{L}{v}\sqrt{1-\beta^2}}{T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}=\frac{\frac{L}{v}\sqrt{1-\beta^2}}{T}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)\\ =&\frac{\frac{L}{v}\sqrt{1-\beta^2}}{T}\frac{1-\beta+1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{2L}{vT}\end{aligned} \tag{D.43}$$

となる。当然ながら、弟が出した時報の数と兄が受け取った時報の数は等しい。



(3) 右図の通り。

(4) 行きの兄の出す時報の光の軌跡の式は $\boxed{x_{行}=c(t_{行}-nT)}$ である。

$$\begin{aligned}\overbrace{\gamma(x-\beta ct)}^{x_{行}}=&\overbrace{\gamma(ct-\beta x)}^{ct_{行}}-ncT\\ \gamma(1+\beta)x=&\gamma(1+\beta)ct-ncT\end{aligned}$$

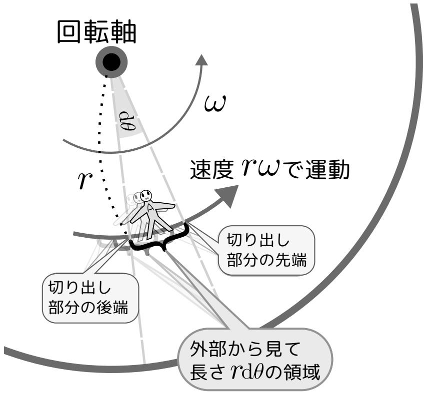
$$x = c\left(t - n\frac{T}{\gamma(1+\beta)}\right) \tag{D.44}$$

と、同様の計算ができるので、弟は行きの兄の時間が $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ 倍と（長く）感じ、帰りの兄の時間が $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ 倍と（短く）感じる。

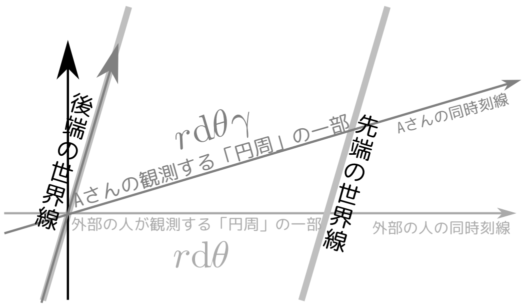
★【演習問題 7-2】の解答 .... （問題は p150）

答は (3) である。

外部から見れば $\boxed{\text{円周} = 2\pi r}$ なのは当然である。（外部から見て同時刻の）一瞬において、中心から見た微小角度 $\mathrm{d}\theta$ に属している部分を切り出して考えよう。その部分の中心に A さんが今いるとする。切り出した部分の外部から見た長さは $r\,\mathrm{d}\theta$ であり、この部分は A さんとともに（外部から見ると）移動していく。この部分は長さは微小なので全体が同じ速度 $r\omega$ で運動していると見なしてよい。この運動における長さの変化を電車の場合と同様に考えればよい。電車の場合と同様に、「切り出した部分の先端」と「切り出した部分の後端」の世界線は、外から見ると $r\,\mathrm{d}\theta$ 離れている。



電車のときと同様に、次の図のように時空図上の「同時刻線」が傾く。



これにより、$\begin{cases} \text{外部の人にとっての「同時刻」で考えたこの領域の長さは } r\,\mathrm{d}\theta \\ \text{A さんにとっての「同時刻」で考えたこの領域の長さ } r\,\mathrm{d}\theta\gamma \end{cases}$ のように違いが出るわけだが、これら二つ（$r\,\mathrm{d}\theta$ と $r\,\mathrm{d}\theta\gamma$）は、違う時空点ペアの間の長さを測っていることになる。ここで $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}}}}$ である（A さんがいる場所の速さ $r\omega$ に対応した γ 因子）。

「止まっていたとき、円盤の静止系で考えて $2\pi r$ だった円周が、動いている円盤の静止系で考えて $2\pi r\gamma$ になる」わけだから、実はこの円盤は加速時に伸ばされたことになる（2 台のロケットの話と同様→ p144）。つまり、静止状態から加速して定常な回転状態になるまでの間に、円盤は引っ張られて変形するという現象を経ている。問題文に「回転が落ち着いて」という語句を加えたのは、変形が終了した後という意味である（円盤の材質によっては変形に耐えられず壊れるかもしれない）。

★【演習問題 7-3】の解答 .... （問題は p150、ヒントは p3w）

ヒントより、

$$\frac{v+r\omega}{1+\frac{vr\omega}{c^2}}T = 2\pi r + r\omega T \tag{D.45}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$\begin{aligned}\left(\frac{v+r\omega}{1+\frac{vr\omega}{c^2}} - r\omega\right)T =& 2\pi r \qquad (D.46)\\ \frac{v+\cancel{r\omega}-\cancel{r\omega}-v\frac{(r\omega)^2}{c^2}}{1+\frac{vr\omega}{c^2}}T =& 2\pi r \qquad (D.47)\\ T =& \frac{2\pi r}{v}\times\frac{1+\frac{vr\omega}{c^2}}{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}} \qquad (D.48)\end{aligned}$$

のように T が求められる。一周に掛かった A さんの固有時間は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\sqrt{(cT)^2-\left(\frac{v+r\omega}{1+\frac{vr\omega}{c^2}}T\right)^2} =& \frac{T}{c\left(1+\frac{vr\omega}{c^2}\right)}\sqrt{c^2\left(1+\frac{vr\omega}{c^2}\right)^2-(v+r\omega)^2}\\ =& \frac{T}{c\left(1+\frac{vr\omega}{c^2}\right)}\sqrt{c^2+\cancel{2vr\omega}+v^2\frac{(r\omega)^2}{c^2}-v^2-\cancel{2vr\omega}-(r\omega)^2}\\ =& \frac{T}{c\left(1+\frac{vr\omega}{c^2}\right)}\sqrt{c^2-v^2-(r\omega)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\\ =& \frac{T}{1+\frac{vr\omega}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}} \qquad (D.49)\end{aligned}$$

となる。これに上で求めた T を代入して、

$$\frac{2\pi r}{v}\frac{1}{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}} = \frac{2\pi r}{v}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}}} \tag{D.50}$$

となる。v が非常に遅いことを考えると $\boxed{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\simeq 1}$ としてよいから、結果は $\frac{2\pi r}{v}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}}}$ となって、$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(r\omega)^2}{c^2}}}>1}$ なので、(3) の「$\frac{2\pi r}{v}$ より長い」が正しい。

★【演習問題 8-1】の解答 .... （問題は p185、ヒントは p3w）

ヒントの(D.5) の空間成分は
→ p3w

$$p^i_{光} = p^i_{\mathrm{e}} + p^i_{\bar{\mathrm{e}}} = 0 \tag{D.51}$$

となり、光の 4 元運動量空間成分は 0 になってしまう。光は質量 0 の粒子なので、

$\boxed{(4\text{元運動量時間成分})^2 - (4\text{元運動量空間成分})^2 = 0}$ にならなくてはならず、4 元運動量の時間成分 $p^0_{\text{光}}$ は 0 である。

時間成分は（電子・陽電子の質量を m とすると）

$$p^0_{\text{光}} = p^0_{\mathrm{e}} + p^0_{\bar{\mathrm{e}}} = mc\gamma(\vec{v}_{\mathrm{e}}) + mc\gamma(\vec{v}_{\mathrm{e}}) \tag{D.52}$$

になるが、左辺は 0 なのに右辺は 0 になれない量なので、この式は成り立たない。

★【演習問題 8-2】の解答 .... （問題は p186、ヒントは p3w）

$\mathrm{d}M$ を消去するため、$\underset{\to\ \mathrm{p3w}}{(\mathrm{D.6})} \times \dfrac{V}{c} - \underset{\to\ \mathrm{p3w}}{(\mathrm{D.7})}$ を実行して、

$$m(V-v)\gamma(v) = (m + \mathrm{d}m)(V - v - \mathrm{d}v)\underbrace{\gamma(v+\mathrm{d}v)}_{\gamma(v)+\gamma'(v)\,\mathrm{d}v} \tag{D.53}$$

とする。左辺に $\mathrm{d}m$、右辺に $\mathrm{d}v$ の項を集めると、

$$\begin{aligned}
-\mathrm{d}m\,(V-v)\gamma(v) &= m(V-v-\mathrm{d}v)\Big(\gamma(v)+\gamma'(v)\,\mathrm{d}v\Big) - m(V-v)\gamma(v)\\
-\mathrm{d}m\,(V-v)\gamma(v) &= m(V-v)\gamma'(v)\,\mathrm{d}v - m\,\mathrm{d}v\,\gamma(v)\\
-\frac{\mathrm{d}m}{m} &= \frac{\gamma'(v)}{\gamma(v)}\,\mathrm{d}v - \frac{\mathrm{d}v}{V-v}
\end{aligned} \tag{D.54}$$

となる。

$$\gamma'(v) = \frac{\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\ \text{より、}\ \frac{\gamma'(v)}{\gamma(v)} = \frac{\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{D.55}$$

$$V - v = \frac{v - w - v\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)}{1-\frac{vw}{c^2}} = \frac{-w+\frac{v^2w}{c^2}}{1-\frac{vw}{c^2}} = -\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{vw}{c^2}}w \tag{D.56}$$

を代入すると、

$$-\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}v + \frac{1-\frac{vw}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{w}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{w}\,\mathrm{d}v \tag{D.57}$$

この $\dfrac{1}{1-x^2}$ の積分の定石として、$\boxed{\dfrac{v}{c} = \tanh\alpha}$ と置く。

$$-w\frac{\mathrm{d}m}{m} = \underbrace{\frac{1}{1-\tanh^2\alpha}}_{\frac{1}{\cosh^2\alpha}}\overbrace{\frac{c\,\mathrm{d}\alpha}{\cosh^2\alpha}}^{\mathrm{d}v}$$

$$\downarrow\ (\text{積分})$$

$$-w\log m = c\alpha + C\ (\text{積分定数}) \tag{D.58}$$

図に示した条件により、$\boxed{m = m_0}$ のとき $\boxed{v = 0}$（このとき $\boxed{\alpha = 0}$）なので、$\boxed{-w\log m_0 = C}$ となり、tanh の逆関数 artanh を使って

$$w\log\left(\frac{m_0}{m}\right) = c\alpha = c\,\mathrm{artanh}\left(\frac{v}{c}\right) \tag{D.59}$$

という結果が出る。参考までに非相対論的な計算の結果は $\boxed{w\log\left(\frac{m_0}{m}\right)=v}$ である。

$$\operatorname{artanh} x \simeq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots \tag{D.60}$$

を使うと $\frac{v}{c}$ の小さい範囲で一致する。

★【演習問題 8-3】の解答 .... （問題は p186、ヒントは p3w）

$$mc\gamma(v)=\mathrm{d}m\,c\gamma(v)+mc\gamma'(v)\,\mathrm{d}v+mc\gamma(v)+\mathrm{d}M\,c\gamma(V)$$

相殺

$$0=\mathrm{d}m\,c\gamma(v)+mc\gamma'(v)\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}M\,c\gamma(V) \tag{D.61}$$

【演習問題 8-2】の解答中の(D.57) から $\boxed{\mathrm{d}v=-w\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{m}}$ がわかるので、それを上の式に代入して、
→ p16w

$$0=\mathrm{d}m\,\cancel{c}\gamma(v)-m\cancel{c}w\overbrace{\frac{\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}}^{\gamma'(v)}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{m}+\mathrm{d}M\,\cancel{c}\gamma(V) \tag{D.62}$$

となる。ここで【問い 5-2】の解答の中で(C.38)で計算したのと同様の計算を行い、合成速度 $\boxed{V=\frac{v-w}{1-\frac{vw}{c^2}}}$ の γ 因子は $\boxed{\gamma(V)=\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)\gamma(v)\gamma(w)}$ になることを使うと、
→ p100 → p324

$$0=\mathrm{d}m\,\gamma(v)-\frac{wv}{c^2}\gamma(v)\,\mathrm{d}m+\mathrm{d}M\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)\gamma(v)\gamma(w) \qquad (\div\gamma(v))$$

$$0=\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)\mathrm{d}m+\mathrm{d}M\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)\gamma(w)$$

$$-\mathrm{d}m=\mathrm{d}M\,\gamma(w) \tag{D.63}$$

となる。$\gamma(w)$ は 1 より大きいので、ロケットに積んである推進剤の減少量である $-\mathrm{d}m$ の方が噴射された質量 $\mathrm{d}M$ より大きい。例えば、燃料がなにかの化学物質で燃焼によって噴射のエネルギーを得ているとすると、これは 燃焼前の静止質量 > 燃焼後の静止質量 であることを示す。

★【演習問題 8-4】の解答 .... （問題は p186）

(D.63) に $\boxed{\mathrm{d}M=-0.99\,\mathrm{d}m}$ を代入し、

$$-\mathrm{d}m=-0.99\,\mathrm{d}m\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}}^{\gamma(w)}$$

$$\left(\frac{1}{0.99}\right)^2=\frac{1}{1-\frac{w^2}{c^2}}$$

$$
\begin{aligned}
1-\frac{w^2}{c^2} &= (0.99)^2 \\
\frac{w}{c} &= \sqrt{1-(0.99)^2} \simeq 0.14
\end{aligned}
\tag{D.64}
$$

となるので、w は光速の約 14 %となる。核融合燃料を使ってもこれが最適速度であり、これより速く噴射することはできない。

★【演習問題 9-1】の解答 ……………………………………… （問題は p230、ヒントは p4w）

(1)

$$
c\widetilde{\rho} = \gamma\left(c\rho - \beta\left[\vec{j}\,\right]^x\right) = -\gamma\beta j \tag{D.65}
$$

より、$\boxed{\widetilde{\rho} = -\frac{\gamma\beta j}{c}}$ となる。

(2) 長さ L の部分を取り出すと、この中にある電荷は $-\frac{\gamma\beta j}{c} \times \pi R^2 \times L$ で、この電荷から出る電気力線が底面の半径 r で長さ L の円柱の側面（面積 $2\pi rL$）をつらぬくから

$$
\frac{-\frac{\gamma\beta j}{c} \times \pi R^2 \times L}{\varepsilon_0 \times 2\pi rL} = -\frac{\gamma\beta jR^2}{2c\varepsilon_0 r} \tag{D.66}
$$

(3) 電流密度が

$$
\left[\widetilde{\vec{j}}\,\right]^x = \gamma\left(\left[\vec{j}\,\right]^x - \beta c\rho\right) = \gamma j \tag{D.67}
$$

なので、流れる電流は $\gamma j\pi R^2$。

(4)

$$
H = \frac{\gamma j\pi R^2}{2\pi r} = \frac{\gamma jR^2}{2r} \tag{D.68}
$$

(5) 電荷 q とすると、電場による力は

$$
-\frac{q\gamma\beta jR^2}{2c\varepsilon_0 r} \tag{D.69}
$$

磁場による力は

$$
qc\beta\underbrace{\mu_0}_{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}\frac{\gamma jR^2}{2r} = \frac{q\beta\gamma jR^2}{2c\varepsilon_0 r} \tag{D.70}
$$

となり、任意の β でこの二つは打ち消し合う。

★【演習問題 9-2】の解答 ……………………………………… （問題は p230、ヒントは p4w）

電荷密度が $\rho\gamma$ になってこれによって距離 r の点に作られる電場は $\frac{\rho\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}$ になる（距離 r は運動方向と垂直なので変化しない）。電荷はスカラーなので元の座標系で長さ ℓ だった部分にある電荷は変わらず

$\rho\ell$ である[†3]。よって電場による力は $\boxed{\overbrace{\frac{\rho\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}}^{E}\times\overbrace{\rho\ell}^{Q}=\frac{\rho^2\gamma\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}}$ で斥力。

磁場による力は $\boxed{\overbrace{\mu_0\frac{\rho\gamma v}{2\pi r}}^{B}\times\overbrace{\rho\gamma v}^{I}\times\frac{\ell}{\gamma}=\mu_0\frac{\rho^2\gamma v^2\ell}{2\pi r}}$ で引力となる。引き算して、

$$\frac{\rho^2\gamma\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}-\mu_0\frac{\rho^2\gamma v^2\ell}{2\pi r}=\frac{\rho^2\gamma\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{\frac{1}{c^2}}v^2\right)=\frac{\rho^2\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\times\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{D.71}$$

となる。$\boxed{1-\frac{v^2}{c^2}>0}$ だから、この量は正。つまり斥力である。Lorentz 変換したことによって、斥力が引力に変わるなどということは起こりそうもないので、理屈に合っている。元の力と比べると $\boxed{\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍で「運動方向と垂直な力は $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に弱くなる」という 3 次元力の変換と合致した結果である。

★【演習問題 9-3】の解答 .... (問題は p230、ヒントは p4w)

(9.101) より、$\{\tilde{x}^*\}$ 座標系の電磁場は
→ p216

$$\tilde{\vec{E}}=\gamma\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{D.72}$$

$$\tilde{\vec{B}}=\frac{1-\gamma}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{B})\vec{v}+\gamma\vec{B} \tag{D.73}$$

なので、

$$-e\Bigg(\overbrace{\gamma\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)}^{\tilde{\vec{E}}}-\vec{v}\times\overbrace{\left(\underbrace{\frac{1-\gamma}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{B})\vec{v}}_{\vec{v}\text{との外積で}\vec{0}}+\gamma\vec{B}\right)}^{\tilde{\vec{B}}}\Bigg)=-e\left(\gamma\vec{v}\times\vec{B}-\gamma\vec{v}\times\vec{B}\right)=\vec{0} \tag{D.74}$$

★【演習問題 10-1】の解答 .... (問題は p258、ヒントは p4w)

ヒントより、

$$T^{zz}\text{の }B_{\text{外}}\text{の 1 次の項}=-\frac{Qc\beta\gamma z}{4\pi\tilde{r}^3}B_{\text{外}} \tag{D.75}$$

の積分のみを考える。$\boxed{z=\pm L}$ の寄与の和は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{Qc\beta\gamma LB_{\text{外}}}{2\pi\left(\underbrace{\gamma^2(x-\beta ct)^2+y^2+L^2}_{\tilde{r}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.76}$$

である。

[†3] 密度が γ 倍になるが Lorentz 短縮で長さが $\frac{1}{\gamma}$ 倍になってトータル電荷は変わらない、と考えてもよい。

まず $\boxed{y = \sqrt{\gamma^2(x-\beta ct)^2c + L^2}\tan\theta}$ とおいて、

$$
\begin{aligned}
&=\frac{Qc\beta\gamma LB_{外}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{\gamma^2(x-\beta ct)^2+L^2}\,\frac{1}{\left(\frac{\gamma^2(x-\beta ct)^2+L^2}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{Qc\beta\gamma LB_{外}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\,\cos\theta\,\frac{1}{\gamma^2(x-\beta ct)^2+L^2}\\
&=\frac{Qc\beta\gamma LB_{外}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{1}{\gamma^2(x-\beta ct)^2+L^2}
\end{aligned}
\tag{D.77}
$$

次に $\boxed{x-\beta ct = \frac{L}{\gamma}\tan\theta}$ とおいて、

$$
=\frac{Qc\beta\gamma LB_{外}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}\frac{L}{\gamma}\frac{\cos^2\theta}{L^2}=\frac{Qc\beta B_{外}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = QvB_{外}
\tag{D.78}
$$

となって、作用する力が $QvB_{外}$ であることがわかる。

★【演習問題 10-2】の解答 .... （問題は p258、ヒントは p4w）

まずヒントで作った行列 $\mathbf{R}$ を $\mathbf{E}$ に右から掛ける。$\boxed{\vec{E}\cdot\vec{\mathbf{e}}_E = |\vec{E}|}$ と $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_{\perp i}\cdot\vec{E}=0}$ を使って、

$$
\begin{bmatrix}
\left[\vec{E}\right]^x\left[\vec{E}\right]^x & \left[\vec{E}\right]^x\left[\vec{E}\right]^y & \left[\vec{E}\right]^x\left[\vec{E}\right]^z\\
\left[\vec{E}\right]^y\left[\vec{E}\right]^x & \left[\vec{E}\right]^y\left[\vec{E}\right]^y & \left[\vec{E}\right]^y\left[\vec{E}\right]^z\\
\left[\vec{E}\right]^z\left[\vec{E}\right]^x & \left[\vec{E}\right]^z\left[\vec{E}\right]^y & \left[\vec{E}\right]^z\left[\vec{E}\right]^z
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^x\\
\left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^y\\
\left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^z & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^z & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^z
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\left[\vec{E}\right]^x|\vec{E}| & 0 & 0\\
\left[\vec{E}\right]^y|\vec{E}| & 0 & 0\\
\left[\vec{E}\right]^z|\vec{E}| & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{D.79}
$$

となる。次に、$\boxed{\mathbf{R}^\top = \begin{bmatrix}\left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^z\\ \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^z\\ \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^z\end{bmatrix}}$ を左から掛ける。

$$
\begin{bmatrix}
\left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_E\right]^z\\
\left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp1}\right]^z\\
\left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^x & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^y & \left[\vec{\mathbf{e}}_{\perp2}\right]^z
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\left[\vec{E}\right]^x|\vec{E}| & 0 & 0\\
\left[\vec{E}\right]^y|\vec{E}| & 0 & 0\\
\left[\vec{E}\right]^z|\vec{E}| & 0 & 0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
|\vec{E}|^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{D.80}
$$

となるので、考えている行列を対角化した結果は

$$
-\varepsilon_0\begin{bmatrix}|\vec{E}|^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
+\frac{\varepsilon_0}{2}\begin{bmatrix}|\vec{E}|^2 & 0 & 0\\ 0 & |\vec{E}|^2 & 0\\ 0 & 0 & |\vec{E}|^2\end{bmatrix}
=\frac{\varepsilon_0}{2}\begin{bmatrix}-|\vec{E}|^2 & 0 & 0\\ 0 & |\vec{E}|^2 & 0\\ 0 & 0 & |\vec{E}|^2\end{bmatrix}
\tag{D.81}
$$

である。つまりは電場に平行な方向に張力、垂直な方向に圧力が作用して、それらの大きさの面積密度は $\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$ となる。

★【演習問題 11-1】の解答 .... （問題は p291、ヒントは p4w）

運動量の積分は、ヒントの(D.10)に $\boxed{\tilde{r}^2=\tilde{x}^2+\rho^2}$ を代入して、
→ p5w

$$\frac{\beta\gamma^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-\gamma^2(x-\beta ct)^2}}\mathrm{d}\rho\,\rho^3\left(Q\frac{1}{R^3}\right)^2 \tag{D.82}$$

$\boxed{\rho=\tilde{x}\tan\theta}$ として、

$$\begin{aligned}
&=\frac{\beta\gamma^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\int_0^{\alpha(x)}\overbrace{\frac{\tilde{x}\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}}^{\mathrm{d}\rho}\tilde{x}^3\tan^3\theta\left(Q\frac{1}{R^3}\right)^2\\
&=\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\int_0^{\alpha(x)}\tilde{x}^4\,\mathrm{d}\theta\,\frac{\boxed{\sin^3\theta}\ \sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^5\theta}\\
&=\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\,\tilde{x}^4\underbrace{\int_0^{\alpha(x)}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\left(\frac{1}{\cos^5\theta}-\frac{1}{\cos^3\theta}\right)}_{\left[\frac{1}{4\cos^4\theta}-\frac{1}{2\cos^2\theta}\right]_0^{\alpha(x)}}
\end{aligned}\tag{D.83}$$

$\boxed{\cos\alpha(x)=\frac{|\tilde{x}|}{R}}$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\,\tilde{x}^4\left(\frac{R^4}{4\tilde{x}^4}-\frac{R^2}{2\tilde{x}^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\\
=&\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\int_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\mathrm{d}x\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^2}{2}\tilde{x}^2+\frac{1}{4}\tilde{x}^4\right)\\
=&\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\left[\frac{R^4}{4}x-\frac{R^2}{2}\gamma^2\frac{(x-\beta ct)^3}{3}+\frac{1}{4}\gamma^4\frac{(x-\beta ct)^5}{5}\right]_{-\frac{R}{\gamma}+\beta ct}^{\frac{R}{\gamma}+\beta ct}\\
=&\frac{\beta\gamma^2Q^2}{8\pi\varepsilon_0R^6}\left(\frac{R^4}{4}\frac{2R}{\gamma}-\frac{R^2}{2}\gamma^2\frac{2\frac{R^3}{\gamma^3}}{3}+\frac{1}{4}\gamma^4\frac{2\frac{R^5}{\gamma^5}}{5}\right)=\frac{\beta\gamma Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)}_{\frac{4}{15}}
\end{aligned}\tag{D.84}$$

$\frac{4}{3}+\frac{4}{15}=\frac{8}{5}$ なので、今度は $\frac{8}{5}$ 問題になる。

★【演習問題 11-2】の解答 .... （問題は p291、ヒントは p5w）

ヒントで出てきた $\frac{V_{\text{源}}^i(\{x^*\})}{V_{\text{源}}^0(\{x^*\})}$ という量は $\left[\vec{\beta}_{\text{源}}(\{x^*\})\right]^i$ に等しい[†4]。第0成分に関しては $\boxed{\frac{V_{\text{源}}^0(\{x^*\})}{V_{\text{源}}^0(\{x^*\})}=1}$
→ p290 の脚注 †43

になる。(D.11)の分母に現れる量は
→ p5w

$$\ell_\nu(\{x^*\})(V_{\text{源}}^\nu(\{x^*\})/V_{\text{源}}^0(\{x^*\}))=\underset{+\text{時}}{-}|\vec{x}-\vec{X}_{\text{源}}(\{x^*\})|\underset{-\text{時}}{+}(\vec{x}-\vec{X}_{\text{源}}(\{x^*\}))\cdot\vec{\beta}_{\text{源}}(\{x^*\}) \tag{D.85}$$

[†4] $\vec{\beta}_{\text{源}}(\{x^*\})$ は時空点 $\{X_{\text{源}}^*(\{x^*\})\}$ における粒子の $\frac{\text{速度}}{c}$。$(\{x^*\})$ が付いているが、この量の居場所は $\{x^*\}$ ではなく $\{X_{\text{源}}^*(\{x^*\})\}$ であることに注意しよう。

となる。なお、$\boxed{(\vec{x}-\vec{X}_{\text{源}}(\{x^*\}))\cdot\vec{\beta}_{\text{源}}(\{x^*\}) = |\vec{x}-\vec{X}_{\text{源}}(\{x^*\})|\beta_{\text{源}}(\{x^*\})\cos\theta}$ である。以上より、(11.102) → p291 と(11.103) → p291 を得る（$\underbrace{+}_{-\text{時}}\underbrace{+}_{-\text{時}A^{\mu}} = \underbrace{+}_{-\text{時}A_{\mu}}$ に注意）。

★【演習問題 A-1】の解答 .... （問題は p298、ヒントは p5w）

$L_{\text{東西}}$ が Lorentz 短縮した結果、東西方向に進んだ光は

$$\frac{L_{\text{東西}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c-v}+\frac{L_{\text{東西}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c+v}=\frac{2cL_{\text{東西}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c^2-v^2} \tag{D.86}$$

だけ、南北方向に進んだ光は

$$\frac{2L_{\text{南北}}}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{D.87}$$

だけ時間を掛けて進む。時間差は

$$\frac{2cL_{\text{東西}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c^2-v^2}-\frac{2L_{\text{南北}}}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2(L_{\text{東西}}-L_{\text{南北}})}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{D.88}$$

となる。これはエーテルの風が吹いていないときの時間差 $\frac{2L_{\text{東西}}}{c}-\frac{2L_{\text{南北}}}{c}$ とは（$\boxed{L_{\text{東西}}=L_{\text{南北}}}$ でない限り）一致しないので、精密な実験をすればこの違いを感知できる。